ELEMENTI DI MATEMATICHE COMPILATI DA GIOVANNI INGHIRAMI:...

Giovanni Inghirami

ELEMENTI
DI
MATEMATICHE

COMPILATI

DA GIOVANNI INGHIRAMI

DELLE SCUOLE PIE

PROFESSORE DI ASTRONOMIA E DI MATEMATICHE SUPERIORI

NEL COLLEGIO DI FIRENZE

SECONDA EDIZIONE

TOMO II.

TRIGONOMETRIA PIANA E SFERICA, CURVE, GEOMETRIA ANALITICA, GEOMETRIA DESCRITTIVA, CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE

FIRENZE

COI TIPI CALASANZIANI

1841

TRIGONOMETRIA RETTILINEA

778. La *Trigonometria* scioglie, quando è possibile, questo general problema: *date tre delle sei cose che compongono un triangolo* (508), *trovar l'altre tre*. È *rettilinea* se i triangoli son rettilinei, *sferica* se sono sferici, cioè formati sulla superficie di una sfera dall' intersezione di tre archi di circolo.

779. Preso nella circonferenza ABDA l'arco qualunque AM=a minore o maggiore di 90°, e condotti alle due estremità M, A di quest' arco il raggio CM, e il diametro DA; quindi abbassata sopra AD la normale MH; e infine alzata AY tangente in A: la normale MH si chiama *seno* dell'arco a; la porzione AX della tangente AY, compresa fra il contatto in A e l'incontro in X col prolungamento del raggio CM, si chiama *tangente* dell' arco a; il raggio stesso prolungato in X fino all' incontro con la tangente, si chiama *secante* dell' arco a; e finalmente la porzione HA del diametro compresa, fra il seno e l'estremità A dell' arco, si chiama *seno verso* dell' arco a. Tutte insieme queste quattro rette prendono il nome di *funzioni* dell' arco a, e per compendio, in luogo di scrivere *seno*, *tangente*, *secante*, *seno verso* dell'arco a, si scrive *sena*, *tanga*, *seca*, *sen. v. a.*

Fig. 108 109 110 111

780. E se, supposto in B la metà della semicirconferenza si conducano nel modo stesso sul diametro BL, la normale MQ, e da B la tangente BT protratta fino all' incontro in T col prolungamento del raggio CM, saranno MQ,BT,CT,BQ il *seno*, la *tangente*, la *secante* e il *senoverso* dell'arco BM. E poichè in questo caso BM è ciò di cui AM differisce o in più o in meno da 90°, perciò MQ prende il nome di *coseno* dell' arco AM, ossia dell'arco a, cioè *seno* del *complemento* dell' arco a; inteso qui per complemento, tanto ciò che deve aggiungersi, quanto ciò che deve togliersi ad a per renderlo di 90°. Per lo stesso motivo BT,CT,BQ si chiamano *cotangente*, *cosecante*, *cosenover-*

Fig. 108. 109. 110. 111. *so* dell'arco a. Tutte insieme queste rette si chiamano *cofunzioni*; e in luogo di *coseno, cotangente, cosecante*, *cosenoverso* dell'arco a, si scrive *cosa, cota, coseca, cos.v.a.*

781. Intanto osserveremo 1°. che essendo QM=CH, anche CH rappresenterà il coseno dell'arco a: e perciò mentre può definirsi il seno *quella normale che da una dell'estremità dell'arco cade sul raggio o sul diametro condotto per l'altra estremità*, potrà definirsi il coseno *la porzione del raggio compresa fra il centro e il piede del seno*.

2°. Che *il seno è metà della corda dell'arco doppio*: infatti prolungato MH in Z, si sa (521) che la corda MZ= 2MH=2*sena*, come pure l'arco sotteso MAZ=2MA=2a. Perciò il seno di 30° eguaglia la metà del raggio, comecchè metà della corda di 60°, che vedemmo essere eguale al raggio (605); e metà del raggio sarà pure il coseno di 60°, eguale per natura al seno di 30° (780).

3°. Che ai 45°, ove il complemento eguaglia l'arco, le funzioni e le cofunzioni si eguagliano; e di più la tangente, e in conseguenza anche la cotangente, è allora eguale al raggio; poichè in tal caso il triangolo rettangolo CAX diviene isoscele (566.6°), e si ha perciò AX=AC.

4°. Che ai 90° il seno e la cosecante eguagliano il raggio, il coseno e la cotangente son nulli, mentre la secante e la tangente divenendo allora parallele (544), nè potendo quindi incontrarsi, sono *infinite*: all'opposto all'arco *zero* il seno e la tangente son nulli, il coseno e la secante eguagliano il raggio, la cotangente e la cosecante sono infinite. Perciò *nel primo quadrante*, ossia nei primi 90°, *i seni, le tangenti e le secanti crescono di grandezza crescendo l'arco, mentre i coseni, le cotangenti e le cosecanti diminuiscono.*

782. È chiaro però che tutte queste funzioni variano col raggio CA, e che per esempio uno stesso arco a, che nel circolo del raggio 1 ha per seno *sena*, avrà r*sena* nel circolo del raggio r (623). Come all'opposto, se ha per seno *sena* nel circolo del raggio r, avrà $\frac{sena}{r}$ nel circolo del raggio 1. Per maggior

semplicità noi supporremo $r=1$; e se non lo sia, dovranno moltiplicarsi le funzioni per r, e le loro potenze per le potenze corrispondenti di r.

783. Generalmente dovrà in tali casi osservarsi la regola data (689.7°), e moltiplicare o dividere i diversi termini delle formule per quella potenza di r che le rende omogenee. Così le formule $1=sen^2a+cos^2a$, $tanga=\frac{sena}{cosa}$, $tang(a+b)=\frac{tanga+tangb}{1-tanga\ tangb}$, si ridurranno ad $r^2=sen^2a+cos^2a$, $tanga=\frac{rsena}{cosa}$, .. . $tang(a+b)=\frac{r^2tanga+r^2tangb}{r^2-tanga\ tangb}$. E tali appunto si sarebbero trovate se nel costruirle si fosse preso r per raggio. Questa facilità di restituir le formule al loro vero valore, unita alla più grande semplicità che le medesime acquistano dalla supposizione di $r=1$, rende tal supposizione evidentemente preferibile alla contraria.

784. Or tutte le funzioni e cofunzioni spettanti ad un medesimo arco sono tra loro dipendenti e collegate in maniera, che il valore di ciascuna può sempre aversi per il valore di qualunque delle altre; oggetto di grandissima importanza nella Trigonometria. Ed eccone il modo.

Primieramente i triangoli rettangoli CHM, CAX, CBT danno (659) $HM^2+CH^2=CM^2$; $CA^2+AX^2=CX^2$; $CB^2+BT^2=CT^2$: cioè

Fig. 108.

1ª. $sen^2a+cos^2a=1$; 2ª. $1+tang^2a=sec^2a$; 3ª. $1+cot^2a=cosec^2a$. Se $a=30°$, nel qual caso $sena=\frac{1}{2}$ (781.2°), la 1ª. darà $cos30°=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, valore che apparterrà pure al $sen\,60°=(780)\ cos(90°-60°)=cos30°$; e se $a=45°$, nel qual caso $sena=cosa$ (781.3°), avremo egualmente dalla 1ª. $sen45°=cos45°=\sqrt{\frac{1}{2}}$.

785. Inoltre i triangoli simili CHM, CAX, e i due parimente simili CQM, CBT danno CH : HM :: CA : AX; CQ : QM :: CB : BT, cioè $cosa : sena :: 1 : tanga$; $sena : cosa :: 1 : cota$; e quindi 4ª. $tanga=\frac{sena}{cosa}$; 5ª. $cota=\frac{cosa}{sena}=\frac{1}{tanga}$.

786. Infine gli stessi triangoli danno CH : CM :: CA : CX, CQ : CB :: CM : CT; cioè $cosa : 1 :: 1 : seca$; $sena : 1 :: 1 : coseca$; e perciò 6ª. $seca=\frac{1}{cosa}$; 7ª. $coseca=\frac{1}{sena}$.

787. Or sostituendo gli uni negli altri i valori di ciascuna funzione, dati da queste formule, risulterà la seguente tavola,

la cui costruzione potrà utilmente servire per abituarci alle trasformazioni trigonometriche.

valori dati	di sena	di cosa	di tanga
per il *seno*	. . . .	13ª. $\sqrt{(1-sen^2a)}$	18ª. $\frac{sena}{\sqrt{(1-sen^2a)}}$
per il *coseno*	8ª. $\sqrt{(1-cos^2a)}$	. . . .	19ª. $\frac{\sqrt{(1-cos^2a)}}{cosa}$
per la *tang.*ᵉ	9ª. $\frac{tanga}{\sqrt{(1+tang^2a)}}$	14ª. $\frac{1}{\sqrt{(1+tang^2a)}}$	. . . .
per la *cot.*ᵉ	10ª. $\frac{1}{\sqrt{(1+cot^2a)}}$	15ª. $\frac{cota}{\sqrt{(1+cot^2a)}}$	20ª. $\frac{1}{cota}$
per la *sec.*ᵉ	11ª. $\frac{\sqrt{(sec^2a-1)}}{seca}$	16ª. $\frac{1}{seca}$	21ª. $\sqrt{(sec^2a-1)}$
per la *cosec.*ᵉ	12ª. $\frac{1}{coseca}$	17ª. $\frac{\sqrt{(cosec^2a-1)}}{coseca}$	22ª. $\frac{1}{\sqrt{(cosec^2a-1)}}$

valori dati	di cota	di seca	di coseca
per il *seno*	23ª. $\frac{\sqrt{(1-sen^2a)}}{sena}$	28ª. $\frac{1}{\sqrt{(1-sen^2a)}}$	33ª. $\frac{1}{sena}$
per il *coseno*	24ª. $\frac{cosa}{\sqrt{(1-cos^2a)}}$	29ª. $\frac{1}{cosa}$	34ª. $\frac{1}{\sqrt{(1-cos^2a)}}$
per la *tang.*ᵉ	25ª. $\frac{1}{tanga}$	30ª. $\sqrt{(1+tang^2a)}$	35ª. $\frac{\sqrt{(1+tang^2a)}}{tanga}$
per la *cot.*ᵉ	. . . .	31ª. $\frac{\sqrt{(1+cot^2a)}}{cota}$	36ª. $\sqrt{(1+cot^2a)}$
per la *sec.*ᵉ	26ª. $\frac{1}{\sqrt{(sec^2a-1)}}$	. . . .	37ª. $\frac{seca}{\sqrt{(sec^2a-1)}}$
per la *cosec.*ᵉ	27ª. $\sqrt{(cosec^2a-1)}$	32ª. $\frac{coseca}{\sqrt{(cosec^2a-1)}}$	. . . .

Fig.108 788. Sieno adesso MA$=a$, MP$=b$ due archi di cui si conoscano i seni e in conseguenza anche i coseni, e vogliansi i seni e i coseni degli archi $a+b$, $a-b$. Chiamate m, n, d le corde degli archi $2a, 2b, 2(a\pm b)$, avremo (781.2°) $m=2sena, n=2senb$, $d=2sen(a\pm b)$. Ma d'altronde (680.681) $d=\frac{m}{2}\sqrt{(4-n^2)}\pm\frac{n}{2}\sqrt{(4-m^2)}$, dunque poichè (787.13ª) $\sqrt{(1-sen^2b)}=cosb$, e $\sqrt{(1-sen^2a)}=cosa$, sostituendo e riducendo troveremo

$$38^a.\ sen(a\pm b)=senacosb\pm senbcosa$$

ove il segno inferiore del secondo membro ha luogo quando ha

luogo nel primo; il che s'intenda avvertito per tutte le formule susseguenti. E se in luogo dell'arco qualunque a si ponga $90^\circ-a$, e si noti che (780) $sen(90^\circ-a)=cosa$, $cos(90^\circ-a)=sena$, avremo $sen(90^\circ-a\pm b)=sen(90^\circ-a)cosb\pm senbcos(90^\circ-a)=cosacosb\pm senbsena$. Ma $sen(90^\circ-a\pm b)=sen(90^\circ-(a\mp b))=cos(a\mp b)$, dunque sostituendo e rovesciando i segni, si avrà

$$39^{a}.\ cos(a\pm b)=cosacosb\mp senasenb$$

Si osservi che questa formula e la precedente, e generalmente tutte quelle che incontreremo in seguito con termini di doppio segno, ne rappresentano in sostanza due distinte; una cioè col segno superiore, l'altra col segno inferiore. Perciò se per esempio diremo ,, sommate le due formule $sen(a\pm b)=senacosb\pm senbcosa$,, dovrà intendersi che $sen(a+b)=senacosb+senbcosa$ deve sommarsi con $sen(a-b)=senacosb-senbcosa$; il che sia avvertito una volta per sempre.

789. Se la 38ª. si divida per la 39ª, e poi si divida questa per quella avremo

$$tang(a\pm b)=\frac{senacosb\pm senbcosa}{cosacosb\mp senasenb};\quad cot(a\pm b)=\frac{cosacosb\mp senasenb}{senacosb\pm senbcosa}$$

che con dividere il numeratore e denominatore del secondo membro nell'una per $cosacosb$, nell'altra per $senasenb$, facilmente si trasformano nelle due

$$40^{a}.\ tang(a\pm b)=\frac{tanga\pm tangb}{1\mp tangatangb};\quad 41^{a}.\ cot(a\pm b)=\frac{cotacotb\mp 1}{cotb\pm cota}.$$

E in pari modo potrebbero aversi i valori di $sec(a\pm b)$, $cosec(a\pm b)$; ma essendo questi di minor uso, ci fermeremo piuttosto a considerare la 38ª. e la 39ª. che tanto importano.

790. E primieramente se, ritenuto il solo segno inferiore, si cangi a in b e b in a, avremo: $sen(b-a)=senbcosa-senacosb$, e $cos(b-a)=cosbcosa+senasenb$. Dunque $sen(b-a)=-sen(a-b)$, e $cos(b-a)=cos(a-b)$: d'onde, fatto $b=0$, verrà 1°. $sen-a=-sena$; cioè *il seno di un arco negativo eguaglia il seno negativo dell'arco stesso reso positivo*; 2°. $cos-a=cosa$, cioè *il coseno di un arco negativo eguaglia il coseno dello stesso arco reso positivo*. Inoltre essendo $cos(b-a)=cos(a-b)$, è chiaro che in luogo dell'una o dell'altra di quest' espressioni potre-

mo sempre sostituire $\cos(a \backsim b)$. Avremo infine $tang-b= . . .$ $(785.4^a)\frac{sen-b}{cos-b}=\frac{-senb}{cosb}=-tangb$; e $cot-b=(785.5^a)\frac{cos-b}{sen-b}=\frac{cosb}{-senb}=-cotb$.

791. In secondo luogo, se nelle stesse due formule, e nella 40^a e 41^a, sia $b=a$, il segno superiore darà

42^a. $sen2a=2senacosa$

43^a. $cos2a=cos^2a-sen^2a=(784.1^a)\ 1-2sen^2a=2cos^2a-1$

44^a. $tang2a=\frac{2tanga}{1-tang^2a}$; 45^a. $cot2a=\frac{cot^2a-1}{2cota}=\frac{1-tang^2a}{2tanga}$.

E se in queste si ponga $2a=b$, e in conseguenza $a=\frac{1}{2}b$, avremo

46^a. $senb=2sen\frac{1}{2}bcos\frac{1}{2}b$; 47^a. $cosb=1-2sen^2\frac{1}{2}b=2cos^2\frac{1}{2}b-1$

48^a. $tangb=\frac{2tang\frac{1}{2}b}{1-tang^2\frac{1}{2}b}$; 49^a. $cotb=\frac{1-tang^2\frac{1}{2}b}{2tang\frac{1}{2}b}$.

792. In terzo luogo, ritenuto il segno superiore, posti successivamente $a=90^\circ$ e $b=0^\circ$; $a=90^\circ$ e $b=90^\circ$; $a=180^\circ$ e $b=90^\circ$; $a=180^\circ$ e $b=180^\circ$, e rammentandoci (781.4°) che $sen0^\circ=0$, $cos0^\circ=1$, $sen90^\circ=1$, $cos90^\circ=0$ avremo

$sen90^\circ=1 \quad sen180^\circ=0 \quad sen270^\circ=-1 \quad sen360^\circ=0$

$cos90^\circ=0 \quad cos180^\circ=-1 \quad cos270^\circ=0 \quad cos360^\circ=1$

e quindi per qualunque valore di b, compreso fra 0° e 90°

50^a. $sen(90^\circ \pm b)=+cosb$ $\quad$ 54^a. $cos(90^\circ \pm b)=\mp senb$

51^a. $sen(180^\circ \pm b)=\mp senb$ $\quad$ 55^a. $cos(180^\circ \pm b)=-cosb$

52^a. $sen(270^\circ \pm b)=-cosb$ $\quad$ 56^a. $cos(270^\circ \pm b)=\pm senb$

53^a. $sen(360^\circ \pm b)=\pm senb$ $\quad$ 57^a. $cos(360^\circ \pm b)=+cosb$

d'onde in forza delle formule 4^a. e 5^a. (785), si dedurrà pure

58^a. $tang(90^\circ \pm b)=\mp cotb$ $\quad$ 62^a. $cot(90^\circ \pm b)=\mp tangb$

59^a. $tang(180^\circ \pm b)=\pm tangb$ $\quad$ 63^a. $cot(180^\circ \pm b)=\pm cotb$

60^a. $tang(270^\circ \pm b)=\mp cotb$ $\quad$ 64^a. $cot(270^\circ \pm b)=\mp tangb$

61^a. $tang(360^\circ \pm b)=\pm tangb$ $\quad$ 65^a. $cot(360^\circ \pm b)=\pm cotb$

793. Segue di qui 1°. che *tutte le funzioni e cofunzioni degli archi superiori ai 90° son riducibili a funzioni e cofunzioni di archi minori di 90°.*

2°. Che *i seni degli archi compresi fra i 180° e i 360° son negativi, come lo sono i coseni degli archi compresi fra i 90° e i 270°, e le tangenti e cotangenti di quelli fra i 90° e i 180° e tra i 270° e i 360°.*

3°. Che *i seni son* dunque *positivi nel* 1° e 2° *quadrante; divengon negativi negli altri due*; *i coseni son positivi nel* 1° *e nel* 4°, *negativi nel* 2° e 3°; *le tangenti e le cotangenti son positive nel* 1° e 3°, *negative nel* 2° e *nel* 4°.

4° Che avendosi $sen(90°+b)=cosb$, crescendo l'arco b, e in conseguenza scemando $cosb$ (781.4°), scemerà ancora $sen(90°+b)$; cioè *i seni dopo esser cresciuti da* 0° *ai* 90° *cominciano in seguito a diminuire*, finchè ai 180° tornano ad annullarsi (792). In modo consimile si dimostrerà che dai 180° ai 270° crescono di bel nuovo, e dai 270° ai 360° diminuiscono; che le tangenti crescono e scemano con l'ordine stesso dei seni, mentre i coseni e le cotangenti scemano e crescono con l'ordine opposto.

5°. Che essendo $sen(180°-b)=senb$, *il seno di un arco è lo stesso che quello del suo supplemento*.

6°. Che le funzioni negative $-senb$, $-cosb$, ec. appartengono ad archi che posson sempre determinarsi; infatti

$-senb=sen(180°+b)=sen(360°-b)$; $-cosb=cos(180°\pm b)$

$-tangb=tang(180°-b)=tang(360°-b)$; $-cotb=cot(180°-b)=cot(360°-b)$.

7°. Che fatto $b=45°\pm r$, sarà $90°-b=45°\mp r$; perciò

66ª. $sen(45°\mp r)=cos(45°\pm r)$; 67ª. $tang(45°\mp r)=cot(45°\pm r)$.

8°. Che *una stessa funzione appartiene a due archi differenti*; così l'arco b, e l'arco $180°-b$ hanno uno stesso seno, o lo hanno eguale; gli archi b e $360-b$ hanno uno stesso coseno; gli archi b e $180°+b$ una stessa o una egual tangente, ec. Anzi se all'arco b si aggiunga o una, o due, o un qualunque numero n di circonferenze, e si formin così gli archi $360°+b$, $2\times 360°+b$, ... $n\times 360°+b$, è manifesto che tutti questi avranno lo stesso seno, coseno, tangente, ec. che ha l'arco b.

794. Posto dunque per comodo $360°=2\pi$, e quindi $180°=\pi$, avremo $sen(2n\pi+b)=senb$, $cos(2n\pi+b)=cosb$. Cangiato b in $-b$, la prima formula darà altresì $sen(2n\pi-b)=sen-b=$ (790.1°) $-senb$, e la seconda $cos(2n\pi-b)=cos-b=$ . . (790.2°) $cosb$. Potremo dunque stabilire più genericamente

68ª. $sen(2n\pi\pm b)=\pm senb$; 69ª. $cos(2n\pi\pm b)=cosb$.

E se in queste si ponga $\pi\pm b$ in luogo di b, avremo

70ª. $sen((2n+1)\pi\pm b)=sen(\pi\pm b)=(792.51ª)\mp senb$.

71ª. $cos((2n+1)\pi\pm b)=cos(\pi\pm b)=(792.55ª)-cosb$.

Con $b=0$, la 68ª. e la 70ª. daranno $sen 2n\pi=0$, $sen(2n+1)\pi=0$, ed in generale

72ª. $sen n\pi=0$, qualunque sia n o pari o impari, purchè intero.

Inoltre dalla 69ª. e 71ª. avremo

73ª. $cos 2n\pi=cos 0^\circ=1$; e 74ª. $cos(2n+1)\pi=-cos 0^\circ=-1$.

Posto infine $b=\frac{1}{2}\pi$, la 68ª. e la 69ª. daranno

75ª. $sen(2n\pm\frac{1}{2})\pi=\pm sen\frac{1}{2}\pi=(781.4°)\pm 1$;

76ª. $cos(2n\pm\frac{1}{2})\pi=cos\frac{1}{2}\pi=0$.

795. Sommate ora fra loro, e sottratte l'una dall'altra le doppie formule contenute nelle 38ª. e 39ª., verrà

77ª. $sen a cos b=\frac{1}{2}sen(a+b)+\frac{1}{2}sen(a-b)$

78ª. $cos a cos b=\frac{1}{2}cos(a+b)+\frac{1}{2}cos(a-b)$

79ª. $sen a sen b=\frac{1}{2}cos(a-b)-\frac{1}{2}cos(a+b)$

formule che trasformano i prodotti di seni e di coseni in semplici somme o differenze di seni o di coseni.

796. Se in queste si faccia $a+b=p$, $a-b=q$, onde $a=\frac{1}{2}(p+q)$, $b=\frac{1}{2}(p-q)$, si avrà

80ª. $sen p\pm sen q=2sen\frac{1}{2}(p\pm q)cos\frac{1}{2}(p\mp q)$

81ª. $cos p+cos q=2cos\frac{1}{2}(p+q)cos\frac{1}{2}(p-q)$

82ª. $cos p-cos q=2sen\frac{1}{2}(p+q)sen\frac{1}{2}(q-p)$

Dalla 4ª. e 5ª. (785), e dalla 38ª. (788) si avrà inoltre

83ª. $tang p\pm tang q=\frac{sen(p\pm q)}{cos p cos q}$; 84ª. $cot p\pm cot q=\frac{sen(q\pm p)}{sen p sen q}$,

alle quali potremo aggiungere le due seguenti

85ª. $tang p+cot p=\frac{sen^2 p+cos^2 p}{sen p cos p}=(784.1ª)\frac{1}{sen p cos p}=(791.42ª)\frac{2}{sen 2p}$

86ª. $tang p-cot p=\frac{sen^2 p-cos^2 p}{sen p cos p}=(791.43ª)-\frac{2cos 2p}{sen 2p}=-2cot 2p$,

formule tutte che cangiano in prodotti o in quozienti le somme e differenze delle funzioni e cofunzioni.

797. Che se nella 80ª. sia $p=90°$, e nella 81ª. e 82ª. sia $q=0$, verrà

87ª. $1\pm sen q=2sen(45°\pm\frac{1}{2}q)cos(45°\mp\frac{1}{2}q)$

88ª. $1+cos p=2cos^2\frac{1}{2}p$; 89ª. $1-cos p=2sen^2\frac{1}{2}p$; e perciò

90ª. $sen\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1-cos p}{2}}$; 91ª. $cos\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1+cos p}{2}}$

formule, che divise l'una per l'altra danno

92ª. $tang\frac{1}{2}p=\sqrt{\frac{1-cos p}{1+cos p}}=\sqrt{\frac{(1-cos p)^2}{1-cos^2 p}}=\sqrt{\frac{1-cos^2 p}{(1+cos p)^2}}=\frac{1-cos p}{sen p}=\frac{sen p}{1+cos p}$

e quindi dalla 5ª. (785)

93ª. $\cot\frac{1}{2}p = \frac{\text{sen}p}{1-\cos p} = \frac{1+\cos p}{\text{sen}p}$.

798. Dividendo l' une per l' altre le formule del n. 796. si troverà facilmente

94ª. $\frac{\text{sen}p+\text{sen}q}{\text{sen}p-\text{sen}q} = \frac{\tan\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{sen}\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)\text{sen}\frac{1}{2}(p-q)}$

95ª. $\frac{\text{sen}p\pm\text{sen}q}{\cos p+\cos q} = \tan\frac{1}{2}(p\pm q)$; 96ª. $\frac{\text{sen}p\pm\text{sen}q}{\cos p-\cos q} = \cot\frac{1}{2}(p\mp q)$

97ª. $\frac{\cos p+\cos q}{\cos p-\cos q} = \frac{\cot\frac{1}{2}(p+q)}{\tan\frac{1}{2}(q-p)}$; 98ª. $\frac{\tan p+\tan q}{\tan p\mp\tan q} = \frac{\text{sen}(p\pm q)}{\text{sen}(p\mp q)}$

99ª. $\frac{\tan p\pm\tan q}{\cot p\pm\cot q} = \tan p\tan q$

100ª. $\frac{\tan p\pm\tan q}{\cot p\mp\cot q} = \frac{\text{sen}(p\pm q)\tan p\tan q}{\text{sen}(q\mp p)}$.

799. Dividendo anche l' une per l' altre le form. 87ª. 88ª. 89ª. si ha

101ª. $\frac{1\pm\text{sen}q}{1\mp\text{sen}q} = \tan^2(45^\circ\pm\frac{1}{2}q)$; 102ª. $\frac{1\pm\text{sen}q}{1+\cos p} = (793.5^\circ)\ \frac{\text{sen}^2(45^\circ\pm\frac{1}{2}q)}{\cos^2\frac{1}{2}p}$;

103ª. $\frac{1\pm\text{sen}q}{1-\cos p} = \frac{\text{sen}^2(45^\circ\pm\frac{1}{2}q)}{\text{sen}^2\frac{1}{2}p}$; 104ª. $\frac{1+\cos p}{1-\cos p} = \cot^2\frac{1}{2}p$: e se nella 98ª.

si faccia $p = 45^\circ$, verrà (793.5°) 105ª. $\frac{1\pm\tan q}{1\mp\tan q} = \tan(45^\circ\pm q)$. E tanto si ha dal sommare e sottrarre le formule della 38ª. e 39ª.

800. Se queste ora si moltiplichino, è facile il dedurne

106ª. $\text{sen}(a+b)\text{sen}(a-b) = \cos^2b - \cos^2a = \text{sen}^2a - \text{sen}^2b$

107ª. $\text{sen}(a\pm b)\cos(a\pm b) = \frac{1}{2}\text{sen}2(a\pm b)$

108ª. $\text{sen}(a\pm b)\cos(a\mp b) = \frac{1}{2}(\text{sen}2a\pm\text{sen}2b)$

109ª. $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2a - \text{sen}^2b = \cos^2b - \text{sen}^2a$. E se si dividano l'una per l' altra, avremo

110ª. $\frac{\text{sen}(a+b)}{\text{sen}(a-b)} = \frac{\tan a+\tan b}{\tan a-\tan b}$; 111ª. $\frac{\text{sen}(a\pm b)}{\cos(a\pm b)} = \frac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a\tan b}$

112ª. $\frac{\cos(a+b)}{\cos(a-b)} = \frac{1-\tan a\tan b}{1+\tan a\tan b}$. Tutte queste formule posson variarsi all'infinito col sommarle, sottrarle, moltiplicarle e dividerle.

Calcolo delle Tavole dei seni. Principali serie Trigonometriche

801. Abbiamo già veduto (674) che il valore del perimetro di un poligono inscritto di 32768 lati non comincia a differire da quello della circonferenza fino almeno alla settima cifra decimale. Il lato di questo poligono non dovrà dunque appena dif-

ferire dall' arco sotteso che alla dodicesima decimale, poichè un errore anche di una sola unità nell' undecima ne porterebbe uno sulla settima nel prodotto per 32768. E poichè questo lato sottende un arco di circa 40'', potremo perciò stabilir l'equazione $cord.40''=arc.40''$, e quindi l'altra (781.2°) $sen.20''=arc.20''$, ambedue esatte dentro almeno la centomilionesima parte del raggio.

802. A più forte ragione si potrà adunque supporre $sen1''=arc.1''$, quando non si esiga un rigore affatto straordinario e quasi infinito. Or poichè la circonferenza totale è divisa in 1296000 secondi (127), dunque $sen1''=arc.1''=\frac{2\pi}{1296000}=$ (676) . . . . . $\frac{3,14159 26ec.}{1296000}\times 2=0,00000484813681 1$ ec.

803. Avuto così il valor di $sen1''$ la formula 13ª. (787) darà quello di $cos1''$; quindi la 42ª. (791) quello di $sen2''$, e posto successivamente $a=2''$, $=3''$, $=4''$, ec. e $b=1''$ nella 38ª. (788), potranno aversi i seni di 3'',4'',5'', ec. e così di seguito fino a 90°. I coseni si avranno immediatamente dai seni, atteso l' essere $cosa=sen(90°-a)$ (780). I seni e i coseni faran conoscere le tangenti e le secanti mediante le formule 4ª. e 6ª. (785.786); e poichè (780) $cota=tang(90°-a)$, e $coseca=sec(90°-a)$, è chiaro che calcolate le tangenti e secanti fino ai 90°, si saranno pure calcolate ancora le cotangenti e le cosecanti. Riguardo poi alle funzioni e cofunzioni del rimanente della circonferenza, si è già veduto (793.1°) come possan tutte ridursi a quelle del primo quadrante. Le più ordinarie Tavole trigonometriche, in luogo dei valori numerici delle funzioni, ne danno i logaritmi, per motivo che più spesso abbiamo bisogno di questi che di quelli. E sotto tal forma sono appunto quelle di *Gardiner* che si trovano annesse alle Tavole dei logaritmi dei numeri naturali già da noi rammentate (447), e delle quali si rende ampio conto nei preliminari che vi abbiamo apposti.

804. Ma per aver direttamente il seno e coseno di un arco dato x si ponga

Iª. $senx=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+Hx^7+$ec.

IIª. $cosx=A_1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+E_1x^4+F_1x^5+G_1x^6+H_1x^7+L_1x^8+$ec.

saranno (436.3ª) $A=seno°=(781.4°)\,0$, $A_1=coso°=(ivi)\,1$. In-

trodotti frattanto questi valori nelle due serie supposte, avremo

III^a. $senx=Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+Fx^5+Gx^6+Hx^7+$ec.

IV^a. $cosx=1+B_1x+C_1x^2+D_1x^3+E_1x^4+F_1x^5+G_1x^6+H_1x^7+L_1x^8+$ec.

In quieste si ponga $-x$ in luogo di x; e rammentandoci che $sen-x=-senx$, e $cos-x=cosx$ (790), avremo

V^a. $-senx=-Bx+Cx^2-Dx^3+Ex^4-Fx^5+Gx^6-Hx^7+$ec.

VI^a. $cosx=1-B_1x+C_1x^2-D_1x^3+E_1x^4-F_1x^5+G_1x^6-H_1x^7+L_1x^8-$ec.

Or la III^a. e V^a. sottratte, e la IV^a. e VI^a. sommate riducono la III^a. e IV^a. alle due seguenti

VII^a. $senx=Bx+Dx^3+Fx^5+Hx^7+$ec.

VIII^a. $cosx=1+C_1x^2+E_1x^4+G_1x^6+L_1x^8+$ec.

dalle quali quadrate e sommate si ha

$$\text{IX}^a.\ sen^2x+cos^2x=(784.1^a)\ 1= \begin{array}{l} B^2x^2+2BDx^4+2BFx^6+2BHx^8+\text{ec.} \\ +\ D^2x^6+2DFx^8+\text{ec.} \\ +1+2C_1x^2+2E_1x^4+2G_1x^6+2L_1x^8+\text{ec.} \\ +C_1^2x^4+2C_1E_1x^6+2C_1G_1x^8+\text{ec.} \\ +\ E_1^2x^8+\text{ec.} \end{array}$$

Le stesse moltiplicate danno

$$senxcosx=(791.42^a)\ \tfrac{1}{2}\,sen2x=\begin{array}{l} Bx+\ Dx^3+\ Fx^5+\ Hx^7+\text{ec.} \\ +BC_1x^3+DC_1x^5+FC_1x^7+\text{ec.} \\ +BE_1x^5+DE_1x^7+\text{ec.} \\ +BG_1x^7+\text{ec.} \end{array}$$

Ma dalla VII^a, ponendovi $2x$ in luogo di x, si ha

$$\tfrac{1}{2}sen2x=Bx+4Dx^3+16Fx^5+64Hx^7+\text{ec.}$$

eguagliando dunque i due valori, e trasportando (422), avremo

$$\text{X}^a.\quad 0=\begin{array}{l} -3Dx^3-15Fx^5-63Hx^7-\text{ec.} \\ +BC_1x^3+DC_1x^5+FC_1x^7+\text{ec.} \\ +BE_1x^5+DE_1x^7+\text{ec.} \\ +BG_1x^7+\text{ec.} \end{array}$$

Or se dalla IX^a. si toglie l'unità comune all'uno e all'altro membro resterà zero nel primo, e la prima colonna del secondo darà subito $C_1=-\frac{1}{2}B^2$, valore che posto nella prima colonna della X^a, darà $D=-\frac{1}{2.3}B^3$. In seguito l'uno e l'altro posti nella seconda colonna della IX^a. daranno $E_1=\frac{1}{2.3.4}B^4$, che con i precedenti posto nella seconda colonna della X^a. darà $F=....\frac{1}{2.3.4.5}B^5$, e quindi nel modo stesso dalla terza della IX^a. avre-

mo $G_1 = -\frac{1}{2.3.4.5.6}B^5$; come dalla terza della X^a. $H = \ldots$
$-\frac{1}{2.3.4.5.6.7}B^7$, ec. Sarà perciò

$$senx = Bx - \frac{1}{2.3}B^3x^3 + \frac{1}{2.3.4.5}B^5x^5 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7}B^7x^7 + \text{ec.}$$

$$cosx = 1 - \frac{1}{2}B^2x^2 + \frac{1}{2.3.4}B^4x^4 - \frac{1}{2.3.4.5.6}B^6x^6 + \text{ec.}$$

805. Resta dunque incognito il solo coefficiente B. Per determinarlo si supponga l'arco $x < 90^o$, e tale che sia parte aliquota della circonferenza, cioè che x entri in 2π un numero esatto m di volte. In tal caso $senx$ e $tangx$ saranno semilati di poligoni regolari simili, l'uno inscritto, l'altro circoscritto, ed avremo (614) 1^a. $senx < x$, 2^a. $tangx > x$, ovvero (785.4^a) $\frac{senx}{cosx} > x$, e quindi $senx > xcosx$. Dalla 1^a. si avrà $\frac{senx}{x} < 1$; e se si rifletta che nel circolo del raggio 1 si ha sempre $cosx > cos^2x$ (67), ossia $cosx > 1 - sen^2x$, e quindi a più forte ragione (a motivo di $x^2 > sen^2x$) si ha $cosx > 1 - x^2$, concluderemo dalla 2^a. $\frac{senx}{x} > 1 - x^2$.

806. Ciò premesso, si riduca l'espressione trovata del seno a $\frac{senx}{x} = B - \frac{B^3x^2}{2.3} + \frac{B^5x^4}{2.3.4.5} - \frac{B^7x^6}{2.3.4.5.6.7} + \text{ec.}$ Poichè la condizione di $x < 90^o$, mentre assegna un limite al valor massimo di x, non lo prescrive al valor minimo, e lascia in libertà di assumer quest'arco tanto piccolo quanto vogliamo, si supponga dunque tale che abbiasi $Bx < 1$, ossia $x < \frac{1}{B}$. Sarà in tal caso $B^2x^2 < 1$, ovvero $1 > B^2x^2$, e quindi $B > B^3x^2$, $B^3x^2 > B^5x^4$, $B^5x^4 > B^7x^6$, ec; cioè ciascun termine della serie precedente sarà maggiore del termine consecutivo.

Or da ciò è facile concludere che B primo termine sarà dunque maggiore, e $B - \frac{B^3x^2}{2.3}$ sarà minore della somma totale della serie, e per conseguenza di $\frac{senx}{x}$; avremo perciò 1^o. $B > \frac{senx}{x}$; e poichè si ha (805) $\frac{senx}{x} > 1 - x^2$, sarà pure $B > 1 - x^2$; 2^o. $B - \frac{B^3x^2}{2.3} < \frac{senx}{x}$, e poichè $\frac{senx}{x} < 1$, sarà $B - \frac{B^3x^2}{2.3} < 1$. Frattan-

to siccome queste due ineguaglianze debbono aver luogo per qualunque valore di x, purchè $< \frac{1}{B}$, sarà facile concludere che non potrà esser $B<1$; poichè se fosse $B=1-d$ si avrebbe dalla prima $1-d>1-x^2$, e quindi $x^2>d$, cioè la prima ineguaglianza non sussisterebbe per gli archi minori di $\sqrt{d}$; e neppur potrà esser $B>1$, perchè se fosse $B=1+d$, si avrebbe dalla seconda $1+d-\frac{B^3x^2}{2.3}<1$, e quindi $d<\frac{B^3x^2}{6}$, e $\frac{6d}{B^3}<x^2$, ossia $x>\sqrt{\frac{6d}{B3}}$; cioè la seconda ineguaglianza non sussisterebbe per gli archi minori di $\sqrt{\frac{6d}{B^3}}$. Dovrà dunque esser $B=1$, e per conseguenza avremo

$$senx=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\frac{x^7}{2.3.4.5.6.7}+\frac{x^9}{2.3.4.5.6.7.8.9}-\text{ ec.}$$

$$cosx=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2.3.4}-\frac{x^6}{2.3.4.5.6}+\frac{x^8}{2.3.4.5.6.7.8}\text{ ec.}$$

807. Allo stesso valor di $B=1$ può giungersi in una maniera ancor più luminosa, facendo uso dei due seguenti principj, che più volte ci occorrerà di richiamare anche in seguito. Il primo è, che se si abbia una funzione di una qualunque variabile x, della forma $A+Bx+Cx^2+Dx^3+$ ec. potremo sempre dare ad x un tal valore che, indipendentemente dal segno, il primo termine della funzione risulti maggiore della somma di tutti i seguenti, o che si abbia $A>Bx+Cx^2+Dx^3+$ec., ovvero $A>x(B+Cx+Dx^2+$ec.). Infatti mentre il primo membro di quest'ineguaglianza ha un valore stabile e fisso, l'altro può rendersi sempre di più in più piccolo diminuendo a piacere il valor di x; con che può dunque giungersi a renderlo minore del primo.

808. L'altro principio dipendente in parte dal precedente è, che se si hanno tre espressioni della forma

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+\text{ ec.}$$
$$A'+B'x+C'x^2+D'x^3+\text{ ec.}$$
$$A''+B''x+C''x^2+D''x^3+\text{ ec.}$$

di cui la prima sia maggiore della seconda, e questa maggiore della terza, e sia $A''=A$, dovrà aversi pure $A'=A$. Infatti sottraendo dalla 1ª la 2ª e da questa la 3ª, avremo le differenze sempre positive

$$(A-A')+(B-B')x+(C-C')x^2+(D-D')x^3+\text{ ec.}$$
$$(A'-A'')+(B'-B'')x+(C'-C'')x^2+(D'-D'')x^3+\text{ ec.}$$

Frattanto si supponga $A'=A\pm d$: queste differenze diverranno

$$\mp d+(B-B')x+(C-C')x^2+(D-D')x^3+\text{ ec.}$$
$$\pm d+(B'-B'')x+(C'-C'')x^2+(D'-D'')x^3+\text{ ec.}$$

Or poichè può sempre darsi ad x un valor tale che il primo termine di queste due differenze superi la somma dei rimanenti (807), è dunque chiaro che esse non po-

tranno risultar sempre positive, o in generale del medesimo segno, se non sia $d=o$, ossia se con $A=A''$, non si abbia anche $A=A'$.

Nel nostro caso le tre espressioni sono 1, $\frac{senx}{x}$, $1-x^2$, delle quali, come abbiamo veduto, la seconda è minore della prima e maggiore della terza. Poichè dunque si ha $\frac{senx}{x}=B-\frac{B^3x^2}{2.3}+$ec., e perciò $A'=B$, ed $A=A''=1$, sarà dunque $B=1$.

809. Avute così l'espressioni del seno e coseno date per l'arco, facilmente si ottengono quelle della tangente e della cotangente. Si ponga al solito $tangx=A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4+$ec. Cangiato x in $-x$ si avrà $tang-x=-tangx$ (790)$=A-Bx+Cx^2-Dx^3+Ex^4-Fx^5+$ec; e sottraendo l'una dall' altra equazione, verrà $tangx=Bx+Dx^3+Fx^5+$ec.$=$(785.4°) $\dfrac{x-\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4.5}x^5-\text{ec.}}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3.4}x^4-\text{ec.}}$; d'onde col solito metodo (422), si otterrà $B=1$, $D=\frac{1}{3}$, ec., e

$$tangx=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{3.5}+\frac{17x^7}{3^2.5.7}+\frac{62x^9}{3^2.5.7.9}+\frac{1382x^{11}}{3^2.5^2.7.9.11}+\text{ec.}$$

In modo analogo a questo, osservando che $cotx=\frac{1}{tangx}$ (785.5°), e usata la nota avvertenza (436.1°), si trova per valore della cotangente, $cotx=\frac{1}{x}-\frac{x}{3}-\frac{x^3}{3^2.5}-\frac{2x^5}{3^3.5.7}-\frac{x^7}{3^3.5^2.7}-$ec.

Si noti 1°, che se x fosse maggior di $90°$ le due ultime formule non si verificherebbero; il che specialmente apparisce nella prima, la quale nè darebbe mai negativa, siccome esser deve in quel caso (793.3°), la tangente, nè al crescer dell' arco la darebbe minore (*ivi* 4°). Ciò mostra che in questo caso la forma generica $tangx=A+Bx+Cx^2+$ec. data in principio alla tangente, non ha più luogo (434). Si supplirà osservando che posto $x=90°+z$, si ha (792.58°) $tangx=-cotz$. Si prenderà dunque dalla seconda il valore di $cotz$, e cambiati i segni avremo quello di $tangx$. L'opposto si praticherà per la cotangente.

2°. In ciascuna delle quattro formule precedenti l'arco x deve supporsi dato in gradi nel primo membro, e in parti di raggio nel secondo; diversamente non vi sarebbe la necessaria

omogeneità fra i due membri, mentre il primo rappresenterebbe una linea, l'altro un numero. Se dunque x non si conosca che in gradi, dovremo in luogo di x sostituire nel secondo membro $\frac{x}{r^{o}}$ (678).

3.° Poichè (788. 38.°) $sen(\omega \pm x) = sen\omega cos x \pm sen x cos\omega$, sostituiti i valori avuti di $sen x$ e di $cos x$, troveremo $sen(\omega \pm x) = sen\omega \pm x cos\omega - \frac{x^2}{2} sen\omega \mp \frac{x^3}{2.3} cos\omega +$ ec., e nel modo stesso $cos(\omega \pm x) = cos\omega \mp x sen\omega - \frac{x^2}{2} cos\omega \pm \frac{x^3}{2.3} sen\omega +$ ec.

810. Le serie nelle quali svolgonsi $sen x$ e $cos x$ (806) si trasformano in modi assai singolari. Si rappresenti la prima con $sen x = x - A'x^3 + A''x^5 -$ ec., l'altra con $cos x = 1 - B'x^2 + B''x^4 -$ ec., e in seguito facciasi $x = \sqrt{\frac{1}{z}}$; avremo $sen\sqrt{\frac{1}{z}} = \sqrt{\frac{1}{z}}\left\{1 - \frac{A'}{z} + \frac{A''}{z^2} - \frac{A'''}{z^3} + \text{ec.}\right\}$; $cos\sqrt{\frac{1}{z}} = 1 - \frac{B'}{z} + \frac{B''}{z^2} - \frac{B'''}{z^3} +$ ec. Si riducano nei due polinomj tutti i termini allo stesso denominatore, supponendo che z^n rappresenti quello dell'ultimo termine. Sarà n infinito, e troveremo

$$sen\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^n\sqrt{z}}\left\{z^n - A'z^{n-1} + \text{ec.}\right\}; \quad cos\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^n}\left\{z^n - B'z^{n-1} + \text{ec.}\right\}.$$

Infine si rappresentino con Z, Z' i due nuovi polinomj, e si ponga $Z = 0$, e $Z' = 0$ per discoprirne i fattori (261). È chiaro che soddisfaranno a queste equazioni, e ne saranno perciò radici, tutti quei valori di z che respettivamente rendono $sen\sqrt{\frac{1}{z}} = 0$, $cos\sqrt{\frac{1}{z}} = 0$. Or la prima di queste due condizioni è soddisfatta dagli infiniti valori di $\sqrt{\frac{1}{z}} = (794.\ 72.°)\pi, = 2\pi, = 3\pi, =$ ec., ossia da $z = \frac{1}{\pi^2}, = \frac{1}{4\pi^2}, = \frac{1}{9\pi^2}, =$ ec.; sarà dunque (260. 261) $Z = \left(z - \frac{1}{\pi^2}\right)\left(z - \frac{1}{4\pi^2}\right)\left(z - \frac{1}{9\pi^2}\right)$ ec., e perciò $sen\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^n\sqrt{z}}\left(z - \frac{1}{\pi^2}\right)\left(z - \frac{1}{4\pi^2}\right)\left(z - \frac{1}{9\pi^2}\right)$ ec., ovvero, distribuendo ciascuno degli infiniti fattori z che sono in z^n fra ciascuno degli infiniti fattori binomj, $sen\sqrt{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}}\left(1 - \frac{1}{\pi^2 z}\right)\left(1 - \frac{1}{4\pi^2 z}\right)\left(1 - \frac{1}{9\pi^2 z}\right)$ ec., e restituito il valor di $z = \frac{1}{x^2}$, avremo finalmente

$$sen x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{25\pi^2}\right) \text{ ec.}$$

In egual modo, l'altra condizione $cos\sqrt{\frac{1}{z}} = 0$ essendo soddisfatta dagli infiniti

valori (794. 76°) $\sqrt{\frac{1}{z}}=\frac{1}{2}\pi, =\frac{3}{2}\pi, =\frac{5}{2}\pi,$ =ec., ossia da $z=\frac{4}{\pi^2}, =\frac{4}{9\pi^2}, =\frac{4}{25\pi^2},$ =ec., sarà $Z'=\left(z-\frac{4}{\pi^2}\right)\left(z-\frac{4}{9\pi^2}\right)\left(z-\frac{4}{25\pi^2}\right)$ec.; d'onde, ragionando ed operando come sopra, trarremo

$$\cos x=\left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{49\pi^2}\right) \text{ ec.}$$

811. Ecco intanto alcune belle proposizioni, che immediatamente si deducono da queste due trasformate. Fatto nella prima $x=\frac{\pi}{2}$, sarà $sen\frac{\pi}{2}=1$ (781. 4.°)$=\frac{\pi}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{15}{16}\times\frac{35}{36}\times\frac{63}{64}\times$ ec., e di qui $\frac{1}{2}\pi=\frac{4.16.36\,64.\text{ ec.}}{3.15.35.63.\text{ ec.}}=\frac{2.2\;4.4\;6.6.8.8.\text{ ec.}}{3\;3.5.5.7.7.9.9.\text{ ec.}}$ espressione singolarissima della quarta parte della circonferenza, trovata da *Wallis*.

812. Fatto $x=\frac{1}{4}\pi=45°$, avremo $2sen x=2sen45°=$(784)$\sqrt{2}=\frac{1}{2}\pi\times\frac{15}{16}\times\frac{63}{64}\times\frac{143}{144}\times\frac{255}{256}\times$ec. $=\frac{1}{2}\pi\times\frac{1.3.5.7.9.11.13.15.17.\text{ec.}}{4.4.8.8.12.12.16.16.\text{ec.}}$; onde, sostituito il valore di $\frac{1}{2}\pi$ già trovato (811), verrà $\sqrt{2}=\frac{2.2\;6.6.10.10\;14.14.\text{ec.}}{1.3.5.7.9.11.13.15.\text{ec.}}$, altro bel teorema d' *Eulero*.

813. Si cangi x in $\frac{x}{\sqrt{-1}}$; la formula diretta del seno (806) darà $sen\frac{x}{\sqrt{-1}}=\frac{x}{\sqrt{-1}}\left(1+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^4}{2\;3.4.5}+\text{ec.}\right)$ e la trasformata (810) $sen\frac{x}{\sqrt{-1}}=\frac{x}{\sqrt{-1}}\times\ldots\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)$ ec. Fatto $x^2=\frac{\pi^2}{z}$, si avrà $1+\frac{\pi^2}{2.3z}+\frac{\pi^4}{2.3.4.5z}+$ec.$=\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+\frac{1}{4z}\right)\left(1+\frac{1}{9z}\right)$ec.; e moltiplicando per z^n, $z^n+\frac{\pi^2}{2.3}z^{n-1}+\frac{\pi^4}{2.3.4.5}\times\ldots z^{n-2}+$ec.$=(z+1)\left(z+\frac{1}{4}\right)\left(z+\frac{1}{9}\right)$ec. Saranno perciò $-1, -\frac{1}{2^2}, -\frac{1}{3^2}, -\frac{1}{4^2}$, ec. le radici dell'equazione infinita $z^n+\frac{\pi^2}{2.3}z^{n-1}+\frac{\pi^4}{2.3.4.5}z^{n-2}+\frac{\pi^6}{2.3.4.5.6.7}\times\ldots z^{n-3}+$ec.$=0$; e quindi le note formule generali dei paragrafi 287 e 288, e meglio ancora le particolari del paragrafo 289 daranno

$$-P_1=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\text{ec.}=\frac{\pi^2}{6};\quad P_2=1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\text{ec.}=\frac{\pi^4}{90};$$

$$-P_3=1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\text{ec.}=\frac{\pi^6}{945};\quad P_4=1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\text{ec.}=\frac{\pi^8}{9450};\ \text{ec.}$$

D'onde si trae come per mezzo della circonferenza rettificata può sempre aversi la somma della serie infinita $1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+$ec.

814. Similmente le formule del coseno, cangiatovi come sopra x in $\frac{x}{\sqrt{-1}}$, ed x^2 in $\frac{1}{4}\pi^2 z$, daranno $1+\frac{\pi^2}{2.4}z+\frac{\pi^4}{2.3.4^3}z^2+$ ec. $=\left(1+z\right)\left(1+\frac{1}{9}z\right)\times\ldots$ $\left(1+\frac{1}{25}z\right)$ ec., e saranno perciò -1, $-\frac{1}{3^2}, -\frac{1}{5^2}$, ec. le radici dell'equazione $1+\frac{\pi^2}{2.4}z+\frac{\pi^4}{2.3.4^3}z^2+$ec. $=0$. Avremo dunque

$$-P_1=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\text{ec.}=\frac{\pi^2}{8}\,;\ P_2=1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\text{ec.}=\frac{1}{96}\pi^4;\ \text{ec.}$$

Potrà perciò sommarsi anche la serie $1+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+$ ec; e quindi anche l'altra $\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+$ec. differenza tra questa e la precedente. Così se $n=1$, avremo $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ ec. $=\frac{\pi^2}{8}$, ed $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+$ec. $=\frac{\pi^2}{24}$.

815. Un' altra trasformazione dei valori di $sen x$ e di $cos x$, più ancor singolare, e d'importanza sommamente maggiore, è la seguente. Se in $e^x=$ (461.2°) $1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^4+$ ec. si ponga prima $x=a\sqrt{-1}$, poi $x=-a\sqrt{-1}$, e quindi si sommino e poi si sottraggano le due serie, avremo

$$e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}=2\left(1-\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{2.3.4}-\frac{a^6}{2.3.4.5.6}+\text{ec.}\right)=(806)\,2\cos a;$$

$$e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}=2\sqrt{-1}\left(a-\frac{a^3}{2.3}+\frac{a^5}{2.3.4.5}-\text{ec.}\right)=2\sqrt{-1}.\operatorname{sen} a.$$

Dunque $\operatorname{sen} a=\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, e $\cos a=\frac{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}{2}$; d'onde ancora $\sqrt{-1}.\ \operatorname{tang} a=\frac{e^{a\sqrt{-1}}-e^{-a\sqrt{-1}}}{e^{a\sqrt{-1}}+e^{-a\sqrt{-1}}}=\frac{e^{2a\sqrt{-1}}-1}{e^{2a\sqrt{-1}}+1}=\frac{1-e^{-2a\sqrt{-1}}}{1+e^{-2a\sqrt{-1}}}$, formule di grand'uso, e fecondissime di conseguenze di cui accenneremo le principali. Ma prima facciamone applicazione alle due belle seguenti ricerche, il che gioverà intanto a meglio farcene apprezzare il valore, e rendercene più familiare il maneggio.

816. Debba in primo luogo sommarsi la serie $s=\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a+2b)+$ec. $+\operatorname{sen}(a+nb)$. Posti per $\operatorname{sen} a$, $\operatorname{sen}(a+b)$, $\operatorname{sen}(a+2b)$, ec. i valori dati dalla prima delle due formule precedenti, e fatto per comodo $a\sqrt{-1}=p$, $b\sqrt{-1}=q$, troveremo $2s\sqrt{-1}=e^p(1+e^q+e^{2q}+e^{3q}+\text{ec.}+e^{nq})-e^{-p}(1+e^{-q}+e^{-2q}+e^{-3q}+$ ec. $e^{-nq})$; ove i fattori polinomj sono manifestamente due progressioni geometriche.

Sommandole mediante la formula $s=\frac{\omega q-a}{q-1}$ (372) avremo $s=\left\{\frac{e^p(e^{(n+1)q}-1)}{e^q-1}-\frac{e^{-p}(e^{-(n+1)q}-1)}{e^{-q}-1}\right\}:2\sqrt{-1}=\left\{\begin{matrix}e^{p+nq}-e^{p+(n+1)q}-e^{p-q}+e^p\\-e^{-(p+nq)}+e^{-(p+(n+1)q)}+e^{-(p-q)}-e^{-p}\end{matrix}\right\}:(2-e^q-e^{-q})2\sqrt{-1}=\frac{sen(a+nb)-sen(a+(n+1)b)-sen(a-b)+sena}{2(1-cosb)}=\ldots$ (796.80^a, 797.89^a) $\frac{-2sen\frac{1}{2}b\,cos(a+(n+\frac{1}{2})b)+2sen\frac{1}{2}b\,cos(a-\frac{1}{2}b)}{4sen^2\frac{1}{2}b}=\ldots\frac{-cos(a+(n+\frac{1}{2})b)+cos(a-\frac{1}{2}b)}{2sen\frac{1}{2}b}=$ (796.82^a) $\frac{sen(a+\frac{1}{2}nb)\,sen\frac{1}{2}(n+1)b}{sen\frac{1}{2}b}$, somma cercata.

817. Cangiato a in $90+a$ otterremo $s=cosa+cos(a+b)+cos(a+2b)\ldots+cos(a+nb)=\frac{cos(a+\frac{1}{2}nb)\,sen\frac{1}{2}(n+1)b}{sen\frac{1}{2}b}$; e se sia $b=a$, ed $n+1=m$, sarà $s=cosa+cos2a+cos3a\ldots+cosma=\frac{cos\frac{1}{2}a(m+1)\,sen\frac{1}{2}am}{sen\frac{1}{2}a}$. Pongasi $am=2\pi$, e perciò $a=\frac{2\pi}{m}$, sarà $sen\frac{1}{2}am=sen\pi=0$, e quindi $cos\frac{2\pi}{m}+cos\frac{4\pi}{m}+cos\frac{6\pi}{m}+ec\ldots+cos2\pi=0$; ovvero, poichè $cos2\pi=1$, $cos\frac{2\pi}{m}+cos\frac{4\pi}{m}+\ldots cos\frac{6\pi}{m}+ec\ldots+cos\frac{(m-1)2\pi}{m}=-1$; ma ($794.69^a$) $cos\frac{m-1}{m}2\pi=cos\frac{2\pi}{m}$, $cos\frac{m-2}{m}2\pi=cos\frac{4\pi}{m}$, ec. dunque se m è impari, presa la serie fino alla metà, o fino al termine $cos\frac{m-1}{2m}2\pi$, si avrà $cos\frac{2\pi}{m}+cos\frac{4\pi}{m}+cos\frac{6\pi}{m}+ec\ldots\ldots+cos\frac{m-1}{2m}2\pi=-\frac{1}{2}$. Se poi m è pari, e quindi impari il numero dei termini della serie, siccome in tal caso il termine medio sarebbe $cos\frac{m}{2m}2\pi=cos\pi=-1$, così presa la serie fino al termine precedente, ossia fino a $cos(\frac{m}{2}-1)\frac{2\pi}{m}$, si avrà $cos\frac{2\pi}{m}+cos\frac{4\pi}{m}+cos\frac{6\pi}{m}+ec\ldots+cos\frac{m-2}{2m}2\pi=0$.

818. Di quì si ha il modo di inscriver geometricamente in un circolo dato un poligono regolare di 17 lati (609). Si faccia $m=17$; sarà $\frac{2\pi}{m}=\frac{2\pi}{17}$ l' arco sotteso dal lato di questo poligono; chiamatolo φ, avremo (817) $cos\varphi+cos2\varphi+cos3\varphi+cos4\varphi+cos5\varphi+cos6\varphi+cos7\varphi+cos8\varphi=-\frac{1}{2}$. Si ponga 1ª. $cos\varphi+cos4\varphi=p$; 2ª. $cos2\varphi+cos8\varphi=q$; 3ª. $cos3\varphi+cos5\varphi=r$; 4ª. $cos6\varphi+cos7\varphi=s$. Moltipli-

cando le prime due troveremo $pq=$

$$(\cos\varphi+\cos4\varphi)(\cos2\varphi+\cos8\varphi)=\begin{cases}\cos\varphi\cos2\varphi\\ +\cos\varphi\cos8\varphi\\ +\cos4\varphi\cos2\varphi\\ +\cos4\varphi\cos8\varphi\end{cases}=(795.78^a)\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos3\varphi\\ +\frac{1}{2}\cos7\varphi+\frac{1}{2}\cos9\varphi\\ +\frac{1}{2}\cos2\varphi+\frac{1}{2}\cos6\varphi\\ +\frac{1}{2}\cos4\varphi+\frac{1}{2}\cos12\varphi\end{cases}$$

cioè, riflettendo che $\cos12\varphi=\cos(17\varphi-5\varphi)=\cos(2\pi-5\varphi)=(792.57^a)=\cos5\varphi$, e $\cos9\varphi=\cos(17\varphi-8\varphi)=\cos(2\pi-8\varphi)=\cos8\varphi$, $pq=\frac{1}{2}(\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cos4\varphi+\cos5\varphi+\cos6\varphi+\cos7\varphi+\cos8\varphi)$; e perciò 5^a. $pq=-\frac{1}{4}$. Nel modo stesso, e con analoghe riflessioni, troveremo 6^a. $rs=-\frac{1}{4}$, 7^a. $(p+q)(r+s)=-1$. Frattanto poichè si ha pure 8^a. $p+q+r+s=-\frac{1}{2}$, è manifesto che da queste ultime quattro equazioni, niuna delle quali eccede il secondo grado, potranno aversi i valori delle quattro incognite p,q,r,s. Per l'intento nostro non abbisogneranno però che quelli di p ed r. A tale effetto, osserveremo che dall' 8^a. si ha $(p+q)^2+2(p+q)(r+s)+(r+s)^2=\frac{1}{4}$, equazione che la 7^a. riduce a $(p+q)^2+(r+s)^2=\frac{9}{4}$; e se da questa per mezzo dell' 8^a. si elimini $r+s$, avremo $p+q=-\frac{1}{4}\pm\sqrt{(1+\frac{1}{16})}$; e quindi $r+s=-\frac{1}{4}\mp\sqrt{(1+\frac{1}{16})}$. Costruito il radicale (685), ed eguagliatolo ad a, i segni di sopra daranno $p+q=-\frac{1}{4}+a$, $r+s=-\frac{1}{4}-a$. Moltiplichiamo la prima di quest' equazioni per p, l'altra per r, e introduciamo i valori di pq, rs presi dalla 5^a e 6^a; troveremo . . . .

$$p=\tfrac{1}{2}(a-\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+(a-\tfrac{1}{4})^2)},\quad r=-\tfrac{1}{2}(a+\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{2}\sqrt{(1+(a+\tfrac{1}{4})^2)}.$$

Si conoscon dunque, e posson coi noti metodi costruirsi p, ed r. Frattanto poichè dalla 3^a. abbiamo $r=\cos3\varphi+\cos5\varphi=(796.81^a.)\ 2\cos\varphi\cos4\varphi$, se questo valore s' introduca nella 1^a. moltiplicata per $\cos\varphi$, avremo $\cos^2\varphi+\frac{1}{2}r=p\cos\varphi$, equazione che risoluta darà $\cos\varphi=\frac{1}{2}p\pm\frac{1}{2}\sqrt{(p^2-2r)}$, che pure potrà costruirsi. Dopo di che elevato il seno corrispondente al trovato $\cos\varphi$, resterà così determinata l' ampiezza dell' arco φ, la cui corda sarà il lato del poligono richiesto.

È chiaro che tutto il segreto, per dir così, di questa soluzione dipende dalla composizione dell' equazioni 1^a. 2^a. 3^a. e 4^a. I principj che vi conducono derivano da un' analisi assai più sublime, che forma il soggetto d' un' insigne Opera di *Gauss*, intitolata *Disquisitiones numerorum*. Qui non possiamo altro osservare se non che essendo, come abbiamo veduto di sopra, $\cos5\varphi=\cos12\varphi$, ed avendosi di più $\cos7\varphi=\cos(24\varphi-17\varphi)=\cos(24\varphi-2\pi)=\cos24\varphi$, gli otto coseni posson riguardarsi come distribuiti in maniera tale nelle quattro equazioni, che in ciascuna l' arco spettante al secondo coseno sia quadruplo di quello spettante al primo. Ciò gioverà a meglio fissare l' idea sul modo col quale si compongono le quattro equazioni.

819. Debba in secondo luogo sommarsi la serie $s=b\,\mathrm{sen}\,a-\frac{1}{2}b^2\mathrm{sen}\,2a+\frac{1}{3}b^3\mathrm{sen}\,3a-\frac{1}{4}b^4\mathrm{sen}\,4a+$ec. Operando in principio come sopra (816), e ponendo $a\sqrt{-1}=p$ troveremo $2s\sqrt{-1}=be^{p}-\frac{1}{2}b^2e^{2p}+\frac{1}{3}b^3e^{3p}-$ec. $-$ . . . . $(be^{-p}-\frac{1}{2}b^2e^{-2p}+\frac{1}{3}b^3e^{-3p}-$ec.$)=(455)\ l(1+be^{p})-l(1+be^{-p})$. Ma . .

$2s\sqrt{-1} = 2s\sqrt{-1} \times le = le^{2s\sqrt{-1}}$; dunque sostituendo e togliendo i logaritmi, $e^{2s\sqrt{-1}} = \frac{1+be^{p}}{1+be^{-p}}$. Si moltiplichi ora tutta l' equazione per e^{-p}, e si ponga $b = \frac{1+m}{1-m}$, e $2s\sqrt{-1}-p = 2x\sqrt{-1}$; avremo $e^{2x\sqrt{-1}} = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{1+e^{-p}+m(1-e^{-p})}{1+e^{-p}-m(1-e^{-p})}$; d' onde $(e^{2x\sqrt{-1}}-1)(1+e^{-p}) = m(e^{2x\sqrt{-1}}+1)\times$ $(1-e^{-p})$. Di qui $\frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1} = m\left(\frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}\right) = m\left(\frac{e^{p}-1}{e^{p}+1}\right) = \ldots\ldots$ $m\left(\frac{e^{a\sqrt{-1}}-1}{e^{a\sqrt{-1}}+1}\right)$; ossia (815) $tang x = m\, tang \frac{1}{2}a$, e riponendo i valori di x ed m, $tang(s-\frac{1}{2}a) = \frac{b-1}{b+1} tang \frac{1}{2}a$.

820. Se $b=1$, sarà $tang(s-\frac{1}{2}a) = 0$; e quindi $s = \frac{1}{2}a$, dal che avremo dunque $sen a - \frac{1}{2} sen 2a + \frac{1}{3} sen 3a - \frac{1}{4} sen 4a + \frac{1}{5} sen 5a - ec. = \frac{1}{2}a$; e se si cangi a in $\pi - a$, otterremo (794) $sen a + \frac{1}{2} sen 2a + \frac{1}{3} sen 3a + \frac{1}{4} sen 4a + ec. = \frac{1}{2}(\pi - a)$; serie che sommate daranno $sen a + \frac{1}{3} sen 3a + \frac{1}{5} sen 5a + ec. = \frac{1}{4}\pi$. Che se il cangiamento di a in $\pi - a$ si faccia nella serie generale proposta, avremo $s = b sen a + \frac{1}{2} b^2 sen 2a + \frac{1}{3} b^3 sen 3a + ec.$; e $tang(s - \frac{1}{2}(\pi - a)) = \frac{b-1}{b+1} cot \frac{1}{2}a$, e cangiati i segni $tang(\frac{1}{2}(\pi - a) - s) = \frac{1-b}{1+b} cot \frac{1}{2}a$, formula che confrontata con l' altra (842) $tang \frac{1}{2}(a' - a'') = \frac{1-g'':g'}{1+g'':g'} cot \frac{1}{2}a$, darà $\frac{1}{2}(\pi - a) - s = \frac{1}{2}(a' - a'')$, e quindi $s = \frac{1}{2}(\pi - a - a' + a'')$. Ma $\pi - a - a' = a''$, (566) dunque $s = a''$, cioè s eguaglierà il valore dell' angolo a'' opposto al minor lato g''. Avremo dunque per quest' angolo, $a'' = b sen a + \frac{1}{2} b^2 sen 2a + \frac{1}{3} b^3 sen 3a + ec.$ ove b rappresenterà il rapporto $g'' : g'$ dei due lati che comprendono l' angolo a.

821. Nel modo stesso può sommarsi la serie $s = b cos a - \frac{1}{2} b^2 cos 2a + \frac{1}{3} b^3 cos 3a - ec.$; poichè introdotti per $cos a, cos 2a$, ec. i loro valori, otterremo $2s = be^{p} - \ldots$ $\frac{1}{2} b^2 e^{2p} + \frac{1}{3} b^3 e^{3p} - ec. + be^{-p} - \frac{1}{2} b^2 e^{-2p} + \frac{1}{3} b^3 e^{-3p} - ec. = l(1+be^{p}) + l(1+be^{-p}) = l(1+be^{p})(1+be^{-p}) = l(1+b^2+b(e^{p}+e^{-p})) = l(1+b^2+2b cos a)$. Quindi se $b=1$ avremo $cos a - \frac{1}{2} cos 2a + \frac{1}{3} cos 3a - \frac{1}{4} cos 4a + ec. =$ (797 88[a]) $\frac{1}{2} l(2 cos \frac{1}{2}a)^2 = l 2 cos \frac{1}{2}a$. Cangiato a in $\pi - a$, avrassi $cos a + \frac{1}{2} cos 2a + \frac{1}{3} cos 3a +$

$\frac{1}{4}\cos 4a + \text{ec.} = -l 2\,\text{sen}\,\frac{1}{2}a$, e sommate le due serie, $\cos a + \frac{1}{3}\cos 3a + \frac{1}{5}\cos 5a + \text{ec.} = \frac{1}{2} l \cot \frac{1}{2}a$. Ma ritorniamo ormai alle due formule primitive (815).

822. Poichè dalle medesime viene $e^{\pm a\sqrt{-1}} = \cos a \pm \sqrt{-1} \times \text{sen}\,a = \cos a (1 \pm \sqrt{-1}.\,\text{tang}\,a)$, e presi i logaritmi, $\pm a\sqrt{-1} = l\cos a + l(1 \pm \sqrt{-1}.\,\text{tang}\,a)$, si avrà sottraendo $2a\sqrt{-1} = l\frac{1+\sqrt{-1}.\,\text{tang}\,a}{1-\sqrt{-1}.\,\text{tang}\,a}$, e (455) $a = \text{tang}\,a - \frac{\text{tang}^3 a}{3} + \frac{\text{tang}^5 a}{5} - \text{ec.}$ serie che rettifica la semicirconferenza π. Infatti posto $a = 45° = \frac{\pi}{4}$, sarà $\text{tang}\,a = 1$ (781. 3.°), ed avremo $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{ec.}$ valore di cui abbiamo anticipatamente già fatto qualche uso (97).

Come per altro questa serie è pochissimo convergente, miglior partito sarà di cercare il valor di $\frac{\pi}{4}$ nel modo che segue. S'immaginino due archi a, b tali che sia $\text{tang}\,a = \frac{1}{5}$, e $b = 4a - 45°$. Sarà $\text{tang}\,b = \frac{-1+\text{tang}\,4a}{1+\text{tang}\,4a}$ (799. 105.ª); e poichè (791. 44.ª) $\text{tang}\,4a = \frac{2\,\text{tang}\,2a}{1-\text{tang}^2 2a}$, e $\text{tang}\,2a = \frac{2\,\text{tang}\,a}{1-\text{tang}^2 a} = \frac{5}{12}$, d'onde $\text{tang}\,4a = \frac{120}{119}$; si avrà dunque sostituendo $\text{tang}\,b = \frac{1}{239}$. Ora con questo valore la formula superiore dà $b = \frac{1}{239}\left\{1 - \frac{1}{3.239^2} + \frac{1}{5.239^4} - \text{ec.}\right\}$, e con $\text{tang}\,a = \frac{1}{5}$ dà

$$a = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3.5^2} + \frac{1}{5.5^4} - \text{ec.}\right) = \frac{1}{5}\left(1 - \frac{1}{3}.\,0{,}04 + \frac{1}{5}.\,0{,}04^2 - \frac{1}{7}.\,0{,}04^3 + \text{ec.}\right);$$

dunque $4a - b = \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{239}\left(1 - \frac{1}{3.57121} + \frac{1}{5.57121^2} - \frac{1}{7.57121^3} + \text{ec.}\right) + \frac{4}{5} \times \left(1 - \frac{1}{3}.\,0{,}04 + \frac{1}{5}.\,0{,}04^2 - \frac{1}{7}.\,0{,}04^3 + \text{ec.}\right)$.

823. Siccome (787. 18.ª) $\text{tang}\,a = \frac{\text{sen}\,a}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 a)}}$, fatto $\text{sen}\,a = y$, avremo

$$\begin{aligned}
\text{tang}\,a &= y(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} = (216)\; y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{2.4}y^5 + \frac{3.5}{2.4.6}y^7 + \frac{3.5.7}{2.4.6.8}y^9 + \text{ec.} \\
-\frac{1}{3}\text{tang}^3 a &= -\frac{1}{3}y^3(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^5 - \frac{5}{2.4}y^7 - \frac{5.7}{2.4.6}y^9 - \text{ec.} \\
+\frac{1}{5}\text{tang}^5 a &= \frac{1}{5}y^5(1-y^2)^{-\frac{5}{2}} = +\frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{2}y^7 + \frac{7}{2.4}y^9 + \text{ec.} \\
-\frac{1}{7}\text{tang}^7 a &= -\frac{1}{7}y^7(1-y^2)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{1}{7}y^7 - \frac{1}{2}y^9 - \text{ec.} \\
+\frac{1}{9}\text{tang}^9 a &= \frac{1}{9}y^9(1-y^2)^{-\frac{9}{2}} = +\frac{1}{9}y^9 + \text{ec.} \\
-\text{ec.} &\qquad -\text{ec.} \qquad\qquad -\text{ec.}
\end{aligned}$$

e quindi sommando, riponendo il valor di $y = sen a$, e osservando che il primo membro della somma è eguale ad a (822), troveremo $a = sen a + \frac{1}{2.3} sen^3 a + \frac{3}{2.4.5} sen^5 a + \frac{3.5}{2.4.6.7} sen^7 a + \frac{3.5.7}{2.4.6.8.9} sen^9 a +$ ec. serie che dà l'arco per le potenze del seno, come l'altra lo dava per le potenze della tangente. Cangiando poi nell'una e nell'altra a in $\frac{1}{2}\pi - a$, avremo l'arco dato per le potenze del coseno, e per quelle della cotangente.

Si noti che queste formule suppongono al solito il raggio 1. Se il raggio è r, l'arco diverrà r volte maggiore (623), ed avremo $a = r(sen a + \frac{sen^3 a}{2.3} + \frac{3 sen^5 a}{2.4.5} +$ ec.) ove $sen a$ dovrà prendersi, come per l'avanti, nel circolo del raggio 1. Or si ponga $b = r sen a$, seno dell'arco a nel circolo del raggio r (782), e si chiami a' l'arco che nel circolo del raggio 1 ha per seno b. Avremo $a = b + \frac{b^3}{2.3 r^2} + \frac{3 b^5}{2.4.5 r^4} +$ ec. ed $a' = b + \frac{b^3}{2.3} + \frac{3 b^5}{2.4.5} +$ ec. e sarà a minore o maggiore di a', secondo che il raggio r sarà maggiore o minore del raggio 1. Di qui facilmente s'inferirà che *di due archi che in circoli differenti hanno uno stesso seno, o son sottesi da una stessa corda, quello è men lungo che appartiene al circolo di raggio maggiore.*

824. Riprendiamo adesso le formule (822) $e^{\pm a\sqrt{-1}} = cos a \pm \sqrt{-1}.sen a$, e si ponga 1.° $a = 2n\pi$; 2.° $a = (2n+1)\pi$; 3.° $a = (2n+\frac{1}{2})\pi$. Sarà (794. 73.°) nel primo caso $cos a = 1$, $sen a = 0$, ed $e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}} = 1$; nel secondo $cos a = -1$, $sen a = 0$, ed $e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$; nel terzo $cos a = 0$, $sen a = 1$, ed $e^{\pm(2n+\frac{1}{2})\pi\sqrt{-1}} = \pm\sqrt{-1}$. Se queste tre equazioni s'inalzano alla potenza $\sqrt{-1}$, risulterà $1^{\sqrt{-1}} = e^{\mp 2n\pi}$, $(-1)^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2n+1)\pi}$, $(\pm\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{\mp(2n+\frac{1}{2})\pi}$, valori tutti reali, infiniti di numero ed inattesi.

825. Se alle due formule 1.ª $e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}} = 1$, 2.ª $e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}} = -1$ si applicano i logaritmi iperbolici, la 1.ª darà $\pm 2n\pi\sqrt{-1} = L1$; il che mostra che l'unità oltre lo zero (444. 1.°) ha un'infinità di logaritmi tutti peraltro immaginarj; come del pari oltre un logaritmo reale, altri infiniti e immaginarj ne ha qualunque altra quantità b, giacchè $lb = lb \times 1 = lb + l1$. Dalla 2.ª fatto $n = 0$, si trae $\pm\pi\sqrt{-1} = log -1$; e di qui $1 : \pi :: \sqrt{-1} : log -1$, celebre analogia di Giovanni Bernoulli, dalla quale vien dato il rapporto del raggio alla semicirconferenza espresso da termini ambedue immaginarj (444. 6.°) ma finiti.

826. Poichè $e^{\pm 2n\pi\sqrt{-1}}=1$, ed $e^{\pm(2n+1)\pi\sqrt{-1}}=-1$, sarà I^a. $\sqrt[m]{1}=e^{\pm\frac{2n\pi}{m}\sqrt{-1}}=\cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\times \text{sen}\,\frac{2n\pi}{m}$, e II^a. $\sqrt[m]{-1}=e^{\pm\left(\frac{2n+1}{m}\right)\pi\sqrt{-1}}=\cos\frac{2n+1}{m}\pi\pm\sqrt{-1}\times \text{sen}\,\frac{2n+1}{m}\pi$, formule che, posto successivamente $n=0$, $=1$, $=2$, ec. daranno tutte le radici m^{sime} dell'unità positiva e negativa, che non poterono aversi con l'algebra comune (311). E quì fermandoci a considerare la I^a. si noterà 1°. che se, dopo aver posti per n tutti i numeri interi da 0 fino ad $m-1$, si proseguano le sostituzioni ed i calcoli, torneranno sempre e con l'ordine stesso gli m valori primitivamente ottenuti. Infatti ponendo $n=m$, $=2m$, $=3m$, ec., e in generale $n=mp$, multiplo qualunque di m, è chiaro per le note formule (794. 72^a. 73^a.) che si otterrà sempre 1, come da $n=0$. Ponendo poi $n=mp+1$, $=mp+2$, ec., e in generale $n=mp+r$ espressione di qualunque numero maggiore, ma non multiplo di m (41), e nella quale si ha necessariamente $r<m$, avremo $\cos\frac{2n\pi}{m}=\cos\left(2p\pi+\frac{2r\pi}{m}\right)=(794.69^a)\cos\frac{2r\pi}{m}$, e $\text{sen}\,\frac{2n\pi}{m}=\text{sen}\left(2p\pi+\frac{2r\pi}{m}\right)=\text{sen}\frac{2r\pi}{m}$, precisamente come dal porre $n=r$, ossia dal porre per n quello dei numeri primitivi minori di m che corrisponde ad r. È dunque chiaro che nè da $n=mp$, nè da $n=mp+r$ potrà mai aversi verun nuovo valore.

Di più se preso $n<m$, si faccia $n=m-r$, avremo $\cos\frac{2n\pi}{m}=\cos(2\pi-\frac{2r\pi}{m})=(794.69^a)\cos\frac{2r\pi}{m}$; $\text{sen}\frac{2n\pi}{m}=\text{sen}(2\pi-\frac{2r\pi}{m})=(794.68^a)-\text{sen}\,\frac{2rp}{m}$; e quindi il segno inferiore darà $\sqrt[m]{1}=\cos\frac{2r\pi}{m}+\sqrt{-1}.\,\text{sen}\frac{2r\pi}{m}$, valore identico a quello che dà il segno superiore con $n=r$. Dal segno inferiore otterremo dunque in ordine inverso le stesse radici che dal superiore, in modo cioè che l'ultime date dall'uno coincideranno con le prime date dall'altro, e reciprocamente; onde neppur valutando i due segni, potremo aver dalla formula più che i soliti m valori, o le solite m radici m^{sime} dell'unità. Avuta poi dal segno superiore la prima metà di queste radici, è chiaro che con gli stessi valori di n avremo la metà rimanente dall'inferiore; di modo che facendo uso insieme dell'uno e dell'altro, i valori numerici da sostituirsi in luogo di n, potranno ristringersi fino ad $\frac{1}{2}m$ se m è pari, o fino ad $\frac{1}{2}(m-1)$ se è impari.

È infine da notarsi che a riserva della radice data da $n=0$, e di quella data da $n=\frac{1}{2}m$ quando m è pari, la formula dà immaginarie tutte le rimanenti. Eguali riflessioni potranno farsi sull'altra formula, se non che da questa si ha una sola

radice reale quando m è impari, data da $2n+1=m$. Quindi se m è pari tutte le radici m^{sime} di -1 saranno immaginarie. Tutto ciò è conforme a quanto si vide altrove (305 e *segg.*).

827. Siamo adesso in grado di risolver generalmente l'equazione a due termini (304) $x^m \mp 1=0$, o l'altra più generale $x^m \mp a^m=0$; poichè traendosi da quest'ultima $x=\sqrt[m]{\pm a^m}=\sqrt[m]{a^m}\times\sqrt[m]{\pm 1}=a\sqrt[m]{\pm 1}$, posti i trovati valori di $\sqrt[m]{\pm 1}$, avremo per l'equazione col segno superiore $x=a\left\{cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\frac{2n\pi}{m}\right\}$, e per quella col segno inferiore $x=a\left\{cos\frac{2n+1}{m}\pi\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,\frac{2n+1}{m}\pi\right\}$. Di qui i fattori generici di primo grado $x-a\left\{cos\frac{2n\pi}{m}\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\frac{2n\pi}{m}\right\}$ per la prima equazione, ed $x-a\left\{cos\frac{2n+1}{m}\pi\pm\sqrt{-1}\,.\,sen\,\frac{2n+1}{m}\pi\right\}$ per la seconda. Respettivamente moltiplicandogli, avremo i fattori quadratici $x^2-2axcos\,\frac{2n\pi}{m}+a^2$ per l'una, $x^2-2axcos\,\frac{2n+1}{m}\pi+a^2$ per l'altra; e nei primi potremo dare a $2n$ tutti i valori pari 0, 2, 4, ec. fino ad m inclusivamente se m è pari, o fino ad $m-1$ se m è impari; nei secondi potremo dare a $2n+1$ tutti i valori impari 1, 3, 5, ec. fino ad $m-1$, se m è pari, o fino ad m se m è impari. Dando a $2n$, o a $2n+1$ valori più grandi si dimostrerebbe, come sopra, che tornerebbero i fattori già precedentemente comparsi. Si avverta però che dovran ridursi ai fattori semplici $x-a$, $x+a$ i fattori quadratici $(x-a)^2$, $(x+a)^2$ che per la prima equazione risulterebbero l'uno dal porre $2n=0$ qualunque siasi m, l'altro dal porre $2n=m$, quando m è pari. Poichè non avendo l'equazione che una sola radice eguale ad a, e nel caso di m pari un'altra, ma unica eguale a $-a$ (305. *e segg.*), non può dunque aver due fattori eguali ad $x-a, x+a$. Nel modo stesso e per la stessa ragione si ridurrà ad $x+a$ il fattore $(x+a)^2$ che per la seconda equazione risulterebbe dal porre $2n+1=m$ nel caso di m dispari.

828. Da tutto ciò si raccoglie che riponendo per semplicità maggiore 1 in luogo di a, avremo nel caso di m pari, I°. $x^m-1=$

$$(x-1)(x^2+1-2xcos\,\frac{2\pi}{m})(x^2+1-2xcos\frac{4\pi}{m})\,.\,.\,(x^2+1-2xcos\,\frac{m-2}{m}\pi)\,(x+1)$$

II°. $x^m+1=(x^2+1-2xcos\frac{\pi}{m})(x^2+1-2xcos\frac{3\pi}{m}).\,.\,.(x^2+1-2xcos\,\frac{m-1}{m}\pi)$;

e nel caso di m impari III°. $x^m-1=$

$$(x-1)(x^2+1-2xcos\frac{2\pi}{m})(x^2+1-2xcos\frac{4\pi}{m}).\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x^2+1-2xcos\,\frac{m-1}{m}\,\pi)$$

IV°. $x^m+1=$

$$(x^2+1-2x\cos\frac{\pi}{m})(x^2+1-2x\cos\frac{3\pi}{m})\ldots\ldots(x^2+1-2x\cos\frac{m-2}{m}\pi)(x+1).$$

E la I^a. avrà nel secondo membro $\frac{m-2}{2}$ fattori quadratici trinomj, che uniti al fattore binomio e parimente quadratico x^2-1, darà luogo al numero completo degli $\frac{m}{2}$ fattori quadratici competenti ad un' equazione del grado m con m pari. La seconda avrà $\frac{m}{2}$ fattori quadratici tutti trinomj; le due ultime avranno $\frac{m-1}{2}$ fattori trinomj quadratici, che come sappiamo sono i soli competenti ad un' equazione del grado m quando m è impari, ed in oltre un fattore binomio di primo grado.

Or si divida la I^a. per x^2-1, e quindi si ponga $x=1$. Il primo membro diverrà primieramente $\frac{x^m-1}{x^2-1}$, espressione che $x=1$ cangia in (176.II) $\frac{1}{2}m$. Avremo pertanto $\frac{1}{2}m=(2-2\cos\frac{2\pi}{m})(2-2\cos\frac{4\pi}{m})(2-2\cos\frac{6\pi}{m})\ldots(2-2\cos\frac{m-2}{m}\pi)$; ma in generale (797.89^a) $2-2\cos p=2^2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}p$, dunque introdotti i valori dati da questa relazione, e rammentandoci che i fattori del secondo membro sono $\frac{m-2}{2}$, incontreremo facilmente la rimarchevole espressione

V^a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\times\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\times\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\times\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{m-2}{2m}\pi=\sqrt{\frac{m}{2^{m-1}}}$, che sussiste con m pari, e di più >2; poichè diversamente non avrebber luogo nella I^a i fattori trinomiali, nè in conseguenza potrebbesi istituire il calcolo precedente.

Posto del pari $x=1$, la II^a. darà immediatamente

$$2=(2-2\cos\frac{\pi}{m})(2-2\cos\frac{3\pi}{m})(2-2\cos\frac{5\pi}{m})\ldots(2-2\cos\frac{m-1}{m}\pi),$$ e cangiati come sopra i coseni in seni, avremo

VI^a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\times\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2m}\times\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2m}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{m-1}{2m}\pi=\sqrt{\frac{1}{2^{m-1}}}$, espressione che avrà luogo con m pari e qualunque, purchè intero, non militando quì le ragioni che nel caso precedente hanno esclusi i valori di m non maggiori di 2.

La III^a. divisa per $x-1$, e postovi come nelle precedenti $x=1$, cangerà in m il suo primo membro, e darà in seguito

VII^a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{m}\times\operatorname{sen}\frac{2\pi}{m}\times\operatorname{sen}\frac{3\pi}{m}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{m-1}{2m}\pi=\sqrt{\frac{m}{2^{m-1}}}$.

La IV^a. infine con $x=1$ darà immediatamente

VIII^a. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2m}\times\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2m}\times\operatorname{sen}\frac{5\pi}{2m}\ldots\ldots\operatorname{sen}\frac{m-2}{2m}\pi=\sqrt{\frac{1}{2^{m-1}}}$; e in ambedue quest' ultime dovrà essere m dispari, e per ragioni consimili a quelle già portate di sopra, >1.

Finalmente ridotti gli archi della V^a. e VII^a. al denominatore $2m$, e quindi moltiplicata la V^a. per la VI^a. ovvero la VII^a. per l' VIII^a., avremo in ambedue i casi

IX^a. $sen\frac{\pi}{2m} \times sen\frac{2\pi}{2m} \times sen\frac{3\pi}{2m} \times sen\frac{4\pi}{2m} \times \ldots sen\frac{m-1}{2m}\pi = \frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$, che avrà luogo tanto per m pari, che per m dispari, purchè >1. Così posto $m=6$, nel qual caso $\frac{\pi}{2m}=15^\circ$, $\frac{2\pi}{2m}=30^\circ$, $\frac{3\pi}{2m}=45^\circ$, $\frac{4\pi}{2m}=60^\circ$, $\frac{5\pi}{2m}=75^\circ$, sarà $sen 15^\circ \times sen 30^\circ \times sen 45^\circ \times sen 60^\circ \times sen 75^\circ = \frac{1}{32}\sqrt{6}$. Ed infatti $sen 15^\circ = (797.90^a) \sqrt{\frac{1-cos 30^\circ}{2}} = (784) \sqrt{\frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$; $sen 30^\circ = \frac{1}{2}$; $sen 45^\circ = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $sen 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$; $sen 75^\circ = cos 15^\circ = \sqrt{(1 - \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2})} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2}}$, onde calcolando $sen 15^\circ \times sen 30^\circ \times sen 45^\circ \times \ldots sen 60^\circ \times sen 75^\circ = \frac{1}{32}\sqrt{6}$, precisamente come sopra.

829. I fattori quadratici $x^2 - 2axcos\frac{2n\pi}{m} + a^2$, $x^2 - 2axcos\frac{2n+1}{m}\pi + a^2$, corrispondono al quadrato del lato di un triangolo, i cui due lati rimanenti sieno l'uno x, l'altro a, e contengano fra di loro o l'angolo $\frac{2n\pi}{m}$, o l'altro $\frac{2n+1}{m}\pi$

F.112. (842). Abbiasi dunque il circolo $AA'BB'CC'$ ec. del raggio $AK=a$, e se ne divida la circonferenza nelle $2m$ parti eguali AA', $A'B$, BB', $B'C$, CC', ec.; se a ciascun punto di divisione si conducano i raggi KA', KB, KB', KC, ec., e da un punto qualunque O, preso o dentro o fuori del circolo nella direzione del diametro AS ad una distanza $OK=x$ dal centro K, si conducan le rette OA', OB, OB', OC, OC', ec. avremo primieramente gli angoli $AKA' = \frac{\pi}{m}$, $AKB = \frac{2\pi}{m}$, $AKB' = \frac{3\pi}{m}$, $AKC = \frac{4\pi}{m}$, ec., e quindi $A'O^2 = x^2 - 2axcos\frac{\pi}{m} + a^2$, $BO^2 = x^2 - \ldots 2axcos\frac{2\pi}{m} + a^2$, $B'O^2 = x^2 - 2axcos\frac{3\pi}{m} + a^2$, $CO^2 = x^2 - 2axcos\frac{4\pi}{m} + a^2$, $\ldots$ $C'O^2 = x^2 - 2axcos\frac{5\pi}{m} + a^2$, ec. Saranno dunque (828.II^a) $A'O^2$, $B'O^2$, $C'O^2$, ec. i fattori quadratici della funzione $x^m + a^m$, ossia $OK^m + AK^m$, ed avremo perciò $OK^m + AK^m = A'O^2 \times B'O^2 \times C'O^2 \times$ ec. Saranno in oltre OB^2, OC^2, OD^2, ec. i fattori quadratici trinomj di $x^m - a^m$ (828.I^a), o più in generale di $\pm x^m \mp a^m$, e quindi di $\pm OK^m \mp AK^m$. Sarà di più $OS = x + a$, $AO = \pm x \mp a$, preso il segno di sopra quando il punto O è fuori del circolo. Avremo dunque $AO \times OS = \pm x^2 \mp a^2$, e quindi $OK^m - AK^m = AO \times OS \times OB^2 \times OC^2$ ec., proprietà insigne del circolo, conosciuta col nome di Teorema di *Cotes*.

830. Abbiansi l'espressioni, 1^a. $b^{\pm x\sqrt{-1}}$; 2^a. $L(a \pm b\sqrt{-1})$; 3^a. $(a \pm b\sqrt{-1})^m$;

4ª. $\sqrt[m]{(a\pm b\sqrt{-1})}$. Eguagliata la 1ª. ad $e^{\pm z\sqrt{-1}}$ ed applicati i logaritmi iperbolici, avremo (444.2°) $\pm z = xlb$; e poichè $e^{\pm z\sqrt{-1}} = cosz \pm \sqrt{-1}.senz$, sarà dunque $b^{\pm x\sqrt{-1}} = cosxlb \pm \sqrt{-1}.senxlb$. Posto nella 2ª. $b = atangh$, avremo $L(a\pm b\sqrt{-1}) = La(1\pm\sqrt{-1}.tangh) = La + L(1\pm\sqrt{-1}.tangh) =$ (822) $La \pm h \times \sqrt{-1} - Lcosh = L\frac{a}{cosh} \pm h\sqrt{-1}$. Ma $b = a\,tangh$ dà $cosh = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$, dunque $L(a\pm b\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}L(a^2+b^2) \pm h\sqrt{-1}$. Medesimamente posto nella 3ª. $b = a\,tangh$, avremo $(a\pm b\sqrt{-1})^m = a^m(1\pm\sqrt{-1}.\,tangh)^m =$ (822) $\frac{a^m}{cos^m h}e^{\pm mh\sqrt{-1}}$ $= \frac{a^m}{cos^m h}(cosmh \pm \sqrt{-1}.senmh) = \sqrt{(a^2+b^2)^m}(cosmh \pm \sqrt{-1}.senmh)$. Cangiato m in $\frac{1}{m}$ avremo per la 4ª. $\sqrt[m]{(a\pm b\sqrt{-1})} = \sqrt[2m]{(a^2+b^2)}(cos\frac{h}{m} \pm \sqrt{-1}.sen\frac{h}{m})$.

Tutto ciò mostra che qualunque espressione algebrica, benchè irrazionale, logaritmica, o esponenziale, qualora sia mista di quantità in parte reali, e in parte immaginarie, può sempre ridursi alla forma $A \pm B\sqrt{-1}$; Teorema di *D'Alembert.*

831. Poichè da $e^{\pm a\sqrt{-1}} = cosa \pm \sqrt{-1}.sena$ (822), cangiato a in ma, si ottiene $e^{\pm ma\sqrt{-1}} = cosma \pm \sqrt{-1}.\,senma = (cosa \pm \sqrt{-1}.sena)^m$, se di qui si formino due distinte equazioni, una con un segno, l'altra con l'altro, e quindi si sommino e si sottraggano troveremo $2cosma = (cosa + \sqrt{-1}.sena)^m + (cosa - \sqrt{-1}sena)^m$, e $2\sqrt{-1}.senma = (cosa + \sqrt{-1}.sena)^m - (cosa - \sqrt{-1}.sena)^m$, d'onde assai facilmente

$$cosma = cos^m a - \frac{m(m-1)}{2}cos^{m-2}a\,sen^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}cos^{m-4}a\,sen^4 a - ec.$$

$$senma = mcos^{m-1}a\,sena - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}cos^{m-3}a\,sen^3 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{2.3.4.5}\times cos^{m-5}a\,sen^5 a - ec.$$

formule che cangiano gli archi multipli in potenze di seni e di coseni d'archi semplici.

832. Avendosi (815) $2cosa = e^{a\sqrt{-1}} + e^{-a\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}}(1 + \ldots\ldots e^{-2a\sqrt{-1}})$, e $2\sqrt{-1}.sena = e^{a\sqrt{-1}} - e^{-a\sqrt{-1}} = e^{a\sqrt{-1}}(1 - e^{-2a\sqrt{-1}})$, se fatto per comodo $a\sqrt{-1} = b$, s'inalzino queste due equazioni alla potenza m, troveremo

$$1^a.\ (2cosa)^m = e^{mb} + me^{(m-2)b} + \frac{m(m-1)}{2}e^{(m-4)b} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times \ldots e^{(m-6)b} + \text{ec.}$$

$$2^a.\ (2\sqrt{-1}.sena)^m = e^{mb} - me^{(m-2)b} + \frac{m(m-1)}{2}e^{(m-4)b} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\times$$

$e^{(m-6)b} + \text{ec.}$

Ma in generale $e^{(m-n)b} = e^{(m-n)a\sqrt{-1}} = (831) \cos(m-n)a + \sqrt{-1}.\text{sen}(m-n)a$, introdotti dunque questi nuovi valori, ed eguagliate a parte le quantità reali e le immaginarie (247) avremo dalla 1ª.

$$\text{I}^a\ \cos ma + m\cos(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)a + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\cos(m-6)a + \text{ec.} = (2\cos a)^m$$

$$\text{II}^a.\ \text{sen}\,ma + m\,\text{sen}(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\text{sen}(m-4)a + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\text{sen}(m-6)a + \text{ec.} = 0\ ;$$ e cambiato m in $-m$

$$\text{III}^a.\ \cos ma - m\cos(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\cos(m+4)a - \text{ec.} = (2\cos a)^{-m}$$

$$\text{IV}^a.\ \text{sen}\,ma - m\,\text{sen}(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\text{sen}(m+4)a - \text{ec.} = 0$$

La 2ª. poi, con m pari, nel qual caso (198)$(\sqrt{-1})^m = \pm 1$, darà

$$\text{V}^a.\ \cos ma - m\cos(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)a - \text{ec.} = \pm(2\,\text{sen}\,a)^m$$

$$\text{VI}^a.\ \text{sen}\,ma - m\,\text{sen}(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\text{sen}(m-4)a - \text{ec.} = 0$$

e cambiato m in $-m$

$$\text{VII}^a.\ \cos ma + m\cos(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\cos(m+4)a + \text{ec.} = \pm(2\,\text{sen}\,a)^{-m}$$

$$\text{VIII}^a.\ \text{sen}\,ma + m\,\text{sen}(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\text{sen}(m+4)a + \text{ec.} = 0$$

mentre con m dispari, nel qual caso $(\sqrt{-1})^m = \pm\sqrt{-1}$ (198), darà

$$\text{IX}^a.\ \cos ma - m\cos(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\cos(m-4)a - \text{ec.} = 0$$

$$\text{X}^a.\ \text{sen}\,ma - m\,\text{sen}(m-2)a + \frac{m(m-1)}{2}\text{sen}(m-4)a - \text{ec.} = \pm(2\,\text{sen}\,a)^m;$$

e cambiato m in $-m$

$$\text{XI}^a.\ \cos ma + m\cos(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\cos(m+4)a + \text{ec.} = 0$$

$$\text{XII}^a.\ \text{sen}\,ma + m\,\text{sen}(m+2)a + \frac{m(m+1)}{2}\text{sen}(m+4)a + \text{ec.} = \mp(2\,\text{sen}\,a)^{-m}.$$

Convien notare che nella Vª. e VIIª. il segno inferiore ha luogo quando m è della forma pari $4n+2$, nella Xª. e XIIª. quando è della forma impari $4n+3$ (198).

833. Di queste serie la Iª. la Vª. e la Xª. danno il modo di convertire le potenze positive dei seni e coseni degli archi semplici in somme o in differenze di seni e coseni d'archi multipli, oggetto di grandissima rilevanza, specialmente in Astronomia. Ecco i risultamenti che se ne hanno per le prime sette potenze.

$sen a = sen a$ | $8 sen^4 a = 3 - 4\cos 2a + \cos 4a$

$2 sen^2 a = 1 - \cos 2a$ | $16 sen^5 a = 10\, sen a - 5 sen 3a + sen 5a$

$4 sen^3 a = 3 sen a - sen 3a$ | $32 sen^6 a = 10 - 15\cos 2a + 6\cos 4a - \cos 6a$

$$64 sen^7 a = 35 sen a - 21 sen 3a + 7 sen 5a - sen 7a$$

$\cos a = \cos a$ | $8\cos^4 a = 3 + 4\cos 2a + \cos 4a$

$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$ | $16\cos^5 a = 10\cos a + 5\cos 3a + \cos 5a$

$4\cos^3 a = 3\cos a + \cos 3a$ | $32\cos^6 a = 10 + 15\cos 2a + 6\cos 4a + \cos 6a$

$$64\cos^7 a = 35\cos a + 21\cos 3a + 7\cos 5a + \cos 7a$$

834 L' equazione $4 sen^3 a = 3 sen a - sen 3a$ dà il modo di trovare prontamente le radici reali approssimate di qualunque equazione del terzo grado nel caso irriducibile (299). Si cominci dal renderla omogenea, moltiplicandone il secondo membro per r^2 (783), e considerando perciò le funzioni *sena* e *sen3a* trasportate dal circolo del raggio 1 in quello del raggio r (*ivi*) ; e quindi si riduca l' equazione alla forma $sen^3 a - \frac{3}{4} r^2 sen a + \frac{1}{4} r^2 sen 3a = 0$. Potremo così paragonarla con la generale $x^3 - px + q = 0$, il che darà 1ª. $x = sen a$, 2ª. $p = \frac{3r^2}{4}$, 3ª. $q = \frac{1}{4} r^2 sen 3a$; ed è chiaro che dalla 1ª. avremo x, se per mezzo dell' altre due perverremo a conoscere l' arco $3a$, ed il raggio r del circolo a cui appartengono $sen 3a$ e $sen a$. Or la seconda dà $r = 2\sqrt{\frac{p}{3}}$, e quindi la terza $sen 3a = \frac{3q}{p}$; l' arco $3a$ è dunque quello che nel circolo del raggio 1 ha per seno $\frac{3q}{pr}$ (782), ossia $\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$. Calcolato perciò il valore di quest' ultimo seno, le tavole, per le quali il raggio è 1, ci faran conoscere l' arco $3a$ che gli corrisponde, d' onde l' arco a, e il valore di *sena* nel circolo del raggio 1, che moltiplicato per r, ossia per $2\sqrt{\frac{p}{3}}$, ci darà il valor di *sena* nel circolo del raggio r (782), ossia uno dei valori di x, o una delle radici dell' equazione. Per aver le altre due osserveremo che il seno $\frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$ appartiene insieme e all' arco $3a$, e agli archi $180 - 3a$, $-(180 + 3a)$ (792.51ª.). Dunque l' arco $3a$ potrà aver ciascuno di questi tre valori, e l' arco a ciascuno dei tre a, $60 - a$, $-(60 + a)$, e quindi sarà $x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}.sen a$, $= 2\sqrt{\frac{p}{3}}.sen(60 - a)$, $= -2\sqrt{\frac{p}{3}}.sen(60 + a)$, ove, lo ripetiamo, i tre seni debbono considerarsi come spettanti al circolo del raggio 1, e quindi possono aversi dalle tavole ordinarie. Si osservi che essendo di sua natura $r > sen 3a$, sarà $2\sqrt{\frac{1}{3}p} > \frac{3q}{p}$, e $\frac{p^3}{27} > \frac{1}{4} q^2$, ciò che con p negativo forma il caso irriducibile (299); perciò questo metodo risolve l' equazioni del terzo grado unicamente in questo caso.

Esempj I°. Sia $x^3-3x+1=0$, onde $p=3$, $q=1$, $sen 3a=\frac{1}{2}$, $3a=30°$, $a=10°$; dunque $x=2sen 10°=0,347296$, $x=2sen 50°=1,532089$, $x=-2sen 70°=-1,879385$. II°. Abbiasi l'equazione $x^3-7x+7=0$, già da noi risoluta per altra laboriosissima via (314. e *seg.*); sarà $p=7$, $q=7$, $sen 3a=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$; dunque $a=26° 22' 8''$; $60°-a=33° 37' 52''$; $60°+a=86° 22' 8''$. Quindi $x=1,356896$, $=1,69202$, $=-3,048917$; i due primi valori concordano esattamente con quelli già trovati al par. 315.

835. Del resto la trigonometria dà metodi prontissimi per risolver l'equazione $x^3\pm px+q=0$, anche fuori del caso irriducibile. Sia primieramente p positivo; si porrà 1ª. $\frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}=tang\varphi$; ed avremo $\frac{4p^3}{27q^2}=tang^2\varphi$, $\sqrt{(\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4})}=\frac{q}{2}\sqrt{(\frac{4p^3}{27q^2}+1)}=\frac{q}{2}\sqrt{(tang^2\varphi+1)}=\frac{q}{2cos\varphi}$ (787.14ª); e siccome fatto per comodo $\sqrt{\frac{p}{3}}=m$ la 1ª. dà $\frac{q}{2}=\frac{m^3}{tang\varphi}$, introdotti questi valori nel valor generale di x (297), troveremo $x=m\sqrt[3]{\frac{1-cos\varphi}{sen\varphi}}-m\sqrt[3]{\frac{1+cos\varphi}{sen\varphi}}$, ossia (797) $x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{tang\frac{1}{2}\varphi}-\sqrt[3]{cot\frac{1}{2}\varphi}\right\}$; e ponendo 2ª. $\sqrt[3]{tang\frac{1}{2}\varphi}=tang\omega$, avremo infine $x=\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tang\omega-cot\omega\right\}=(796.8ª)-2cot 2\omega\times\sqrt{\frac{p}{3}}$. Calcolato dunque l'angolo φ per mezzo della 1ª., e quindi l'angolo ω per mezzo della 2ª., l'equazione finale darà il valor reale di x che, come si sa (299), non può esser che uno soltanto.

Se p è negativo, dovrà aversi $\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}$, altrimenti si caderebbe nel caso irriducibile già contemplato. Sarà dunque $\frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}<1$, e potremo porre $\frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}=sen\varphi$. Avremo allora $\sqrt{(\frac{-p^3}{27}+\frac{q^2}{4})}=\frac{q}{2}\sqrt{(1-sen^2\varphi)}=\frac{q}{2}cos\varphi$; avremo inoltre $\frac{q}{2}=\frac{m^3}{sen\varphi}$, ed $x=-m\left\{\sqrt[3]{\frac{1-cos\varphi}{sen\varphi}}+\sqrt[3]{\frac{1+cos\varphi}{sen\varphi}}\right\}=(797)-\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{\sqrt[3]{tang\frac{1}{2}\varphi}+\sqrt[3]{cot\frac{1}{2}\varphi}\right\}$, e fatto come sopra $\sqrt[3]{tang\frac{1}{2}\varphi}=tang\omega$, verrà $x=-\sqrt{\frac{p}{3}}\left\{tang\omega+cot\omega\right\}=(796.85ª)\frac{-2}{sen 2\omega}\sqrt{\frac{p}{3}}$. Si avverta che essendosi sempre supposto q positivo, se fosse negativo dovrebbe cangiarsi x in $-x$, e q si ridurrebbe positivo; dopo di che non resterebbe che cangiar di segno gli ultimi valori di x.

836. Con industrie consimili posson risolversi trigonometricamente anche l'equazioni del 4°. grado; ma noi non ce ne occuperemo, e prenderemo piuttosto a

mostrare come possano pure risolversi con gli stessi metodi l' equazioni derivative del secondo grado della forma $x^{2n}-2ax^n\mp b=0$ (256). La soluzione analitica di queste equazioni si riduce ad $x^n=a\left\{1\pm\sqrt{\left(1+\frac{b}{a^2}\right)}\right\}$ se l'ultimo termine è negativo, e ad $x^n=a\left\{1\pm\sqrt{\left(1-\frac{b}{a^2}\right)}\right\}$ se è positivo. Nel primo caso pongasi $\frac{b}{a^2}=tang^2\varphi$, e per conseguenza $a=cot\varphi\times\sqrt{b}$; avremo $x^n=cot\varphi\left\{1\pm\sqrt{(1+tang^2\varphi)}\right\}\sqrt{b}$; e poichè $\sqrt{(1+tang^2\varphi)}=(787.30^{\circ})sec\varphi$, sarà $x^n=(cot\varphi\pm cot\varphi\times sec\varphi)\sqrt{b}$. Calcolati i due valori, si rappresenti l'uno con p^n, l'altro con $-q^n$; avremo $x^n-p^n=0$, $x^n+q^n=0$, dalle quali due equazioni potran dunque aversi (827) tutti i valori di x.

837. Che se l'ultimo termine della proposta sia positivo, ed abbia dunque luogo la seconda soluzione analitica, distingueremo due casi, cioè di $b<a^2$, e di $b>a^2$. Nel primo il radicale sarà reale, e poichè si avrà $\frac{b}{a^2}<1$, potremo fare $\frac{b}{a^2}=cos^2\varphi$, e quindi $a=\frac{\sqrt{b}}{cos\varphi}$, ed $x^n=\frac{\sqrt{b}}{cos\varphi}\left\{1\pm\sqrt{(1-cos^2\varphi)}\right\}=\frac{1\pm sen\varphi}{cos\varphi}\sqrt{b}$, equazione la quale infine si terminerà di risolvere come nel caso precedente. Nel secondo il radicale, e quindi tutti i valori di x, saranno immaginarj. Porremo $b=p^{2n}$, $\frac{a}{\sqrt{b}}=cos\varphi$, valori che, introdotti in quello di x^n, daranno $x^n=p^n(cos\varphi\pm\sqrt{-1}.sen\varphi)$, ed $x=p\sqrt[n]{(cos\varphi\pm\sqrt{-1}.sen\varphi)}=(831)\ p(cos\frac{\varphi}{n}\pm\sqrt{-1}.sen\frac{\varphi}{n})$. Di qui $x-p(cos\frac{\varphi}{n}\pm\sqrt{-1}.sen\frac{\varphi}{n})=0$; e moltiplicando i due valori del primo membro, $x^2-2pxcos\frac{\varphi}{n}+p^2=0$. Ma l'arco φ dato dall' equazione $cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{b}}$, ha gli infiniti valori espressi da $2k\pi\pm\varphi$ (794), potremo dunque sostituir $2k\pi\pm\varphi$ in luogo di φ nell'avuta equazione finale, il che darà $x^2-2pxcos\frac{2k\pi\pm\varphi}{n}+p^2=0$, e di qui visibilmente tutti i valori di x (827).

Risoluzione dei triangoli rettilinei

838. Abbiasi il triangolo qualunque ABC, a cui sia circoscritto il circolo ABC del raggio KB$=r$. Condotto normalmente ad AB il raggio KE, sarà la corda o lato AB$=(781.2^{\circ})2r\,sen$EKB$=$ F.113

F.143 (521) $2rsen\frac{1}{2}AKB=$ (568.1°) $2rsenACB$. Nel modo stesso si proverà che $BC=2rsenBAC$, ed $AC=2rsenABC$. Chiamati dunque g, g', g'' i tre lati AB,BC,AC, ed a, a', a'' i respettivi angoli opposti, avremo $g=2rsena$, $g'=2rsena'$, $g''=2rsena''$, e quindi $g:g':g''::sena:sena':sena''$. Dunque *in ogni triangolo i lati stanno tra loro come i seni degli angoli opposti*; principio fondamentale, su cui si appoggia la dottrina che insegna a risolvere i triangoli rettilinei. Prima di passare ad esporla premetteremo 1°. che dati due angoli, s'intende dato anche il terzo, supplemento degli altri due (561.1°); 2°. che se son dati soltanto i tre angoli, non si potrà arrivare a conoscere i lati, e il problema sarà insolubile. Infatti tutti i triangoli simili hanno gli stessi angoli, ma lati differenti e soltanto proporzionali (509). Perciò le questioni solubili si riducono in generale alle tre seguenti: 1ª. *Dati due angoli e un lato trovar gli altri due lati*; 2ª. *Dati due lati ed un angolo trovar gli altri due angoli e il terzo lato*; 3ª. *Dati i tre lati trovar gli angoli*.

839. La prima è direttamente risoluta o da una, o da un'altra dell'equazioni $g=\frac{g'sena}{sena'}$, $g=\frac{g''sena}{sena''}$, $g'=\frac{g''sena'}{sena''}$, che immediatamente derivano dal canone fondamentale (838). Così se si abbia $g=2301,82$, $a=26°\ 17'\ 59'',4$, $a'=84°\ 56'\ 24'',3$; sarà $a''=180°-(a+a')=68°45'36'',3$; e poichè $g'=\frac{gsena'}{sena}$, $g''=\frac{gsena''}{sena}$, perciò applicati i logaritmi, si troverà

$lg=3,3620714$	$lg=3,3620714$
$+l\,sena'=9,9983043$	$+l\,sena''=9,9694493$
$somma=3,3603757$	$somma=3,3315207$
$-l\,sena=9,6464709$	$-l\,sena=9,6464709$
$diff^a.=3,7139048$	$diff^a.=3,6850498$
$=lg'=l5174,93$	$=lg''=l4842,28$

840. Si noterà che le tre precedenti equazioni, benchè in apparenza diverse, sono in sostanza una cosa stessa, e l'una vale per l'altra; essendo indifferente il chiamare o g, o g', o g'' il lato dato, e a, o a', o a'' qualunque degli angoli dati. Bensì se chiameremo g il lato dato, dovrà chiamarsi a l'angolo opposto; e se permuteremo g in g', o in g'', dovranno permutarsi g' o

g'' in g, ed a' o a'' in a, e reciprocamente; il che è ben chiaro.

841. Nel secondo quesito debbon distinguersi due casi differenti; poichè l'angolo dato può essere o opposto ad uno dei lati dati, o fra di essi compreso. Nel primo caso le stesse formule che hanno servito per il quesito primo, servono manifestamente anche per questo secondo. Così se sia $g=15312,41$, $g'=9865,25$, $a=56^{\circ}\,10'\,37'',8$ si avrà primieramente $sena'=\frac{g'sena}{g}$, $a''=$ . . $180^{\circ}-(a+a')$, $g''=\frac{gsena''}{sena}$; e applicati i logaritmi

$lg'=3,9944081$	$lg=4,1850436$
$+lsena=9,9194770$	$+lsena''=9,9998583$
$somma=3,9135851$	$somma=4,1849019$
$-lg=4,1850436$	$-lsena=9,9194770$
$diff^a.=9,7285415$	$diff^a.=4,2654249$
$=lsena'=lsen\,32^{\circ}21'34'',5$	$=lg''=l\,18425,74$
e poichè $a=56\;10\;57\;,8$	
dunque $a''=180-(a+a')=91\;27\;47\;,7$	

842. Ma se l'angolo dato a sia compreso fra i lati g' e g'', le formule superiori non son da per se stesse sufficienti, perchè in niuna di esse si trovano combinate insieme le quantità note a, g', g'' con veruna delle quantità g, a', a'', che si domandano. Osserveremo frattanto, che siccome (838) $g':g''::$ $sena':sena''$, sarà $g'\backsim g'':g'+g''::sena'\backsim sena'':sena'+sena''::$ (798.94ª) $tang\frac{1}{2}(a'\backsim a''):tang\frac{1}{2}(a'+a'')=$ (561.1°) $tang(90^{\circ}-\frac{1}{2}a)$ $=$ (792.58ª) $cot\frac{1}{2}a$; dunque $tang\frac{1}{2}(a'\backsim a'')=\frac{g'\backsim g''}{g'+g''}cot\frac{1}{2}a$. Con ciò si ha la semidifferenza dei due angoli a', a''; e poichè $\frac{1}{2}(a'+a'')$ $=90^{\circ}-\frac{1}{2}a$, è dunque in tal caso nota la semisomma e semidifferenza degli angoli a', a'': posson perciò determinarsi ambedue, e quindi anche il terzo lato g. Si osservi che essendo in nostro arbitrio il chiamare g' o g'' piuttosto l'uno che l'altro dei lati dati, se con g' rappresenteremo il maggiore, avremo $g'>g''$, e perciò $a'>a''$ (568.4°); e se divisi per g' il numeratore e denominatore del secondo membro della precedente equazione, si faccia $g'':g'=$ $tang\lambda$, verrà $tang\frac{1}{2}(a'-a'')=\frac{1-g'':g'}{1+g'':g'}cot\frac{1}{2}a=\frac{1-tang\lambda}{1+tang\lambda}cot\frac{1}{2}a=$ (799.105ª) $tang(45^{\circ}-\lambda)cot\frac{1}{2}a$, formula che più speditamente risolve il problema.

Sia $g'=4466,784$; $g''=4375,438$; $a=46^\circ\ 49'\ 40'',4$: avremo $\frac{1}{2}a=23^\circ\ 24'\ 50'',2$; $90^\circ-\frac{1}{2}a=66^\circ\ 35'\ 9'',8$

$lg''=3,6410216$	dunque $lg'=3,6499950$
$-lg'=3,6499950$	$+l\,sen a=9,8629073$
$diff^a.=9,9910266$	$somma=3,5129023$
$=ltang\lambda=ltang 44^\circ 24' 29'',2$	$-l\,sen a'=9,9670208$
$45^\circ-\lambda=0^\circ 35' 30'',8$	$diff^a.=3,5458815$
$l\,tang(45^\circ-\lambda)=8,0141330$	$=lg=l3514,64$
$l\cot\frac{1}{2}a=0,3634844$	oppure $lg''=3,6410216$
$ltang\frac{1}{2}(a'-a'')=8,3776174$	$+lsen a=9,8629073$
$=ltang\ 1^\circ 21' 59'',9$	$somma=3,5039289$
$\frac{1}{2}a'+\frac{1}{2}a''=66\ 35\ 9\ ,8$	$-l\,sen a''=9,9580474$
$somma=67\ 57\ 9\ ,7=a'$	$diff^a.=3,5458815$
$diff^a.=65\ 13\ 9\ ,9=a''$	$=lg=l3514,64$

e così l'uno di questi due ultimi calcoli serve di prova all'altro, e a tutta l'operazione.

F. 113 843. Venendo infine all'ultimo quesito, si riprenda il triangolo ABC, e dal vertice dell'angolo A si conduca sul lato opposto la normale AD. Avremo (660.3°) $2g'\times DC=g'^2+g''^2-g^2$. Ma (838) $DC:AC::sen DAC:sen ADC::sen(90^\circ-ACD):sen 90^\circ::\cos ACD:1$, ossia $DC:g''::\cos a:1$; dunque $DC=g''\cos a$, e quindi $2g'g''\cos a=g'^2+g''^2-g^2$, e $\cos a=\frac{g'^2+g''^2-g^2}{2g'g''}$.

844. Da questa formula si ha quindi l'angolo a, quando si conoscono i tre lati g,g',g''. Ma per renderla più comoda al calcolo logaritmico, si aggiunga all'uno e all'altro membro un'unità; osservando che $1+\cos a=2\cos^2\frac{1}{2}a$ (797.88ª), troveremo $2\cos^2\frac{1}{2}a=\frac{g'^2+g''^2-g^2+2g'g''}{2g'g''}=\frac{(g'+g'')^2-g^2}{2g'g''}=\frac{(g'+g''+g)(g'+g''-g)}{2g'g''}$. Fatto pertanto $g+g'+g''=2q$, e quindi $g'+g''-g=2q-2g$, sostituendo, riducendo ed estraendo la radice, otterremo $\cos\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{q(q-g)}{g'g''}}$. Oppure si sottragga l'uno e l'altro membro dall'unità, e si osservi che $1-\cos a=2sen^2\frac{1}{2}a$; troveremo $2sen^2\frac{1}{2}a=\frac{2g'g''-g'^2-g''^2+g^2}{2g'g''}$; ma $2g'g''-g'^2-g''^2+g^2=g^2-(g''-g')^2=(g+g''-g')(g-g''+g')=2(q-g')\times 2(q-g'')$; sostituendo dunque, riducendo ed estraendo la radice, avremo $sen\frac{1}{2}a=\ldots$

$\sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{g'g''}}$. Divisa questa formula per l'altra risulterà la terza $tang\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{(q-g')(q-g'')}{q(q-g)}}$, e ciascuna delle tre risolverà in modo egualmente facile il proposto quesito. Applichiamo la seconda, e sia

$g = 2301,82$	e perciò $lg' = 3,7139045$
$g' = 5174,93$	$+lg'' = 3,6850499$
$g'' = 4842,28$	$somma = 7,3989544$
sarà $2q = 12319,03$	$colog. = 2,6010456$
$q = 6159.51$	$+l(q-g') = 2,9932510$
$q-g' = 984,58$	$+l(q-g'') = 3,1196616$
$q-g'' = 1317,23$	$somma = 8,7139582$
	$\frac{1}{2} somma = 9,3569791 = l\, sen\, 13^\circ\ 8'\, 59'',5$
	e quindi come sopra (839) $a = 26\ 17\ 59\ ,0$

845. Del resto la formula $2g'g''cosa=g'^2+g''^2-g^2$ dà altresì la soluzione diretta di tutti i quesiti della seconda specie (838.841). Infatti se son dati g',g'' e l'angolo compreso a, e si cerchi il terzo lato g, l'equazione sciolta rapporto a g, darà immediatamente $g=\sqrt{(g'^2+g''^2-2g'g''cosa)}$; se poi coi medesimi dati vogliansi a',a'', si cangi nella formula a in a', e per conseguenza (840) g in g' e g' in g, avremo l'altra $2gg''cosa'=g^2+g''^2-g'^2$, che sommata con la primitiva darà $g'cosa+gcosa'=g''$. Ma (839) $g=\frac{g'sena}{sena'}$, sostituendo dunque e risolvendo, si avrà $cota'=\frac{g''-g'cosa}{g'sena}$; e quindi pure $cota''=\frac{g'-g''cosa}{g''sena}$, che viene dalla precedente, cangiata a' in a'', e perciò g' in g'' e g'' in g'. Se infine sieno dati g, g' e l'angolo a opposto a g, e vogliasi il terzo lato g'', la formula risoluta rapporto a g'', darà $g''=g'cosa\pm\sqrt{(g^2-g'^2sen^2a)}$. Queste espressioni sono utilissime, qualora non si tratti che di avere il valore analitico delle incognite che rappresentano; ma nei casi pratici e nelle applicazioni numeriche sono onninamente preferibili i metodi sopra indicati.

846. Fin qui abbiamo considerato un triangolo qualunque. Se è rettangolo, i quesiti son meno numerosi, e le soluzioni molto più semplici; poichè uno degli angoli, cioè l'angolo retto, è sempre noto; dei due angoli acuti, dato l'uno si conosce subi-

to l'altro, che ne è il complemento; e di più il teorema dell' ipotenusa (659) dà sempre uno dei lati, quando si conoscono gli altri due. Le questioni puramente trigonometriche che posson farsi in questo caso, considerate in tutte le loro possibili varietà, si riducono alle quattro seguenti; *data l'ipotenusa ed un angolo trovare i due cateti; dato un cateto ed un angolo trovar l'ipotenusa; dato un cateto ed un angolo trovar l' altro cateto; dati i due cateti trovare i due angoli.*

Or si supponga a l'angolo retto, e per distinzione si cangi in h la denominazione g del lato opposto. Sarà $sena = 1$, $cosa = 0$, e di più avremo $sena' = cosa''$, $sena'' = cosa'$, $tanga' = cota''$, $tanga'' = cota'$. Frattanto l' equazioni generali (839) $gsena' = g'sena$, $g'sena'' = g''sena'$, daranno 1°. $g' = hsena' = hcosa''$; $g'' = hsena'' = hcosa'$; formule che risolveranno il primo e secondo quesito; 2°. $g'sena'' = g''cosa''$, $g'cosa' = g''sena'$, ovvero $g' = g''cota'' = g''tanga'$, $g'' = g'cota' = g'tanga''$, formule che risolveranno il terzo e quarto.

847. I seni degli archi compresi fra i gradi 88 e 90 diversificano sì poco gli uni dagli altri, che i loro logaritmi differiscono appena, e neppur sempre, di qualche unità nella sola settima decimale. Se dunque l'angolo che si cerca cada dentro i suddetti limiti, e le formule portino a farlo conoscere per mezzo del suo seno, come accade in $sena' = \frac{g'}{h}$, le ordinarie tavole logaritmiche non sarebbero sufficienti a farci distinguere a qual arco questo seno precisamente appartenga, e la soluzione rimarrebbe incerta, almeno quanto alle unità dei secondi, dovute all' arco o angolo ricercato. Altrettanto e per le stesse ragioni avverrebbe, se l' angolo fosse al di sotto di due gradi, e dovesse conoscersi per mezzo del suo coseno, come ha luogo in $cosa' = \frac{g''}{h}$. Si eviterà l' inconveniente trasformando le formule in altre per le quali il caso non abbia luogo. Abbiasi $sena' = \frac{g'}{h}$; sarà $h : g' :: 1 : sena'$, e quindi $h - g' : h + g' :: 1 - sena' : 1 + sena' :: 1 : \frac{1 + sena'}{1 - sena'} ::$ (799. 101.) $1 : tang^2(45° + \frac{1}{2}a') = \frac{h + g'}{h - g'}$: conosciuto dun-

que l' angolo $45^{0}+\frac{1}{2}a'$, avremo a'. Abbiasi $cos a'=\frac{g''}{h}$; sarà $h : g'' :: 1 : cos a'$, ed $h+g'' : h-g'' :: 1+cos a' : 1-cos a' :: 1 : \frac{1-cos a'}{1+cos a'}$ :: (799. 104ª) $1 : tang^2 \frac{1}{2} a'$, d'onde $tang \frac{1}{2} a' = \sqrt{\frac{h-g''}{h+g''}}$, formula che dà immediatamente $\frac{1}{2}a'$, e quindi a'. Abbiasi infine $sen a = \frac{g sen a'}{g'}$ (839) ; porremo in luogo di *sena* l'espressione equivalente $\sqrt{(1-cos^2 a)}$; sciolta l'equazione, avremo l'arco *a* per mezzo del suo coseno.

Applicazioni della Trigonometria rettilinea alla Geodesia

848. Le applicazioni della Trigonometria si estendono ad ogni ramo di Matematiche. Non essendo quì il luogo di mostrare appieno l'importanza e vastità dei suoi usi, ci limiteremo ad alcuni fra quelli che servono alla *Geodesia*, scienza che ha per fine la misura delle distanze e altezze degli oggetti terrestri.

Iª. *Si supponga nota la distanza dei punti* A, B; *e voglia determinarsi quella di ciascuno di essi ad un terzo punto* C *visibile dall'uno e dall'altro*. Si dirigano da A le *visuali* AB, AC ai punti B, C; e da B le visuali BA, BC ai punti A, C. Misurati gli angoli BAC, ABC, e risoluto il triangolo ABC (839), in cui si conoscono un lato e gli angoli adiacenti, avremo AC, BC, distanze richieste. F.114

Che se oltre C abbiasi un quarto punto D visibile da C e da B, formati nel modo medesimo gli angoli DCB, CBD, dal triangolo CDB, in cui per l' operazion precedente già si conosce CB, avremo DB, CD. Come pure per un altro punto E visibile da D, C, formato il triangolo DCE, in cui è già cognito DC, avremo DE, CE. Ed è chiaro che così proseguendo a stendere questi triangoli, e volgendoli in più direzioni, possiamo aver le distanze reciproche di un numero considerabile di punti, con aver solo misurata sul terreno quella dei punti A, B. A questa prima ed unica misura suol darsi il nome di *base*, e a tutto l' in-

sieme dei triangoli quello di *rete* o *catena trigonometrica*. L' arte di costruir le *Carte topografiche* e *corografiche* di un paese o di una provincia è principalmente appoggiata a quest'operazione fondamentale.

F. 415 II^a. *Sia* EFHG *il letto di un fiume di cui voglia sapersi la larghezza*. Presa e misurata sopra una delle due sponde una base qualunque AB, fissato sulla sponda opposta un punto C, e determinate col metodo precedente le distanze AC, BC, s'immagini condotta la perpendicolare CD. Ambedue i triangoli ACD, BDC, in cui si conoscono le ipotenuse ed uno degli angoli adiacenti, faranno conoscer CD (846), larghezza richiesta (519).

416 III^a. *Misurare la retta inaccessibile* AB. Presa a piacere ove si può, e misurata la retta qualunque DC, si formino e si misurino gli angoli ADB, BDC, ACD, ACB. I triangoli ADC, DCB daranno AC, CB (839), quindi il triangolo ACB, in cui son noti AC, CB e l'angolo ACB contenuto, darà AB (842).

417 IV^a. *Misurare l'altezza della torre* BC. Se la torre s'inalza sopra un piano orizzontale e libero, preso su di esso un punto qualunque A, misuratane la distanza AB dal piede B della torre, ed osservato quindi l'angolo CAB, o il suo eguale CDE, formato sopra CA dalla DE parallela ad AB, il triangolo CAB rettangolo in B darà immediatamente CB (846).

Che se la torre è inaccessibile, si misuri sul piano la retta DE; e condotte le visuali DC, DB, EB si determinino gli an-418 goli BDE, DEB, CDB. Il triangolo DEB darà allora DB, e quindi il triangolo CDB rettangolo in B darà, come sopra, CB.

Che se D, ed E sieno o più elevati o più depressi di B, e perciò DB non risulti orizzontale, converrà di più condur la visuale EC, e misurare gli angoli CDE, DEC. Allora dal triangolo DCE avremo DC (839), che unitamente a DB e all'angolo compreso CDB farà conoscere CB per mezzo del triangolo CDB.

Se in luogo di una torre fosse da misurarsi l'altezza di un monte alquanto elevato e discosto, gli angoli osservati dal piano sarebbero maggiori del vero, atteso l'effetto di ciò che i Fisici chiamano *refrazione della luce*, del quale è necessario spogliare le osservazioni prima di porle in calcolo. Non potendo entrar qui in una piena discussione di questa particolarità, ci contenteremo di averla accennata.

419 V^a. *Dati tre punti* B, C, D *di posizione nota, determinar*

quella di un quarto punto A *nel piano dei tre primi, da cui possan quelli vedersi*. I tre punti B, C, D essendo dati di posizione, tutto sarà dunque noto nel triangolo BCD; e potendosi da A condurre le tre visuali AB, AC, AD, saranno parimente noti gli angoli BAC, CAD. Ciò premesso si faccia $BC=m$, $CD=n$, $BCD=c$, $BAC=p$, $CAD=q$, l'angolo incognito $ABC=\omega$, e l'altro parimente incognito $ADC=\varphi$. I triangoli BAC, CAD col lato comune AC daranno (839) $AC=\frac{m\,sen\omega}{sen p}=\frac{n\,sen\varphi}{sen q}$. Di qui . . $\frac{m\,sen q}{n\,sen p}=\frac{sen\varphi}{sen\omega}$, e fatto $\frac{n\,sen p}{m\,sen q}=tang\lambda$, avremo $\frac{sen\varphi}{sen\omega}=\frac{1}{tang\lambda}$, d'onde $sen\varphi : sen\omega :: 1 : tang\lambda$, e $sen\varphi - sen\omega : sen\varphi + sen\omega :: 1 - \ldots tang\lambda : 1+tang\lambda$. Dunque $\frac{sen\varphi-sen\omega}{sen\varphi+sen\omega}=\frac{1-tang\lambda}{1+tang\lambda}$, cioè (798.94°) $\frac{tang\frac{1}{2}(\varphi-\omega)}{tang\frac{1}{2}(\varphi+\omega)}=$ (799.105°) $tang(45^\circ-\lambda)$. Ma $\varphi+\omega=360^\circ-c-p-q$ (596.1°), e perciò $tang\frac{1}{2}(\varphi+\omega)=tang(180^\circ-\frac{1}{2}(c+p+q))=-tang\frac{1}{2}(c+p+q)$ (792); dunque $tang\frac{1}{2}(\varphi-\omega)=-tang\frac{1}{2}\times(c+p+q)tang(45^\circ-\lambda)$, ossia $-tang\frac{1}{2}(\varphi-\omega)=$ (790) $tang\frac{1}{2}\times(\omega-\varphi)=tang\frac{1}{2}(c+p+q)tang(45^\circ-\lambda)$; o anche $tang\frac{1}{2}(\varphi-\omega)=tang\frac{1}{2}(c+p+q)tang(\lambda-45^\circ)$, e in generale $tang\frac{1}{2}(\omega\backsim\varphi)=tang\frac{1}{2}(c+p+q)tang(45^\circ\backsim\lambda)$. Di qui si avrà la semidifferenza degli angoli ω, φ che unita alla semisomma $\frac{1}{2}(\varphi+\omega)=180^\circ-\frac{1}{2}(c+p+q)$ farà conoscere questi due angoli: avvertendo che in forza dell'equazione $\frac{sen\varphi}{sen\omega}=\frac{1}{tang\lambda}$, qualora risulti $\lambda<45^\circ$ e perciò $tang\lambda<1$ (781.3°), dovrà esser $sen\omega<sen\varphi$, e quindi dovrà darsi ad ω quello dei due valori che o in eccesso o in difetto si discosta maggiormente dai 90°: tutto si farà all'opposto se sia $\lambda>45^\circ$. Infine risoluti i triangoli BAC, CAD si otterranno le tre distanze AC, AB, AD, di cui l'ultime due potranno aversi per riprova anche dal triangolo ABD.

F. 119

120 Si avverta che se il triangolo BCD giacesse in posizione inversa, l'angolo rientrante BCD (595) sarebbe allora eguale a $360^\circ-c$, e quindi $\varphi+\omega=c-p-q$, e $tang\frac{1}{2}(\varphi\backsim\omega)=tang\frac{1}{2}(c-p-q)tang(45^\circ-\lambda)$. Che se il punto A fosse al di dentro del triangolo BCD si avrebbe come sopra $\varphi+\omega=360^\circ-c-p-q$, e le formule non varierebbero.

121

Es. sia $m=6549,3$; $n=4747,723$; $p=23^\circ\ 15'\ 47'',9$; $q=32^\circ\ 55'\ 38'',9$; $c=54^\circ\ 32'\ 2'',8$ si avrà

$\log m = 3,8161949$
$+\log\operatorname{sen} q = 9,7352610$
$somma = 3,5514559$

$colsom = 6,4485441$
$+\log n = 3,6764854$
$+\log\operatorname{sen} p = 9,5965500$
$\log\operatorname{tang}\lambda = 9,7215795 = l\operatorname{tang}\ 27^\circ\ 46'\ 35'',97$
$45^\circ \backsim \lambda = 17\ \ 43\ \ 24\ ,03$
$\log\operatorname{tang}(45^\circ \backsim \lambda) = 9,4913592$
$l\operatorname{tang}\frac{1}{2}(c+p+q) = 10,1606341$
$somma = 9,6519933 = l\operatorname{tang}\frac{1}{2}(\omega \backsim \varphi) = l\operatorname{tang} \ldots\ 24\ \ 10\ \ 3\ ,4$

$c = 54^\circ\ 32'\ 2'',8$
$p = 23\ \ 15\ \ 47\ ,9$
$q = 32\ \ 55\ \ 38\ ,9$
$c+p+q = 110\ \ 43\ \ 29\ ,6$
$\frac{1}{2}(c+p+q) = 55\ \ 21\ \ 44\ ,8$
$180^\circ - \frac{1}{2}(c+p+q) = \frac{1}{2}(\varphi+\omega) = 124\ \ 38\ \ 15\ ,2$

$somma = \omega = 148\ \ 48\ \ 18\ ,6$
$diff^a. = \varphi = 100\ \ 28\ \ 11\ ,8$
$q = 32\ \ 55\ \ 38\ ,9$
$\varphi+q = 133\ \ 23\ \ 50\ ,7$
$ACD = 180^\circ - \varphi - q = 46\ \ 36\ \ 9\ ,3$
$c = 54\ \ 32\ \ 2\ ,8$
$c - ACD = ACB = 7\ \ 55\ \ 53,\ 5$

$\log m = 3,8161949$
$+l\operatorname{sen}ACB = 9,1398463$
$2,9560412$
$-\log\operatorname{sen} p = 9,5965500$
$\log AB = 3,3594912 = l\,2288,19$
$+\log\operatorname{sen}\omega = 9,7142878$
$somma = 3,0737790$
$-l\operatorname{sen}ACB = 9,1398463$
$\log AC = 3,9339327 = l\,8588,80$
$+l\operatorname{sen}ACD = 9,8612988$
$somma\ 3,7952315$
$-\log\operatorname{sen}\varphi = 9,9927085$
$\log AD = 3,8025230 = l\,6346,34$

$$\left\{\begin{array}{l} AB = \dfrac{m\operatorname{sen}ACB}{\operatorname{sen}p} \\ AC = \dfrac{AB\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}ACB} \\ AD = \dfrac{AC\operatorname{sen}ACD}{\operatorname{sen}\varphi} \end{array}\right.$$

F. 119

VI^a. *Trovar la distanza* DC *dei due oggetti* D, C *l'un dall'altro visibili, e da ciascun dei quali possan vedersi gli oggetti* A, B *di nota distanza fra loro e situati in uno stesso piano con* D, C. Si ponga la richiesta distanza DC=1, e quindi col metodo già dato (III^a) si trovi il valore che in quest'ipotesi ne proverrebbe per AB. Supposto m questo valore, sarà (579) CD : 1 :: AB : m, d'onde $CD = \frac{1}{m}AB$.

849. Chiaro intanto è che la maggiore o minor precisione dei risultamenti ottenuti con questi mezzi, dipende soprattutto dall' esattezza con cui si sarà misurata la base o lato, che in ognuna delle soluzioni si suppone conosciuto, come pure dalla bontà delle osservazioni degli angoli. Che se o nella base o negli angoli incorra qualche sensibile errore, esso influirà tanto maggiormente nelle distanze cercate, quanto queste saranno maggiori di quella che si assume come nota. Perciò qualora sia possibile, è necessario combinare in modo la scelta delle stazioni e dei punti da osservarsi, che i triangoli risultino di buona forma, nè vi sieno angoli molto al di sotto di 25°.

850. Sarà pure ottima regola di effettuar, quando si possa, l' osservazione da ciascuno dei tre vertici del triangolo: nel qual caso la somma dei tre angoli osservati deve, come si sa, risultare di 180°. Affinchè per altro questo succeda, non è solo necessario aver bene osservato, ma conviene in oltre che il centro del circolo o arco graduato si sia fatto coincidere più esattamente che si può col vertice di ciascun angolo: diligenza che bene spesso non può praticarsi. In tal caso si rendono necessarie non poche correzioni, che essendo di sommo imbarazzo, han fatto preferire il costume di ridur ciascun angolo al piano dell' orizzonte del luogo di osservazione; il che, più facilmente e più sicuramente che dal calcolo, si ottiene mediante l' ingegnoso e semplice meccanismo dei *Teodoliti*, macchine a tal effetto immaginate, e in oggi sostituite ai *Quadranti*, *Grafometri* e *Circoli* antichi. Per tal via in luogo delle distanze dirette ed assolute fra i vertici, si hanno queste stesse distanze ridotte, come suol dirsi *in pianta*, cioè quali sarebbero se i tre vertici fossero tutti situati in un medesimo piano orizzontale, il che è appunto ciò che abbisogna, allorchè vuolsi delineare in una mappa la configurazione di un Territorio. Deve però in questo caso avvertirsi, che se si tratti di triangoli molto estesi e di gran superficie, gli orizzonti di ciascun dei tre vertici, attesa la sfericità della terra, sono necessariamente inclinati fra loro, e i tre angoli ridotti appartengono al triangolo sferico formato dagli archi respettivamente intercetti fra le tre stazioni. Quindi la loro somma deve superare i 180°, siccome vedremo (866), di una qualche piccola quantità, cui è stato dato il nome di *eccesso sferico*. Non ci occuperemo di determinarne il valore, ricerca di ben poca importanza; tanto più che secondo un elegante Teorema di *Le-Gendre*, che in breve dimostreremo (895), per aver in tal caso il giusto valor dei lati, basta diminuir d' un terzo dell' eccesso sferico ciascuno dei tre angoli, e calcolar quindi il triangolo come se fosse piano.

851. Quanto poi alle regole da osservarsi per una buona misura, e alla descrizione degl' istrumenti atti a prender gli angoli, e al modo di maneggiarli, argomenti son questi che mal

comporterebbero la brevità voluta dall'indole di questo libro; e nei limiti che ci sono permessi non potremmo darne che un'idea incompletissima, e quindi di niuna reale ed effettiva utilità. Perciò rimandiamo il Giovane studioso agli Autori che ne hanno espressamente trattato, e specialmente al Sig. Cagnoli (*Trigonometria Piana e Sferica*), al Sig. Puissant (*Topografia e Geodesia*), al Sig. Delambre (*Base metrica T. I.*) e al Sig. Barone di Zach (*Attrazione delle Montagne*): sebbene rapporto agli strumenti sarà molto miglior consiglio il procurarsi, potendo, di avergli sott'occhio e alla mano; senza di che riescirà sempre difficile l'acquistarne una piena cognizione.

852. Non vogliamo ometter per altro di dare almeno una qualche idea del *nonio*, artificio quanto semplice tanto ingegnoso, con cui si perviene a valutare le piccole suddivisioni dei gradi, che l'arte giunger non potrebbe a scolpire sui circoli anche di non ordinario diametro, del che tanto più ci convien far parola, quanto che i principj sui quali questa felice invenzione si appoggia sono affatto analitici, nè potrebber comprendersi con la sola ispezione delle macchine o col vederne il maneggio. Sieno BD, EC porzioni eguali dei lembi di due circoli concentrici ed in immediato contatto fra loro, l'uno interno e fisso, e che perciò si chiama *circolo fisso* o semplicemente *circolo*, esterno l'altro e girevole intorno al primo, e che dal nome di chi ne concepì la prima idea, si appella *circolo nonio*, o semplicemente *nonio*. Si rappresenti con a l'arco BC, che può riguardarsi come comune ai due lembi, e si supponga che la porzione BD del circolo fisso contenga n divisioni numerate da destra a sinistra, e la corrispondente EC del nonio ne abbia $n-1$. Saranno $\frac{a}{n}$ nell'uno, $\frac{a}{n-1}$ nell'altro le larghezze di ciascuna divisione, o per dir meglio i nudi interstizj frapposti in ambedue fra divisione e divisione; ed è evidente che quelli del nonio saranno più grandi di quelli del circolo di tutta la quantità o differenza $\frac{a}{n-1}-\frac{a}{n}=\frac{a}{n(n-1)}$ Frattanto si disponga il nonio in maniera che la sua prima divisione EB a sinistra, la quale porta il nome d'*indice* o di *zero del nonio*, collimi esattamente con una divisione AB del circolo. An-

F. 122

che l'estrema opposta FC del nonio collimerà con la sottoposta F. 122
DC del circolo; non così però veruna delle intermedie; anzi quella del nonio che procedendo da sinistra a destra s'incontra la prima in ordine dopo l'indice o zero, si troverà visibilmente avanzata nel medesimo senso sulla sua corrispondente nel circolo di un arco equivalente alla differenza degli interstizj, ossia del valore di $\frac{a}{n(n-1)}$; la seguente del doppio, ossia di $\frac{2a}{n(n-1)}$; la terza di $\frac{3a}{n(n-1)}$; e in generale l'm^{sima} di $\frac{ma}{n(n-1)}$. Se dunque all'incontro si trasporti il nonio verso la sinistra fino a tanto che la sua divisione m^{sima} collimi con l'm^{sima} del circolo, lo zero non potrà più collimare con AB, ma si troverà avanzato, nel senso della numerazione delle divisioni del circolo, di un piccolo arco del valore di $\frac{ma}{n(n-1)}$, cioè precisamente eguale a quello di cui l'm^{sima} divisione del nonio si trovava discosta dall'm^{sima} del circolo, e che quindi ha dovuto percorrere per raggiungerla. Conosciuti dunque a, m ed n, potremo valutare l'arco che rimarrà allora intercetto fra AB e lo zero del nonio, ancorchè veruna effettiva divisione lo contrassegni. Così se il circolo sia diviso andantemente di mezzo in mezzo grado, e tutta l'estensione BC del nonio abbracci un arco di 15° 30', contenente perciò divisioni 31, e si supponga che la coincidenza cada sulla 19^{ma} divisione, avremo $a = 15° \ 30' = 930'$, $n = 31$, $m = 19$, $\frac{a}{n(n-1)} = \frac{930'}{31.30} = 1'$, ed $\frac{ma}{n(n-1)} = 19'$, cioè l'indice del nonio dovrà valutarsi avanzato di 19' al di là della divisione AB del circolo, cosicchè se questa corrisponda ai 35°, oppure ai 35° 30', il punto ove si sarà arrestato l'indice corrisponderà nel primo caso a 35° 19', e nel secondo a 35° 49'.

853. La quantità o differenza $\frac{a}{n(n-1)}$ può chiamarsi *forza del nonio*, e corrisponde a ciò di cui l'arco percorso dall'indice aumenta, allorchè la coincidenza s'inoltra da una divisione alla successiva. Cresce crescendo il numero delle divisioni effettive del circolo, nel qual caso può anche rendersi minore l'ar-

F.123 co a. Così se il circolo sia diviso di 10 in 10 minuti primi, e quindi ogni grado contenga 6 divisioni, preso un arco $a=10^{\circ}\ 10'$ $=610'$, avremo $n=61$, ed $\frac{a}{n(n-1)}=\frac{610'}{61.60}=\frac{1'}{6}=10''$; cioè la forza del nonio darà, ossia renderà sensibili gli archi di $10''$. In questo caso la coincidenza delle divisioni 6ª, 12ª, 18ª, ec. corrisponderà respettivamente ad 1, 2, 3, ec. minuti primi completi, il che suole indicarsi con numeri apposti a tutte quelle divisioni del nonio che godono di tal proprietà. Ciò contribuisce a render più facile la lettura; poichè se per esempio la coincidenza cada sulla quarta divisione dopo quella contrassegnata col 6, è chiaro che l'arco varrà 6' più i $40''$ che ha guadagnati nel passar che ha fatto la coincidenza da questa alla 4ª divisione susseguente.

854. Termineremo con l'esame di un caso che spessissimo occorre in pratica; qualora cioè l'osservazione che far si dovrebbe ad uno dei vertici del triangolo, resti impedita o per la difficoltà dell'accesso, o per ostacoli frapposti, che tolgono la possibilità di veder da quel vertice gli altri due. In tal congiuntura si presceglie un punto di stazione, quanto più si può, prossimo al punto impedito; ed ecco come l'osservazione fatta nel primo si riduce a quella che avrebbe dovuto farsi nel secondo, a cui suol darsi il nome di *centro*.

124 Sia C il centro, A, B gli altri due vertici del triangolo, O il punto di stazione, AOB l'angolo osservato, ACB l'angolo ricercato, e si faccia $ACB=C$, $AOB=O$, $CO=r$, distanza della stazione al centro, che suppongo potersi determinare o con la misura immediata e diretta, o con alcuno dei mezzi che abbondantemente nei diversi casi la Geometria somministra. Si ponga inoltre $COA=y$ angolo che il centro o vertice C fa con l'oggetto o vertice A, cioè con quello dei due che resta alla sinistra dell'osservatore; G, D le distanze AC, CB degli stessi due vertici dal centro C. Avremo $ACB=C=ATB-CAO=$ (559) $AOB+CBO-CAO$. Ora $AOB=O$; e quanto agli altri due angoli si ha (839) $sen CBO=\frac{CO sen COB}{CB}=\frac{r sen(O+y)}{D}$, $sen CAO=\frac{CO sen AOC}{CA}$ $=\frac{r sen y}{G}$; ma essendo r immensamente minore di D e G, questi

due seni sono dunque piccolissimi; possiamo perciò supporli proporzionali ai loro archi (801) e stabilir quindi le analogie CBO : senCBO :: 1'' : sen1'', CAO : senCAO :: 1'' : sen1'', d'onde si avrà CBO$=\frac{sen\text{CBO}}{sen1''}=\frac{rsen(O+\gamma)}{Dsen1''}$, CAO$=\frac{sen\text{CAO}}{sen1''}=\frac{rsen\gamma}{Gsen1''}$; e quindi $C=O+\frac{rsen(O+\gamma)}{Dsen1''}-\frac{rsen\gamma}{Gsen1''}$. Quanto a D, G potranno aversene i valori se non assoluti, almeno abbastanza approssimati, calcolando il triangolo ACB nell'ipotesi assai vicina al vero di $C=O$; oppure dopo averli calcolati dietro questo supposto, si applicherà a C il valore che ne proverrebbe dalla formula trovata, e di nuovo calcolato il triangolo si avranno G, D con tal precisione da non lasciar dubbio sopra il nuovo valore, che la formula darà allora per C. Tal diligenza potrà esser necessaria quando la distanza CO sia alquanto grande, nel qual caso i valori di CAO, CBO dovranno trarsi da quelli dei loro seni dati dalle due formule trovate di sopra.

F.124

855. Ecco alcuni Problemi per esercizio dei principianti.

I. Trovare un angolo x la cui tangente sia n^{pla} del suo seno. *Ris.* $cosx=\frac{1}{n}$; oppure $senx=\frac{\sqrt{(n^2-1)}}{n}$.

II. Dividere un dato angolo a in due angoli x, $a-x$ tali che i loro seni sieno nella ragion data di $m:n$. *Ris.* $tangx=\frac{msena}{n+mcosa}$.

III. Data la differenza d di due angoli x, $x+d$ e la ragione $n:m$ dei loro seni, trovare gli angoli. *Ris.* $tangx=\frac{nsend}{m-ncosd}$.

IV. Date le ragioni $n:1$ dei seni, $m:1$ delle tangenti di due angoli x, z, trovare gli angoli. *Ris.* $tangx=\sqrt{(\frac{m^2-n^2}{n^2-1})}$, $tangz=\frac{1}{m}\sqrt{(\frac{m^2-n^2}{n^2-1})}=\ldots\frac{1}{m}tangx$.

V. Un vascello si avanzò di 50 miglia verso Levante, e di 116 verso Tramontana. Si cerca la posizione e la lunghezza del viaggio o della linea retta per cui ha camminato. *Ris.* Il vascello è andato per una retta che fa un angolo di 23° 19' 3'',7 con la direzione di tramontana, ed ha di lunghezza miglia 126,32.

VI. Dalla sommità di *Monteluco*, Castello diruto della Toscana nella Provincia del Chianti, osservato con un teodolito l'angolo fra il Campanile del Duomo di *Siena* e il Mastio di *Volterra*, fu trovato di 39° 8' 9'',7. Operazioni trigonometriche precedenti avevano dato per la distanza g'' di Monteluco al Campanile del

Duomo di Siena *tese* 10382,974, per la distanza g' di Monteluco al Mastio di Volterra *tese* 26875,000. Determinare la distanza g fra il Mastio di Volterra e il Campanile di Siena. *Ris.* Si troverà (842) $\lambda = 21^\circ\ 7'\ 25''\ 3$, $\frac{1}{2}(a'+a'') = 70^\circ\ 25'\ 55'',15$; $\frac{1}{2}(a'-a'') = 51^\circ\ 14'\ 4'',62$, e di quì $a' = 121^\circ\ 39'\ 59'',8$; $a'' = 19^\circ\ 11'\ 50'',5$, e in fine $g =$ tese 19929,72.

VII. Dalla vetta dell' Alpe detta di *Pratomagno*, monte di Toscana che divide la provincia del *Casentino* dal *Valdarno superiore*, furono osservati gli angoli $p = 8^\circ\ 42'\ 0'',0$ fra Monteluco e il Campanile del Duomo di Siena, e $q = 31^\circ\ 38'\ 26'',7$ fra il Campanile di Siena e il Mastio di Volterra. Ammessi i dati e risultamenti del problema precedente, determinar le distanze della stazione di Pratomagno al Duomo di Siena e al Mastio di Volterra. *Ris.* Si troverà (848.V°) $\lambda = 28^\circ\ 57'\ 45'',7$; $\omega = 160^\circ\ 9'\ 6'',2$; $\varphi = 37^\circ\ 50'\ 27'',3$; e quindi per la prima delle due distanze richieste tese 23306,35; per l' altra tese 35580,80.

VIII. Dalla sommità del Monte della *Falterona*, prossimamente alle sorgenti dell' Arno fu osservato l' angolo della stazione di Pratomagno con la Torre del *Palazzo vecchio* di Firenze, che risultò di 62° 38' 38'',5. In seguito dalla Torre di Palazzo vecchio, fuori del centro e ad una distanza dal medesimo di tese $r = 1,303$ fu osservato l' angolo $O = 40^\circ\ 5'\ 40'',0$ fra le due stazioni di Falterona alla sinistra e di Pratomagno alla destra, la prima delle quali faceva col centro un angolo $y = 150^\circ\ 29'\ 50''$. Sapendosi che la distanza delle due stazioni fra loro è di tese 12631,68, ridurre al centro del segnale l' osservazione fatta in Firenze. *Ris.* La data distanza delle due stazioni e i due angoli osservati daranno prossimamente (854) $\log G = 4,2817187$, $\log D = 4,2410374$. Introdotti dunque nella nota formula (*ivi*) questi valori, e quelli di $\log sen y = 9,6923760$, $\log sen(O+y) = 9,2643653$, $\log r = 0,1149444$, $\log sen 1'' = 4,6855749$, e avvertendo che l' angolo $O+y > 180^\circ$ rende negativo il termine $\frac{r sen(O+y)}{D sen 1''}$ (792), troveremo $C = 40^\circ 5' 30'',25$.

IX. Nell' eccellente *Circolo ripetitore* posseduto da questo Osservatorio delle Scuole Pie di Firenze, la graduazione procede di 5' in 5'; ed il nonio abbraccia un arco $a = 6^\circ 10'$; se non che le sue divisioni in luogo di essere una di meno (852), sono anzi una di più di quelle dell' arco del circolo, e l' indice è sulla destra invece che sulla sinistra. Si domanda 1°. qual sia la forza di questo nonio; 2°. come dovrà leggersi, supposto che l' indice cada fra i 55° e 35' e i 55° e 40', e la coincidenza abbia luogo sulla 3ª. divisione del nonio dopo quella segnata di num°.2.

Ris. 1ª. Avremo primieramente $n = 74$, e per la forza del nonio $\frac{a}{n(n+1)} = 4''$; 2ª. si leggerà 55° 37' 12''.

X. In un triangolo son noti i lati g', g'' e l' angolo compreso a; se ne cerca la superficie s. *Ris.* $s = \frac{1}{2} g' g'' sen a$.

TRIGONOMETRIA SFERICA

Nozioni preliminari relative alle proprietà geometriche dei Triangoli sferici

856. La Trigonometria sferica risolve i triangoli, che sulla superficie della sfera vengon formati dall'intersezione di tre archi di circoli massimi. Come i principj da cui si parte sono specialmente fondati sulle proprietà geometriche di questi triangoli, cominceremo dal fare una breve esposizione delle medesime, avendo noi a bella posta differito a parlarne fin quì (751), perchè quel tanto d' essenziale che conveniva dirne, più d'appresso si trovasse al trattato di quella scienza, che non solo immediatamente, ma unicamente ne scaturisce. I Giovani, che non fossero in grado di proseguire il corso oltre il primo anno del loro studio, non dovranno lasciar di percorrere anche questo piccol trattato, benchè impresso in carattere minore; senza di che privi rimarrebbero di cognizioni, le quali mentre da un lato servono di compimento alla Geometria, sono dall'altro indispensabili per la piena e chiara intelligenza dell'alta Geodesia, e dei principj più ovvj della Sfera armillare, della Geografia e della Astronomia. Prevengo intanto che se talvolta nominerò circoli o archi senz'altro aggiunto, intenderò sempre parlare di circoli massimi o d'archi dei medesimi, i soli contemplati nella Trigonometria.

857. Poichè tutti i circoli massimi hanno per centro comune il centro medesimo della sfera (751), è chiaro 1°. che tutti i loro piani debbono reciprocamente intersecarsi; 2°. che la loro intersezione deve essere sempre un diametro; 3°. che all'estremità di questo diametro debbono sulla superficie della sfera intersecarsi le loro circonferenze. Quindi 4°. se due archi AP*a*, AM*a* si sono intersecati nel punto A, non s'intersecheranno di bel nuovo che nel punto *a* diametralmente opposto, a 180° di distanza da A. Perciò 5°. due soli archi non possono in verun modo chiudere una porzione di superficie della sfera se ciascuno non sia di 180°, nel qual caso la superficie compresa prende il nome di *fuso*; onde 6°. se i due archi sieno minori di 180°, vi vorrà il concorso di un terzo arco per chiudere una qualche parte della superficie della sfera, con che verrà a formarsi il triangolo sferico, ciascun dei cui lati dovrà esser perciò minore di 180°. L'altro triangolo, che la rimanente porzione della circonferenza del circolo a cui appartiene il terzo arco, farebbe coi primi due, e che avrebbe perciò un lato maggiore di 180°, ma l'angolo opposto rientrante, generalmente non si considera; e noi non ci occuperemo che del primo. F. 125

858. Come infiniti sono i circoli massimi che possono aver comune uno stesso diametro della sfera, così infinite saranno le circonferenze che potranno tra loro intersecarsi in due punti diametralmente opposti della sua superficie, ove tutte si ta-

glieranno in due parti eguali. All' incontro per due punti non diametralmente opposti può bensì farsi passare un' infinità d'archi di circoli minori, come è evidente; non vi si potrà però far passare che un solo arco di circolo massimo; diversamente si avrebbe una porzione di superficie chiusa fra due archi ciascuno minore di 180°, il che si è veduto impossibile. Quest' arco poi non solo sarà unico nella sua specie, ma di più, poichè ha per raggio il raggio della sfera, perciò, siccome a suo luogo abbiam mostrato (823), sarà men lungo di tutti gli archi di circoli minori che potrebber farsi passare pei medesimi punti, e che tutti hanno un raggio minore. Quindi *l' arco di circolo massimo che congiunge due punti sulla superficie della sfera, misura la distanza dall' uno all' altro sulla superficie medesima.*

F.126 859. Si formi ora l' angolo sferico EBG con l' incontro in B dei due archi BE, BG, e se ne voglia la misura. È chiaro che la maggiore o minore ampiezza di quest' angolo dipenderà dalla maggiore o minore inclinazione dei piani dei due circoli, cui appartengon gli archi dai quali è formato: quindi potrà valutarsi nel modo medesimo col quale si è veduto dover valutarsi quell' inclinazione (701). Prese frattanto sopra di questi archi, o sopra i loro prolungamenti se occorra, le porzioni BA, BC eguali ciascuna a 90°, e condotti i raggi BD, AD, CD, saranno retti gli angoli ADB, CDB, cioè ambedue i raggi AD, CD saranno normali in un medesimo punto D al raggio BD, comune intersezione dei piani. Dunque il loro angolo ADC misurerà l' inclinazione di questi piani (*ivi*), e perciò l' angolo sferico EBG. Ma l' angolo ADC è misurato dall' arco AC (565), dunque *la misura di un angolo sferico* EBG *sarà l' arco di circolo* AC *compreso fra i suoi lati a* 90° *dal vertice.*

860. Perciò 1°. ogni angolo sferico, e molto più la differenza di due, è $< 180°$; 2°. un arco che cada sopra un altro forma due angoli la cui somma è 180°; 3°. prolungato quest' arco, gli angoli opposti sono eguali, e la somma degli angoli sferici intorno ad un punto è 360°.

861. Di tutti gli infiniti diametri che attraversando il centro della sfera attraversano dunque altresì il piano di qualunque circolo massimo, quello che sorge normalmente su questo piano si chiama *asse* del circolo, e le sue estremità se ne dicono i *poli*. E poichè uno stesso diametro non può esser normale nel tempo stesso ai piani di due circoli massimi, i quali dovendo fra loro intersecarsi (857.1°) non possono esser mai paralleli, così ogni circolo massimo ha poli ed asse suoi proprj, come ogni diametro è asse di un determinato e distinto circolo massimo.

125 862. Abbiasi frattanto il circolo AMaEA e P*p* ne sia l' asse, e quindi P, *p* ne sieno i poli. Se dal polo P si conduca ad un punto qualunque A del circolo l' arco PA, questo misurerà l' angolo retto ACP; perciò 1°. *tutti gli archi che dai poli di un circolo scendono sulla di lui circonferenza son di* 90°. Inoltre il piano del circolo dell' arco AP passando per P e per C, si stende necessariamente lungo il diametro o asse P*p* normale al circolo dato, al cui piano è dunque esso pure normale (703). Sarà quindi retto l' angolo sferico PAM (859); perciò 2°. *tutti gli archi*

F. 125

che scendono dal polo di un circolo son normali alla di lui circonferenza. All' opposto se l' arco AA' sia normale all' arco AM, il suo piano che deve passare necessariamente per C conterrà l' asse Pp; laonde l' arco normale AA' prolungato dovrà passare per P; dunque 3°. *se un arco sia normale ad un altro, prolungato quant' occorra incontrerà il polo di quello*, il che visibilmente accaderà a 90° di distanza dal punto della comune intersezione dei due archi. Perciò 4°. *se due circonferenze son fra loro normali, i poli dell' una si troveranno sull' altra a 90° dalla loro intersezione;* 5°. *se due archi sieno normali ad un terzo dovranno incrociarsi al di lui polo.* Infatti questo deve trovarsi nel prolungamento dell' uno e dell' altro arco, e perciò nella loro comune intersezione. Infine 6°. *se da uno stesso punto A scendano gli archi AB, AD ambedue di 90°, A sarà polo del circolo che passa per B, D.* Infatti immaginati nella sfera tre raggi AC, BC, DC, che dal centro C vadano ai tre punti A, B, D, i due CB, CD faranno angolo retto col terzo AC, che essendo perciò normale al piano del circolo che passa per B, D (705), ne sarà dunque l' asse, e l' estremità A ne sarà il polo.

127

Supposti perciò di 90° i due lati AB, AD dell' angolo sferico BAD, A sarà dunque il polo dell' arco BD, e ciascuno dei due lati sarà normale a BD, ed avrà il suo polo sul prolungamento di quest' arco, l' uno in E a 90° da B, l' altro in F a 90° da D (862.3°), e in conseguenza a una distanza fra loro FE=BD. Ma BD misura l' angolo BAD, dunque *l' angolo sferico è altresì misurato dall' arco interposto fra i poli dei suoi lati.*

863. Sia adesso il triangolo sferico qualunque BAD. Condotti dal centro C della sfera i raggi CA, CD, CB ai tre vertici, verremo a formare in C un angolo solido a tre faccie, i cui tre angoli piani avranno respettivamente per misura i lati AD, AB, BD del triangolo dato. Come frattanto niuno di questi tre angoli piani può superare o eguagliar la somma degli altri due (717), nè la somma dei tre può giungere a quattro retti (718), altrettanto dunque avrà luogo rapporto ai lati del triangolo che gli misurano; e perciò 1°. *in ogni triangolo sferico ciascun lato è sempre minore della somma degli altri due;* 2°. *la somma dei tre lati è minore di 360°.*

864. Abbiasi in ultimo il triangolo qualunque ACB, dai cui vertici come poli si descrivano e quindi si prolunghino fino all' incontro scambievole gli archi FE, ED, DF. Poichè A, C sono a 90° dal punto F, sarà F il polo di AC, come D, E lo saranno di CB, BA (862.6°): perciò prolungati in G, H ed in M, K i lati di ACB fino all' incontro di DEF, sarà DH=FG=90° (862.1°), e DH+FG=DF+GH=180°, onde DF sarà il supplemento di C=GH (859), come FE, ED lo saranno di A, B. Del pari, poichè AK=BM=90°, sarà AK+BM=MK+AB=180°, onde MK=E sarà supplemento di AB, come D, F saranno supplementi di CB, AC.

128

865. Questa singolar proprietà del triangolo DEF di aver cioè i lati e gli angoli respettivamente supplementi degli angoli e lati del dato triangolo ABC, gli ha acquistato il nome di *triangolo supplementario* o *polare*. Frattanto poichè A=180°—EF,

F. 128 $B=180^\circ-ED$, $C=180^\circ-DF$, sarà $A+B+C=540^\circ-(EF+ED+DF)$. Ma $EF+ED+DF$ è $< 360^\circ$ (864.2°), dunque $A+B+C$ sarà $>180^\circ$, cioè *la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di 180°*. E poichè ciascuno di essi è $<180^\circ$ (860.1°), perciò la somma sarà sempre contenuta fra 180° e 540°. Non può dunque nel triangolo sferico, come nel rettilineo, dedursi il valore del terzo angolo dalla somma degli altri due; e possono i tre angoli essere acuti, retti e ottusi: ben è vero che la somma di due è sempre $>90^\circ$ se l'altro sia eguale a 90°, o $<90^\circ$.

866. Si avrà pure $A+B-C=180^\circ-(EF+ED-DF)$; e poichè $EF+ED>DF$ (863.1°), e perciò $EF+ED-DF>0$, sarà dunque $A+B-C<180^\circ$, cioè *in ogni triangolo sferico la differenza fra un angolo e la somma degli altri due è sempre $<180^\circ$*. Quindi 1°. se il triangolo è rettangolo in C avremo $A+B<270^\circ$; ma come abbiamo veduto (865) deve aversi $A+B>90^\circ$, dunque *in ogni triangolo sferico rettangolo la somma dei due angoli obliqui è sempre $>90^\circ$ e $<270^\circ$*; 2°. se il triangolo è rettangolo in B, avremo $A-C<90^\circ$; e perciò *in ogni triangolo sferico rettangolo, la differenza dei due angoli obliqui è $<90^\circ$*.

129 867. Infine prolungati a 180° in A i lati DB, DC (857.4°) del triangolo BCD, e parimente fino a 180° in E i lati BC, BD, e fino a 180° in F gli archi CA, CE, avremo $DBA=BAE$, $DCA=CAF$, $BCE=CEF$, e quindi tolte le parti comuni sarà $BD=AE$, $CD=AF$, $BC=FE$, cioè il triangolo BCD sarà eguale al triangolo AFE, e perciò il fuso $CAFEC=CAE+CBD$. Dunque i tre fusi DBACD, BCEDB, CAFEC presi insieme saranno eguali alla superficie $2r^2\pi$ (764) dell'emisfero DBAED più due volte il triangolo BCD. Or poichè supposti a', a'', a''' gli archi che misurano gli angoli A, B, C (859), s la superficie della sfera, s', s'', s''' quella dei tre fusi, deve aversi $s:s'::2r\pi:a'$ e quindi $s'=\frac{a's}{2r\pi}=\frac{4a'r^2\pi}{2r\pi}=2a'r$, come nel modo stesso $s''=2a''r$, $s'''=2a'''r$; dunque $2r(a'+a''+a''')-2BCD=2r^2\pi$, e $BCD=r(a'+a''+a'''-r\pi)$ superficie del triangolo; perciò *la superficie d'un triangolo sferico corrisponde al rettangolo del raggio nella somma dei tre archi che misurano i tre angoli diminuita d'una mezza circonferenza*.

Risoluzione dei Triangoli sferici

130 868. Abbiasi il triangolo sferico GFH. Se dal vertice F si conduca sul lato opposto GH l'arco normale FD, e dal centro E della sfera i raggi EF, ED, EH, inoltre da F sul raggio DE la perpendicolare FK, e lungo questa normalmente al raggio EH il piano triangolare FAK, saranno FA ed AK ambedue normali ad EH (693), e perciò il loro angolo FAK misurerà l'inclinazione dei due settori circolari HEF, DEH (701), ed equivarrà in conseguenza all'angolo sferico GHF (859) che denomineremo con H. Inoltre saranno (779) $FK=sen FD$, $FA=sen HF$; e poichè il triangolo FAK rettangolo in K dà (838) $FA:FK::1:sen FAK$, quindi per il triangolo

sferico rettangolo FDH sussisterà sempre la proporzione $sen\mathrm{HF} : sen\mathrm{FD} :: 1 : sen\mathrm{H}$. Fig. 130
Dunque egualmente per l'altro triangolo parimente rettangolo FDG dovrà sussistere l'altra proporzione $sen\mathrm{FG} : sen\mathrm{FD} :: 1 : sen\mathrm{G}$; e poichè queste due danno la terza $sen\mathrm{HF} : sen\mathrm{FG} :: sen\mathrm{G} : sen\mathrm{H}$; perciò *in ogni triangolo sferico i seni dei lati stanno fra loro come i seni degli angoli opposti.*

869. Se dunque come nella trigonometria rettilinea si chiamino g, g', g'' i tre lati, a, a', a'' i respettivi angoli opposti, avremo

I.ª $sen g\, sen a' = sen g'\, sen a$; $sen g\, sen a'' = sen g''\, sen a$; $sen g'\, sen a'' = sen g''\, sen a'$

e ciascuna di queste tre formule scioglierà il problema nel caso che dati due lati ed uno degli angoli opposti si cerchi l'altro angolo opposto, o dati due angoli e un lato opposto si cerchi l'altro lato opposto.

870. Ripreso il triangolo GFH, e condotte GA, GB tangenti nel punto comune G l'una all'arco GF, l'altra all'arco GH, si prolunghino fino al respettivo incontro con le medesime in A e in B i raggi EF, EH. Le due tangenti trovandosi l'una nel piano del settore circolare GEF, l'altra in quello del settore circolare GEH, ed essendo ambedue normali al raggio GE (538), comune intersezione dei due settori, faranno fra loro un angolo AGB corrispondente all'inclinazione dei piani dei due settori (701), e quindi all'angolo sferico HGF (859). Frattanto i triangoli piani AGB, AEB col lato comune AB daranno (843) $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AG}^2 + \mathrm{BG}^2 - 2\mathrm{AG} \times \mathrm{BG} \cos \mathrm{AGB} = \mathrm{AE}^2 + \mathrm{BE}^2 - 2\mathrm{AE} \times \mathrm{BE} \cos \mathrm{FEH}$. Ora in forza della fatta costruzione $\mathrm{AG} = tang\,\mathrm{GF}$, $\mathrm{BG} = tang\,\mathrm{GH}$, $\mathrm{AE} = sec\,\mathrm{GF}$, $\mathrm{BE} = sec\,\mathrm{GH}$, e si ha di più $ang.\mathrm{FEH} = arc.\mathrm{FH}$. Se dunque si ponga $\mathrm{AGB} = \mathrm{FGH} = a$, $\mathrm{FH} = g$, $\mathrm{GF} = g'$, $\mathrm{GH} = g''$, e s'introducano i valori dei quadrati delle secanti (784. 2.ª) troveremo $tang g'\, tang g'' \cos a = -1 + sec g'\, sec g'' \cos g$, ossia $\frac{sen g'\, sen g'' \cos a}{\cos g' \cos g''} = -1 + \frac{\cos g}{\cos g' \cos g''}$, e quindi

II.ª $\cos a\, sen g'\, sen g'' = \cos g - \cos g' \cos g''$

formula che il triangolo supplementario (865) cangia nella

III.ª $\cos g\, sen a'\, sen a'' = \cos a + \cos a' \cos a''$.

Con queste si risolve il problema quando o dati i tre lati si cerchi un angolo, o dati i tre angoli si cerchi un lato, o dati un angolo e due qualunque dei lati, oppure due angoli e uno qualunque dei lati, si cerchi nell'un caso il terzo lato, nell'altro il terzo angolo. Da queste si apprende pure che *se due triangoli sferici abbiano tutti i lati respettivamente eguali avranno eguali anche gli angoli, e reciprocamente;* onde nell'uno e nell'altro caso saranno eguali.

871. Se nella II.ª si pone g'', a'', per g, a e viceversa, avremo $\cos a''\, sen g'\, sen g = \cos g'' - \cos g' \cos g$, e posti nella II.ª il valore di $\cos g''$ preso da questa, e di $sen g'' = sen g\, sen a'' : sen a$ (869), troveremo $\cot a\, sen a'' = \frac{\cot g}{sen g'}(1 - \cos^2 g') - \cos g' \cos a''$, cioè

IV.ª $\cot a\, sen a'' = \cot g\, sen g' - \cos g' \cos a''$

formula che risolve il triangolo nei casi che dati due lati ed uno degli angoli opposti si cerchi l'angolo compreso, o dati due lati e l'angolo compreso si cerchi uno

degli angoli opposti, o dato un lato e gli angoli adiacenti si cerchi uno degli altri due lati, o dato infine un lato, l'angolo opposto ed uno degli angoli adiacenti, si cerchi il lato opposto all'altro angolo adiacente. Mostra in oltre che *due triangoli sferici sono eguali, se abbiano respettivamente due lati e l'angolo compreso eguale, o eguali un lato e gli angoli adiacenti.*

872. Con queste quattro formule, date tre qualunque delle sei quantità a, a', a'', g, g', g'', posson dunque sempre trovarsi le altre tre, e il problema trigonometrico relativo a qual si voglia triangolo sferico è pienamente risoluto. Ma le ultime tre posson ridursi nei diversi casi in forma più comoda per il calcolo logaritmico, operando presso a poco nel modo che per lo stesso oggetto si tenne nella Trigonometria rettilinea (844).

Vogliasi dalla II.ª il valore dell'angolo a. Avremo $(1+\cos a)\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'' =$ (797. 88.ª) $2\cos^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'' = \cos g - (\cos g'\cos g'' - \operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'') = \cos g - \cos(g'+g'') =$ (796. 82.ª) $2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(g+g'+g'')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(g'+g''-g)$, ossia, fatto $g+g'+g''=2q$, 1.ª $\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen} q\operatorname{sen}(q-g)}{\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g''}}$, ove non ha luogo il doppio segno, perchè $\frac{1}{2}a$ è sempre $<90°$ (860. 1.°), e $\cos\frac{1}{2}a$ non può dunque esser negativo. Di qui pure $(1-\cos^2\frac{1}{2}a)\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'' = \operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'' = \operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g'' - \operatorname{sen} q\operatorname{sen}(q-g) =$ (795. 79.ª) $\frac{1}{2}\cos(g'-g'') - \frac{1}{2}\cos(g'+g'') - \frac{1}{2}\cos g + \frac{1}{2}\cos(2q-g) = \frac{1}{2}\cos(g'-g'') - \frac{1}{2}\cos g =$ (796. 82.ª) $\operatorname{sen}\frac{1}{2}(g+g'-g'')\operatorname{sen}\frac{1}{2}(g-g'+g'') = \operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')$; d'onde 2.ª $\operatorname{sen}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')}{\operatorname{sen} g'\operatorname{sen} g''}}$. Dividendo infine la 2.ª per la 1.ª, avremo 3.ª $\operatorname{tang}\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(q-g')\operatorname{sen}(q-g'')}{\operatorname{sen} q\operatorname{sen}(q-g)}}$, formule che danno gli angoli quando si hanno i tre lati.

873. Fatto $a+a'+a''=2m$, il triangolo supplementario (865) cangia nelle seguenti le tre formule precedenti: 1.ª $\operatorname{sen}\frac{1}{2}g = \sqrt{\frac{-\cos m\cos(m-a)}{\operatorname{sen} a'\operatorname{sen} a''}}$; 2.ª $\cos\frac{1}{2}g = \sqrt{\frac{\cos(m-a')\cos(m-a'')}{\operatorname{sen} a'\operatorname{sen} a''}}$; 3.ª $\operatorname{tang}\frac{1}{2}g = \sqrt{\frac{-\cos m\cos(m-a)}{\cos(m-a')\cos(m-a'')}}$, ove è da avvertirsi che il segno negativo non rende immaginario il radicale, perchè m è sempre $>90°$ e $<270°$ (865), e in conseguenza $\cos m$ è sempre negativo; e d'altronde essendo $m-a = \frac{a'+a''-a}{2}$, ed avendosi (866) $a'+a''-a<180°$, $\cos(m-a)$, come pure $\cos(m-a')$ e $\cos(m-a'')$ son sempre positivi. Queste formule danno dunque il valore del lato qualunque g, quando si conoscono i i tre angoli; del resto si sarebbero egualmente ottenute operando sulla III.ª nel modo che abbiamo fatto sulla II.ª (872).

874. Vogliasi parimente dalla II.ª il valor del lato g opposto all'angolo a. Fatto $\operatorname{tang} g''\cos a = \operatorname{tang}\varphi$, verrà $\cos g = \cos g''(\operatorname{sen} g'\operatorname{tang}\varphi + \cos g') = \frac{\cos g''}{\cos\varphi} \times \ldots$ $(\operatorname{sen} g'\operatorname{sen}\varphi + \cos g'\cos\varphi) =$ (788. 39.ª) $\frac{\cos g''}{\cos\varphi}\cos(g' \backsim \varphi)$.

875. Dalla stessa vogliasi g'. La formula precedente darà $\cos(g' \backsim \varphi) = \cos g \cos\varphi : \cos g''$.

876. Vogliasi dalla III.ª a oppure a'. Fatto $\tan g a'' \cos g = \cot\varphi$, troveremo per il 1.° caso $\cos a = \cos a'' \,\mathrm{sen}(a' - \varphi) : \mathrm{sen}\varphi$; d'onde per il 2.° $\mathrm{sen}(a' - \varphi) = \mathrm{sen}\varphi \cos a : \cos a''$.

877. Nel modo stesso, fatto $\tan g g \cos a'' = \tan g \varphi$, avremo dalla IV.ª $\cot a = \cot a'' \,\mathrm{sen}(g' - \varphi) : \mathrm{sen}\varphi$ per l'angolo a, e $\mathrm{sen}(g' - \varphi) = \tan g a'' \cot a \,\mathrm{sen}\varphi$ per il lato g'. E fatto $\tan g a \cos g' = \cot\varphi$, avremo $\cot g = \cot g' \cos(a'' \backsim \varphi) : \cos\varphi$ per il lato g, e $\cos(a'' \backsim \varphi) = \tan g g' \cot g \cos\varphi$ per l'angolo a''.

Avuta col mezzo o di queste, o delle formule precedenti la quantità cercata, la I.ª (869) farà sempre conoscere le altre due.

878. Scendiamo adesso a dei casi più particolari, e sia in primo luogo $g = g'$. La II.ª (870) darà $\cos a \,\mathrm{sen} g' \,\mathrm{sen} g'' = \cos g'(1 - \cos g'') = (797.89.^{a})\, 2\cos g' \,\mathrm{sen}^2 \tfrac{1}{2} g''$; e poichè (791. 46.ª) $\mathrm{sen} g'' = 2\,\mathrm{sen} \tfrac{1}{2} g'' \cos \tfrac{1}{2} g''$, avremo per l'angolo opposto a g, uno dei lati eguali, $\cos a = \cot g' \tan g \tfrac{1}{2} g''$. E qui potrà osservarsi che cangiando a in a', il secondo membro non varia (840), il che dà $\cos a' = \cos a$, ed $a' = a$; perciò *nel triangolo sferico isoscele, come nel rettilineo, gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali.*

879. Sia $g' = g''$. Avremo dalla II.ª (870) $\cos g = \cos^2 g' + \mathrm{sen}^2 g' \cos a$ e quindi $1 - \cos g = \mathrm{sen}^2 g'(1 - \cos a)$, d'onde (797. 89.ª) $\mathrm{sen} \tfrac{1}{2} g = \mathrm{sen} g' \,\mathrm{sen} \tfrac{1}{2} a$, e per l'angolo compreso fra i lati eguali $\mathrm{sen} \tfrac{1}{2} a = \mathrm{sen} \tfrac{1}{2} g : \mathrm{sen} g'$.

880. Sia in secondo luogo $a = a'$; la III.ª darà $\cos g \,\mathrm{sen} a' \,\mathrm{sen} a'' = \cos a'(1 + \cos a'') = (797.88.^{a})\, 2\cos a' \cos^2 \tfrac{1}{2} a''$; d'onde, operando come sopra, otterremo per il lato opposto ad a, uno degli angoli eguali, $\cos g = \cot a' \cot \tfrac{1}{2} a''$. E quì pure si noterà che cangiato g in g', si avrebbe egualmente $\cos g' = \cot a' \cot \tfrac{1}{2} a'' = \cos g$, dunque $g' = g$; e perciò *se un triangolo sferico abbia due angoli eguali, avrà eguali anche i lati opposti, e sarà isoscele*. Di qui si ha pure che in ogni triangolo sferico ad angoli maggiori sono opposti lati maggiori e viceversa. Infatti se nel triangolo ABE abbiasi l'angolo A$>$B, condotto l'arco AD in modo che sia BAD$=$B, il nuovo triangolo ADB sarà isoscele ed avremo BD$=$AD, d'onde BE$=$AD$+$DE. Ma si ha AD$+$DE$>$AE, dunque BE$>$AE. Fig. 127

881. Sia $a' = a''$; la III.ª (870) darà $\cos g \,\mathrm{sen}^2 a' = \cos a + \cos^2 a'$; d'onde $1 + \cos a = \mathrm{sen}^2 a'(1 + \cos g)$, ovvero (797. 88.ª) $\cos \tfrac{1}{2} a = \mathrm{sen} a' \cos \tfrac{1}{2} g$, e quindi per la base del triangolo isoscele $\cos \tfrac{1}{2} g = \cos \tfrac{1}{2} a : \mathrm{sen} a'$.

882. Sia infine $g = g' = g''$; il valor già trovato di $\cos a$ (878) si cangerà in $\cos a = \cot g \tan g \tfrac{1}{2} g = (797.92.^{a}) \dfrac{\cot g \,\mathrm{sen} g}{1 + \cos g} = \dfrac{\cos g}{1 + \cos g}$; e se $a = a' = a''$, quello di $\cos g$ (880) si cangerà in $\cos g = \cot a \cot \tfrac{1}{2} a = (797.93.^{a}) \dfrac{\cot a \,\mathrm{sen} a}{1 - \cos a} = \dfrac{\cos a.}{1 - \cos a}$, valori che spettando manifestamente a ciascuno dei tre angoli nel primo caso, ed a ciascuno dei tre lati nel secondo, mostrano in oltre che *ogni triangolo sferico equilatero è ancora equiangolo, e reciprocamente.*

883. Talvolta non son dati che un lato e l'angolo opposto, e in luogo di un altro lato o di un altr'angolo non si ha che la somma o la differenza degli altri due angoli, o degli altri due lati. Il triangolo non è men risolubile in questi due casi. Infatti se nel valor di $sen\frac{1}{2}(a+a')=sen\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}a'+sen\frac{1}{2}a'\cos\frac{1}{2}a$ si pongano i valori già trovati (872) di $sen\frac{1}{2}a$, $\cos\frac{1}{2}a$, e quelli di $sen\frac{1}{2}a'$, $\cos\frac{1}{2}a'$ che si hanno dai due precedenti, cangiando a in a', g in g', e g' in g, troveremo dopo facili riduzioni $sen\frac{1}{2}(a+a')=\left\{ sen(q-g')+sen(q-g) \right\}\frac{1}{seng''}\sqrt{\frac{senq\,sen(q-g'')}{seng\,seng'}}$. Or come $\sqrt{\frac{senq\,sen(q-g)}{seng'\,seng''}}=(872.1.^a)\cos\frac{1}{2}a$, così sarà $\sqrt{\frac{senq\,sen(q-g'')}{seng\,seng'}}=\cos\frac{1}{2}a''$; ed inoltre $sen(q-g')+sen(q-g)=(796.80.^a)\ 2sen\frac{1}{2}(2q-g-g')\cos\frac{1}{2}(g-g')=$ $2sen\frac{1}{2}g''\cos\frac{1}{2}(g-g')=(791.46.^a)\ \frac{seng''}{\cos\frac{1}{2}g''}\cos\frac{1}{2}(g-g')$. Sostituendo dunque avremo $sen\frac{1}{2}(a+a')=\frac{\cos\frac{1}{2}a''}{\cos\frac{1}{2}g''}\cos\frac{1}{2}(g-g')$. In un modo affatto simile potranno aversi analoghi valori per $sen\frac{1}{2}(a-a')$, $\cos\frac{1}{2}(a+a')$, $\cos\frac{1}{2}(a-a')$; con che porremo insieme il seguente sistema di formule dovute al celebre *Gauss*:

$$sen\tfrac{1}{2}(a+a')\cos\tfrac{1}{2}g''=\cos\tfrac{1}{2}a''\cos\tfrac{1}{2}(g-g');\ \cos\tfrac{1}{2}(a+a')\cos\tfrac{1}{2}g''=sen\tfrac{1}{2}a''\cos\tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$sen\tfrac{1}{2}(a-a')sen\tfrac{1}{2}g''=\cos\tfrac{1}{2}a''sen\tfrac{1}{2}(g-g');\ \cos\tfrac{1}{2}(a-a')sen\tfrac{1}{2}g''=sen\tfrac{1}{2}a''sen\tfrac{1}{2}(g+g')$$

le quali opportunamente combinate risolvono il problema nei casi proposti.

Così se si abbiano a'', g'' e la differenza $g-g'$, la 1.ª e 3.ª daranno i valori di $\frac{1}{2}(a+a')$, $\frac{1}{2}(a-a')$, che sommati e sottratti faranno conoscere a ed a'.

884. Se le formule precedenti si dividano l'una per l'altra, si perverrà alle seguenti proporzioni conosciute col nome d'analogie di *Nepero*.

$$tang\tfrac{1}{2}(a-a') : \cot\tfrac{1}{2}a'' :: sen\tfrac{1}{2}(g-g') : sen\tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang\tfrac{1}{2}(a+a') : \cot\tfrac{1}{2}a'' :: \cos\tfrac{1}{2}(g-g') : \cos\tfrac{1}{2}(g+g')$$
$$tang\tfrac{1}{2}(g-g') : tang\tfrac{1}{2}g'' :: sen\tfrac{1}{2}(a-a') : sen\tfrac{1}{2}(a+a')$$
$$tang\tfrac{1}{2}(g+g') : tang\tfrac{1}{2}g'' :: \cos\tfrac{1}{2}(a-a') : \cos\tfrac{1}{2}(a+a')$$

che risolvono con molta facilità il triangolo nei casi già contemplati anche sopra (871), che si abbiano cioè due lati e l'angolo compreso, o un lato e i due angoli adiacenti.

885. Fin qui il triangolo sferico si è considerato obliquangolo o qualunque. Se è rettangolo le formule divengono molto più semplici. Infatti supposto a l'angolo retto, e cangiata in h la denominazione g del lato opposto, avremo

dalla I.ª $seng'=senh\,sena'$	dalla III.ª $\cos h=\cot a'\cot a''$
oppure $seng''=senh\,sena''$	dalla IV.ª $tang g'=tang h\cos a''$
dalla II.ª $\cos h=\cos g'\cos g''$	oppure $tang g''=tang h\cos a'$

la quale ultima equazione nasce dalla precedente permutandovi g' ed a'' in g'' ed a' (840).

Infine se nella III.ª e IV.ª si cangi a'' in a, a in a'' e per conseguenza g in g'' supposto sempre $a=90°$, troveremo

$$\cos a'' = \cos g'' \, \mathrm{sen}\, a' \quad \text{oppure} \quad \cos a' = \cos g' \, \mathrm{sen}\, a''$$
$$\mathrm{tang}\, g'' = \mathrm{tang}\, a'' \, \mathrm{sen}\, g' \qquad \qquad \mathrm{tang}\, g' = \mathrm{tang}\, a' \, \mathrm{sen}\, g''$$

Con queste dieci formule, date due soltanto delle cinque quantità h, g', g'', a', a'', si avrà qualunque delle altre tre.

886. Quì pure se i seni e i coseni degli angoli o lati cercati sieno molto grandi, e si esiga un estremo rigore, converrà ricorrere alle solite trasformazioni (847). La formula $\mathrm{sen}\, g' = \mathrm{sen}\, h \, \mathrm{sen}\, a'$ dando $1 : \mathrm{sen}\, h :: \mathrm{sen}\, a' : \mathrm{sen}\, g'$, avremo $1 + \mathrm{sen}\, h : 1 - \mathrm{sen}\, h :: \mathrm{sen}\, a' + \mathrm{sen}\, g' : \mathrm{sen}\, a' - \mathrm{sen}\, g'$; d'onde $\frac{1+\mathrm{sen}\, h}{1-\mathrm{sen}\, h} = \frac{\mathrm{sen}\, a' + \mathrm{sen}\, g'}{\mathrm{sen}\, a' - \mathrm{sen}\, g'}$, ossia (799.104ª, e 798.94ª) $\mathrm{tang}(45° + \frac{1}{2}h) = \pm \sqrt{(\mathrm{tang}\, \frac{1}{2}(a'+g') : \mathrm{tang}\, \frac{1}{2}(a'-g'))}$. Si avrà pure $1 : \mathrm{sen}\, a' :: \mathrm{sen}\, h : \mathrm{sen}\, g'$, e di quì nel modo che sopra $\mathrm{tang}(45° + \frac{1}{2}a') = \pm \ldots \sqrt{(\mathrm{tang}\, \frac{1}{2}(h+g') : \mathrm{tang}\, \frac{1}{2}(h-g'))}$, formule che danno h ed a'. Volendo g', potremo con h ed a' aver g'' da $\mathrm{tang}\, g'' = \mathrm{tang}\, h \cos a'$ (885), e quindi g' da $\cos h = \cos g' \cos g''$.

887. Similmente la formula $\cos h = \cos g' \cos g''$ dà $1 : \cos g' :: \cos g'' : \cos h$, e di quì $\frac{1+\cos g'}{1-\cos g'} = \frac{\cos g'' + \cos h}{\cos g'' - \cos h}$, ovvero (799.104ª, e 798.97ª) $\cot \frac{1}{2} g' = \sqrt{\cot \frac{1}{2}(h+g'') \cot \frac{1}{2}(h-g'')}$; d'onde g'. Permutando g' in g'' e g'' in g', si avrà pure g''. Volendo h, porremo $\cos g' \cos g'' = \mathrm{tang}^2 \varphi$, ed avremo $1 + \cos h = 1 + \mathrm{tang}^2 \varphi$, ossia (797.88ª, e 784.2ª) $2\cos^2 \frac{1}{2} h = \sec^2 \varphi$; d'onde $\cos \frac{1}{2} h =$ (787.29ª) $\frac{1}{\cos\varphi \sqrt{2}}$.

888. La formula $\cos h = \cot a' \cot a''$ cangiata in $\cot a'' = \mathrm{tang}\, a' \cos h$ dà $1 : \cos h :: \mathrm{tang}\, a' : \cot a''$, ed $\frac{1+\cos h}{1-\cos h} = \frac{\mathrm{tang}\, a' + \cot a''}{\mathrm{tang}\, a' - \cot a''} = -\frac{1 + \mathrm{tang}\, a' \mathrm{tang}\, a''}{1 - \mathrm{tang}\, a' \mathrm{tang}\, a''} =$ (800.112ª) $-\frac{\cos(a' \backsim a'')}{\cos(a'+a'')} = \cot^2 \frac{1}{2} h$; d'onde $\cot \frac{1}{2} h = \sqrt{-\frac{\cos(a' \backsim a'')}{\cos(a'+a'')}}$, ove il radicale non è immaginario perchè con $a = 90°$ deve sempre aversi (866) $a' \backsim a'' < 90°$, $a' + a'' > 90°$ e $< 270°$, e quindi $\cos(a' \backsim a'')$ positivo, e $\cos(a'+a'')$ negativo (793.3º).

889. Infine da $\mathrm{tang}\, g' = \mathrm{tang}\, h \cos a''$ traendosi $1 : \cos a'' :: \mathrm{tang}\, h : \mathrm{tang}\, g'$, si concluderà come nel caso precedente $\mathrm{tang}\, \frac{1}{2} a'' = \sqrt{\frac{\mathrm{sen}(h-g')}{\mathrm{sen}(h+g')}}$, formula che darà a'', e cangiati al solito a'' e g' in a', e g'', avremo anche a'. Del resto le più di queste trasformate servono ancora a risolvere il triangolo rettangolo, qualora in luogo delle due quantità date non si conoscano che la loro somma e la lor differenza.

890. Anche la formula Iª. (869) dei triangoli obliquangoli, che quando si abbiano i dati necessarj serve egualmente per i rettangoli, cade visibilmente tra quelle che esigono nei casi sopraddetti (886) una trasformazione. Facile è peraltro vedere come l' analogie di *Nepero* (884) convenientemente scelte ed adoperate, suppliscono da se medesime a questo bisogno.

891. Non insisteremo sulle applicazioni numeriche di queste formule, bastan-

do per la cognizione e l'esercizio del calcolo, quelle che abbiamo già date nella Trigonometria rettilinea. Aggiungeremo bensì le due seguenti necessarissime avvertenze. In primo luogo che qualora, fatte nel secondo membro le opportune sostituzioni dei dati valori, qualche funzione risulti negativa, e renda tutto intero il membro negativo, prima di passare al calcolo si cangerà l'equazione di segno, e quindi col mezzo di una delle formule già date (793.6°), si trasformerà in positiva la funzione incognita del primo membro, che la precedente mutazione di segno avrà resa negativa. Così se in $cos g' = \frac{cos h}{cos g''}$, si abbia $h = 127° 25' 20''$, $g'' = 13° 17' 20''$, sarà $cos h = -sen\ 37°\ 25'\ 20''$ (792.54 e quindi $cos g' = -\frac{sen\ 37° 25' 20''}{cos\ 13° 17' 20''}$.

Faremo dunque $-cos g' = \frac{sen\ 37°\ 25'\ 20''}{cos\ 13°\ 17'\ 20''}$, e poichè (793.6°) $-cos g' = cos(180° \pm g')$, porremo infine $cos(180° \pm g') = \frac{sen\ 37°\ 25'\ 20''}{cos\ 13°\ 17'\ 20''}$. Calcolando si trova ... $cos(180° \pm g') = cos\ 51°\ 21'\ 41'',8$. Sarà dunque $180° \pm g' = 51° 21' 41'',8$, e quindi $g' = \pm 51° 21' 41'',8 \mp 180$, cioè, escluso il risultamento negativo che visibilmente non servirebbe, $g' = 128°\ 38'\ 18'',2$. Noi abbiamo già praticato anche altrove (848.V°) questo stesso giro d'operazione.

892. In secondo luogo si sa che ogni funzione trigonometrica, sia positiva, sia negativa, appartiene in comune a due archi differenti (793.8°); perciò qualunque volta un arco o un angolo venga dato mediante una sua qualunque funzione, il problema avrà sempre due soluzioni. Siccome per altro nei triangoli sferici tanto i lati che gli angoli son sempre minori di 180° (857.6°,860); perciò, qualora o gli uni o gli altri sieno dati per mezzo o del coseno o della tangente o della cotangente, una delle due soluzioni rimarrà necessariamente esclusa, attesochè dei due archi o angoli a cui queste funzioni respettivamente appartengono, uno è minore di 180°, l'altro maggiore, nè l'ultimo può in conseguenza aver parte nel triangolo. Non così relativamente ai seni; poichè dei due archi o angoli che hanno in comune lo stesso seno positivo, l'uno è supplemento dell'altro, ed ambedue son minori di 180°. Quindi è che da tutte le formule, le quali danno gli archi o angoli per mezzo di seni, si ha sempre una doppia soluzione, o come suol dirsi una *soluzione dubbia*. Spesso per altro il dubbio può esser tolto da una qualunque delle seguenti considerazioni.

893. 1°. Poichè la III°. (870) dà $cos g = \frac{cos a + cos a' cos a''}{sen a' sen a''}$, e supposti acuti i tre angoli a, a', a'', il secondo membro e quindi anche il primo son positivi, perciò *se tutti gli angoli di un triangolo sferico sono acuti, tutti i lati saranno minori di* 90°.

2°. Dalle analogie di Nepero (884) abbiamo $tang \frac{1}{2}(a+a') \times cos \frac{1}{2}(g+g') = cot \frac{1}{2} a'' cos \frac{1}{2}(g \backsim g')$. Or poichè nè $\frac{1}{2} a''$, nè $\frac{1}{2}(g \backsim g')$ possono giungere a 90°

(860. 857. 6.°), il secondo membro e in conseguenza anche il primo, dovranno risultar sempre positivi, e quindi $\frac{1}{2}(a+a')$ ed $\frac{1}{2}(g+g')$ dovranno esser sempre della medesima specie, cioè o ambedue acuti o ambedue ottusi. D'altronde della stessa specie son pure $\frac{1}{2}(a \backsim a')$ ed $\frac{1}{2}(g \backsim g')$, perchè ambedue minori di 90°; dunque in generale *in ogni triangolo sferico la semisomma e la semidifferenza degli angoli son sempre della stessa specie di quelle dei lati opposti.*

3.ª Poichè con $g=g'$ abbiamo (878) $\cos a = \cot g \tan \frac{1}{2} g''$, e $\tan \frac{1}{2} g''$ è sempre positiva (857. 6.°), il segno di $\cos a$ seguirà dunque quello di $\cot g$, e perciò *nel triangolo sferico isoscele gli angoli eguali sono della stessa specie dei lati opposti.*

4.ª Per la stessa ragione, siccome con $g=g'=g''$ abbiamo (882) $\cos a = \frac{\cos g}{1+\cos g}$, ed $1+\cos g$ è sempre positivo, perciò *nel triangolo sferico equilatero gli angoli son della stessa specie dei lati;* onde se i lati sono di 90°, tutti gli angoli saranno retti.

5.ª Poichè nei triangoli rettangoli (885) $\tan g'' = \tan a'' \sin g'$, e $\sin g'$ è sempre positivo (793. 3.°), dunque $\tan g''$ e $\tan a''$ dovranno in tutti i casi avere uno stesso segno, e g'' ed a'' esser quindi della medesima specie; perciò *in ogni triangolo sferico rettangolo gli angoli obliqui son della stessa specie dei lati opposti.*

6.ª Nella stessa formula, escluso il caso di $g'=90°$, si ha sempre $\sin g' < 1$, e quindi (67. 1.°) $\tan a'' > \tan g''$; perciò se sia $a'' < 90°$, dovrà aversi $a'' > g''$, e l'inverso nel caso opposto; di qui *in ogni triangolo sferico rettangolo ciascuno degli angoli obliqui è maggiore se acuto, minore se ottuso del lato opposto.*

7.ª Negli stessi triangoli avendosi (885) $\sin h \sin a' = \sin g'$, ed essendo $\sin a' < 1$, sarà $\sin g' < \sin h$ (67. 1.°); e quindi se sia $g' < 90°$, avremo altresì $g' < h$, mentre se sia $g' > 90°$, avremo $g' > h$ (793. 4.°); perciò *in ogni triangolo sferico rettangolo i cateti saranno minori o maggiori dell'ipotenusa, secondo che saranno minori o maggiori di 90°.* Di qui si ha pure che *l'arco normale è minore o maggiore di tutti gli archi che scendono da uno stesso punto, secondo che è minore o maggiore di 90°.*

8.ª Infine avendosi negli stessi triangoli (888) $\cos(a' \backsim a'') = -\cos(a'+a'') \times \cot^2 \frac{1}{2} h$, e $\cos(a'+a'')$ essendo sempre negativo (*ivi*), il primo membro di quest'equazione sarà positivo, e quindi $a' \backsim a'' < 90°$; perciò *in ogni triangolo rettangolo sferico la differenza degli angoli obliqui è sempre minore di 90°.* Passiamo ad altre considerazioni.

894. Se i lati g, g', g'' siano piccoli in modo che le loro dimensioni oltre la seconda sieno trascurabili, in tal caso potremo porre (806) $\sin g = g$, $\sin g' = g'$, $\sin g'' = g''$, $\cos g = 1 - \frac{1}{2} g^2$, $\cos g' = 1 - \frac{1}{2} g'^2$, $\cos g'' = 1 - \frac{1}{2} g''^2$, e del pari $\tan g = g$, ec. Introdotti questi cambiamenti nelle formule superiori, queste nella maggior parte

si troveranno cangiate nelle loro corrispondenti già trovate nella trigonometria rettilinea; quindi le ultime potranno sempre impunemente adoprarsi in luogo delle prime, qualora i lati abbiano la piccolezza dovuta. Per altro ancorchè questa lunghezza sia alquanto maggiore, talchè si esiga di tener conto anche delle terze e quarte potenze degli archi nell'introdurre i valori dei seni e dei coseni, potranno continuare ad adoprarsi le formule della trigonometria rettilinea, purchè si diminuiscano gli angoli a seconda del Teorema di Legendre già da noi annunziato (850) e del quale diamo adesso la promessa dimostrazione.

895. Poichè si ha in generale (870. II.ª) $\cos a \operatorname{sen} g' \operatorname{sen} g'' = \cos g - \cos g' \cos g''$, e gli archi g, g', g'' si suppongono piccolissimi in proporzione del raggio, che si assume al solito per unità, in luogo dei loro seni e coseni potremo introdur nella formula i valori dei medesimi, dati per gli archi (806), limitati fino ai termini della quarta dimensione. In tal caso fatte le opportune riduzioni, troveremo $4g'g''\cos a(6 - g'^2 - g''^2) = 12(g'^2 + g''^2 - g^2) + g^4 - g'^4 - g''^4 - 6g'^2 g''^2$, equazione che moltiplicata nell'uno e nell'altro membro per $6 + g'^2 + g''^2$, trascurati al solito i termini oltre la quarta dimensione, rende infine $\cos a = \frac{g'^2 + g''^2 - g^2}{2g'g''} + \frac{g^4 + g'^4 + g''^4 - 2g^2 g'^2 - 2g^2 g''^2 - 2g'^2 g''^2}{24g'g''}$. Sia adesso A l'angolo opposto a g in un triangolo rettilineo, che abbia i lati g, g', g'' eguali in lunghezza a quelli del supposto triangolo sferico: avremo (843) $\frac{g'^2 + g''^2 - g^2}{2g'g''} = \cos A$, e $\frac{g^4 + g'^4 + g''^4 - 2g^2 g'^2 - 2g^2 g''^2 - 2g'^2 g''^2}{24g'g''} = -\frac{g'g''}{6}(1 - \cos^2 A) = -\frac{g'g''}{6}\operatorname{sen}^2 A$; onde introdotti questi valori nella precedente espressione, si avrà $\cos a = \cos A - \frac{1}{6}g'g''\operatorname{sen}^2 A$. Or poichè $g'g''$ è una quantità piccolissima di second'ordine in faccia al raggio 1, ne concluderemo che ancor più piccola sarà la differenza fra $\cos A$ e $\cos a$, e quindi fra gli archi A, a: onde ponendo $a = A + x$ e perciò $\cos a = \cos(A + x) = \cos A \cos x - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} x$, potremo supporre $\operatorname{sen} x = x$, $\cos x = 1$, e quindi $\cos a = \cos A - x \operatorname{sen} A$, valore che confrontato con l'altro già trovato di sopra dà $x = \frac{1}{6}g'g''\operatorname{sen} A$. Ma $g' \operatorname{sen} A$ è l'espressione della normale calata sul lato g'' dal vertice dell'angolo opposto (846), dunque x è il terzo della superficie del triangolo rettilineo (632); la quale se si chiami s, avremo $a = A + \frac{s}{3}$. Dunque anche $a' = A' + \frac{s}{3}$, $a'' = A'' + \frac{s}{3}$, e di qui $a + a' + a'' = A + A' + A'' + s = 180^\circ + s$. Sarà dunque s l'eccesso della somma dei tre angoli del triangolo sferico sopra i due retti: e resta dimostrato che tolto un terzo di quest'eccesso da ciascuno dei detti tre angoli, si hanno gli angoli del triangolo rettilineo, i cui lati eguagliano in lunghezza quelli del dato triangolo sferico.

CURVE

Nozioni preliminari sull' uso dell' Algebra nella descrizione delle Curve

896. Dal punto fisso A, considerato come punto d' origine, parta la retta indefinita AX, sulla quale sieno prese le porzioni o *ascisse* (587) AP, AP', AP'', ec. Da ognuno dei punti P, P', P'', ec. si alzino ad angolo qualunque le parallele ovvero *ordinate* PM, P'M', P''M'', ec. prolungate in maniera, che regni sempre un determinato rapporto fra ciascuna ascissa e l' ordinata corrispondente; cosicchè chiamate l' una x, l' altra y, i valori d' ambedue (498) soddisfacciano insieme ad una data equazione, come per esempio ad $y^2 = 2ax - x^2$. In tal caso, le estremità delle ordinate y si disporranno in una linea, che generalmente sarà una curva, la di cui natura ed indole varieranno a seconda della diversa qualità dell' equazione di rapporto, che perciò si chiama *equazione della curva*. Data quest' equazione, l' Algebra non solo insegna a descriver la curva corrispondente, ma ne sviluppa ancora le principali proprietà con maravigliosa prontezza. F. 132

897. Le ascisse e le ordinate si chiamano con nome comune *coordinate*, e diconsi di più *ortogonali*, allorchè il loro angolo è retto, come per lo più lo supporremo per l' avvenire, quando altro non si avverta. La retta AX sulla quale si prendon l' ascisse si chiama *asse della curva* o *delle ascisse* o delle x; come per analogia si chiama *asse delle ordinate* o delle y, la retta indefinita AY, condotta per il punto d' origine A parallelamente alle ordinate. In seguito rappresenteremo con X il primo asse, ossia quello delle x, e con Y il secondo o quello delle y; e chiameremo *piano degli assi*, o *delle* xy, quello che resta determinato dagli assi X, Y (692.5°), o da due coordinate x, y.

898. Non sempre l' origine A cade sull' estremità dell' asse delle ascisse, ma può stabilirsi in qualunque altro punto del medesimo; se non che allora, considerate come positive le ascisse

F.132 prese da una parte dell' origine, debbon riguardarsi come negative quelle prese dalla parte opposta (139): siccome egualmente l'ordinate possono aver luogo tanto al disopra che al di sotto dell' asse X, purchè in un senso si assumano positive, e nell' altro negative. L'ascissa è visibilmente nulla per tutti quei punti della curva che cadono sull' asse Y; l' ordinata è nulla per tutti quelli che cadono sull' asse X; quindi se la curva passa per l' origine A, ambedue le coordinate in quel punto si annulleranno. I punti in cui la curva attraversa l'asse si chiamano punti di *tragitto.*

899. Se a, b sieno i valori particolari delle coordinate spettanti ad un dato punto M, l'equazioni $x=a, y=b$ si chiamano *equazioni del punto M*; nome che egualmente ritengono quando pure M non appartenga alla curva, ma sia dovunque e comunque situato nel piano degli assi X, Y. Frattanto da ciò che si è detto risulta che considerati come positivi gli assi AX, AY, e come negativi i loro prolungamenti AX', AY'; se il punto M cade nell'angolo YAX le quantità a, b saranno positive; se cade nell' angolo opposto X'AY', o in uno qualunque dei due adiacenti Y'AX, YAX', nel primo caso a, b saranno ambedue negative, nel secondo sarà negativa b, nel terzo a, e l' equazioni respettivamente diverranno in ciascuno di questi tre casi $x=-a, y=-b$; $x=a, y=-b$; $x=-a, y=b$. Se poi cade nell' asse X avremo $b=0$, se nell' asse Y avremo $a=0$; quindi l' equazioni diverranno $x=a$, $y=0$, oppure $x=0$, $y=b$; ed a nel primo caso, b nel secondo indicheranno o a qual distanza dall' origine A si trovi il punto M sull' asse X, o a quanto si trovi al di sopra dell' origine sull' asse Y. In ultimo se M cada in A, punto di concorso degli assi, avremo insieme $a=0, b=0$, e per equazioni $x=0, y=0$. Che se gli assi sieno ortogonali, a, b rappresenteranno generalmente le distanze di M dall' un asse e dall' altro.

900. L' equazioni $x=a, y=b$ determinano la posizione del punto M nel piano degli assi. Perchè ciò meglio si comprenda, premetteremo che l' idea di posizione essendo un' idea di puro rapporto, come quelle di lunghezza o di estensione, non può giungersi a chiaramente assegnare la situazione di un punto M

sopra di un piano, se non riferendola a quella di un altro punto A del medesimo piano, che si supponga già nota. Al che non basta l'indizio della sola distanza AM; poichè a questa medesima distanza da A si trovano, oltre M, tutti i punti della circonferenze descritta col centro in A e raggio AM. Ma se condotto comunque per A l'asse indefinito AX, scenderemo da M su di quest' asse con la retta MP, e daremo il valore e la direzione dell' ascissa AP e dell' ordinata MP, la posizione di M resterà decisamente determinata, essendo chiaro che le coordinate AP, PM nel senso in cui si son prese, non competono che al punto M. Fig. 133

901. In luogo delle coordinate x, y si può anche assegnare la posizione del punto M mediante la distanza AM, e l'angolo che la retta AM fa con l'asse delle ascisse o delle ordinate. Chiamato θ il primo di questi due angoli, r la distanza AM, e supposte infine ortogonali (897) le coordinate x, y, queste si cangiano allora in $r\cos\theta$, $r\operatorname{sen}\theta$ (846.1.°); d'onde le due nuove equazioni del punto M, $x=r\cos\theta$, $y=r\operatorname{sen}\theta$. E poichè da queste si trae $\operatorname{tang}\theta=\frac{y}{x}$, ed $r=\sqrt{(x^2+y^2)}$, così l'un sistema d'equazioni potrà sempre cangiarsi nell' altro; è chiaro infatti che date x, y potranno sempre aversi r e θ, e date r e θ, potranno aversi x, y.

902. Ogni retta BM che da un punto determinato B dell' asse, preso ad una distanza nota $AB=a$ dall' origine si conduce ad un punto qualunque M della curva, prende il nome di *raggio vettore*. Posta $BM=r$, e chiamato β l'angolo MBP, il triangolo rettangolo MPB, in cui $BP=x-a$, darà $x=r\cos\beta+a$, ed $y=r\operatorname{sen}\beta$; valori che introdotti nell' equazione della curva, la cangeranno in un altra, che avrà per variabili r e β, e che allora prende il nome d'*equazione polare o angolare*.

903. La direzione, la reciproca inclinazione e la concorrenza A degli assi X, Y talvolta sono date, talvolta sono arbitrarie. Quando sono arbitrarie si preferiscono sempre le più opportune al caso, e soprattutto si procura di porre i due assi ad angolo retto fra loro. Quando sono date, può convenire, e può anche esser necessario cambiarle; ed ecco come le coordinate x, y che riferivano il punto M agli assi primitivi X, Y si potranno trasformare nelle x', y' che lo riferiscono ai nuovi X', Y'. Per maggior generalità supporremo qualunque l'angolo che si questi che quelli fanno respettivamente fra loro; e per maggior semplicità rappresenteremo tutti gli angoli per mezzo dei lati che li comprendono; scrivendo p. es. $\operatorname{sen}xy$, $\operatorname{sen}x'y$ per denotare i seni degli angoli formati dalle coordinate x, y, o dalla nuova ascissa x' con l'ordinata primitiva y. Continueremo a chiamare X, X' quelli degli assi che procedono da destra a sinistra; Y, Y' quelli che scendono dall'alto al basso: ed a riguardare come parte positiva degli assi X, X' quella che resta alla destra della respettiva origine, come negativa la parte che va verso la sinistra; e del pari come positiva quella parte degli assi Y, Y' che sale al di sopra degli assi X, X', e come negativa quella che scende al di sotto. Osserveremo infine che le

T. II.

coordinate primitive x, y dovranno dipendere dalle nuove x', y' per mezzo di equazioni di primo grado della forma $x = m + px' + qy'$, $y = m' + p'x' + q'y'$. Infatti, siccome al punto qualunque M non compete che una sola coordinata nel senso di ciascuno dei quattro assi, così l'equazioni di rapporto dell'une coordinate colle altre debbono esser tali, che, per qualunque coordinata sieno risolute, non somministrino se non un solo valore, il che non potrebbe accadere qualora le coordinate vi si trovassero ad un grado maggiore dell'unità, ossia, le equazioni non fossero lineari. Non altro adunque rimarrà che conoscere le quantità m, m', p, p', q, q', che essendo di lor natura indipendenti da x, x', debbono mantener sempre uno stesso valore qualunque siasi la posizione del punto M.

Ciò premesso, si supponga in primo luogo che i nuovi assi X', Y' abbian commune l'origine in A coi primitivi X, Y, e solo ne differiscano nella direzione. In tale ipotesi se s'imagini il punto M trasportato nell'origine A, le coordinate x, y, x', y' si annulleranno insieme, il che dà tosto $m = m' = 0$. E se in seguito s'imagini M trasportato in un punto qualunque della parte positiva dell'asse X', sarà $y' = 0$, d'onde $x = px'$, $y = p'x'$, e quindi $p = \frac{x}{x'}$, $p' = \frac{y}{x'}$. Ora l'asse X', o per meglio dire, la parte positiva di quest'asse può cadere o dentro l'angolo YAX degli assi primitivi al di sopra dell'asse X, o sotto il medesimo al di fuori di quell'angolo. Frattanto se dal punto M preso nel modo che sopra si conduca la MP parallela all'asse Y, avremo in ambedue i casi AM $= x'$, AP $= x$; e nel primo caso MP $= y$, nel secondo MP $= -y$; e il triangolo AMP darà in ambedue i casi $\frac{x}{x'} = \frac{sen\,x'y}{sen\,xy}$; e inoltre nel primo caso $\frac{y}{x'} = \frac{sen\,xx'}{sen\,xy}$, nel secondo $\frac{-y}{x'} = \frac{sen\,xx'}{sen\,xy}$. Dunque $p = \frac{sen\,x'y}{sen\,xy}$, $p' = \pm \frac{sen\,xx'}{sen\,xy}$; preso il segno inferiore in p' quando la parte positiva dell'asse X' cada al di sotto di quella dell'asse X. E se infine il punto M si faccia cadere sull'asse Y', nel qual caso $x' = 0$, avremo allora $x = qy'$; $y = q'y'$; d'onde $q = \frac{x}{y'}$, $q' = \frac{y}{y'}$. Or qui pure è manifesto che l'asse Y' potrà trovarsi alla destra dell'asse Y, o alla sinistra. Costruiti pertanto i soliti triangoli, e operando in tutto come sopra, troveremo $q = \pm \frac{sen\,yy'}{sen\,xy}$, $q' = \frac{sen\,xy'}{sen\,xy}$, preso il segno inferiore in q quando Y' cada alla sinistra dell'asse Y. Trovati così i valori delle sei costanti, l'equazioni generali si cangeranno in $x = \frac{x'\,sen\,x'y \pm y'\,sen\,yy'}{sen\,xy}$; $y = \frac{y'\,sen\,xy' \pm x'\,sen\,xx'}{sen\,xy}$: formule che varranno per qualunque situazione del punto M, purchè alle coordinate x, y, x', y' si applichino i segni voluti dai precetti già dati altrove (899).

Fig. 278

279

904. Si supponga adesso che i due nuovi assi X', Y' differiscano dagli assi primitivi non solo nella direzione, ma ancora nell'origine; e per fissar le idee sia questa in A' dentro l'angolo formato dai prolungamenti degli assi X, Y. Fatto concorrere in A un nuovo sistema d'assi AX'' $= X''$, AY'' $= Y''$ paralleli respettiva-

mente agli assi X', Y', e protratto l'asse Y'' fino all'incontro in N con l'asse X', è chiaro in primo luogo che se si chiamino x'', y'' le coordinate che riferiscono il punto M agli assi X'', Y'', avremo dalle formule precedenti $x = \ldots\ldots$ Fig 280 $\dfrac{x'' sen x'y \pm y'' sen yy'}{sen xy}$, $y = \dfrac{y'' sen xy' \pm x'' sen xx'}{sen xy}$. È chiaro altresì che saranno A'N ed AN le coordinate che riferiscono il punto A al punto A' nel senso degli assi X', Y', e che rappresentando l'una con α', l'altra con β' avremo $x' = x'' + \alpha'$, $y' = y'' + \beta'$, d'onde $x'' = x' - \alpha'$, $y'' = y' - \beta'$, valori che sostituiti nelle due formole precedenti daranno per il caso attuale $x = \dfrac{(x' - \alpha') sen x'y \pm (y' - \beta') sen yy'}{sen xy}$;

$$y = \pm \frac{(x' - \alpha') sen xx' + (y' - \beta') sen xy'}{sen xy}.$$

905. Che se l'origine A fosse all'opposto contenuta nell'angolo formato dai prolungamenti degli assi X', Y', nel qual caso le coordinate α' e β' si cangerebbero di positive in negative, ben si vede che allora avremmo $x'' = x' + \alpha'$, $y'' = y' + \beta'$, e quindi le coordinate α' e β' cambierebbero ambedue di segno nelle due formule; come con egual facilità si scorge che cambierebbe la sola β' se A cadesse nell'angolo inferiore destro, e la sola α' se nel superiore sinistro. Con queste formule, fatta scrupolosa attenzione a tutte le dichiarate avvertenze relativamente ai segni, potremo dunque aver sempre i valori delle coordinate primitive x, y dati per le nuove x', y'. Ma come la promiscuità dei segni potrebbe portare ambiguità e confusione nelle diverse applicazioni, meglio sarà presentarle semplicemente nell'aspetto seguente; $x = \dfrac{(x' + \alpha') sen x'y + (y' + \beta') sen yy'}{sen xy}$; $y = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\dfrac{(x' + \alpha') sen xx' + (y' + \beta') sen xy'}{sen xy}$, sotto la qual forma potranno valere per qualunque direzione, che abbiano gli assi e per qualunque posizione del punto M e dell'origine A', purchè 1.° si dieno, come abbiamo avvertito (899) alle quattro coordinate x, y, x', y' i segni convenienti alla situazione del punto M rapporto agli assi X, Y, X', Y', ed alle coordinate α' e β' i segni opposti a quelli, che converrebbero alla situazione dell'origine A rapporto agli assi X' Y': e purchè 2.° condotti o imaginati condotti dall'origine A gli assi X'', Y'' parallelamente agli assi X', Y', si considerino respettivamente come negativi gli angoli xx', yy', l'uno quando la parte positiva dell'asse X'' si trovi cadere al di sotto di quella dell'asse X; l'altro quando la parte positiva dell'asse Y'' si trovi cadere alla sinistra di quella dell'asse Y. Questa regola è generale e costante, ed é facile vederne la congruenza con tutte le precedenti avvertenze.

906. Talvolta in luogo delle coordinate α', β' che riferiscono l'origine A all'origine A', giova introdurre le coordinate α e β che riferiscono A' ad A nel senso degli assi X ed Y. Le formule divengono allora molto più semplici; e per ottenerle osserveremo, che in tal caso per il punto A' abbiamo $x = \alpha$, $y = \beta$, $x' = 0$, $y' = 0$, valori che posti nelle formule superiori danno $\alpha = \dfrac{\alpha' sen x'y + \beta' sen yy'}{sen xy}$, ..

$\beta=\frac{\beta' sen xy' + \alpha' sen xx'}{sen xy}$: equazioni che sottratte dalle precitate formule, daranno $x=\alpha+\frac{x' sen x'y + y' sen yy'}{sen xy}$, $y=\beta+\frac{y' sen xy' + x' sen xx'}{sen xy}$. E qui pure avranno luogo le regole già esposte (905) relative ai segni; se non che quelli delle coordinate α e β dovranno prendersi tali, quali convengono alla posizione dal punto A' rapporto agli assi X ed Y, e non contrariamente, come nel caso opposto.

907. Finalmente sarà utile osservare 1.° che se i primi assi sieno ortogonali, sarà $xy=90°$, $x'y=90°-xx'$, $xy'=90°-yy'$; d' onde $x=(x'+\alpha')\cos xx'+\ldots$ $(y'+\beta')sen yy'=\alpha+x'\cos xx'+y' sen yy'$: $y=(x'+\alpha')sen xx'+(y'+\beta')\times\ldots$ $\cos yy'=\beta+x' sen xx'+y'\cos yy'$. 2.° Se inoltre gli assi X, X' sieno paralleli fra loro sarà di più $xx'=0$, $yy'=90°-x'y'$, e quindi $x=(x'+\alpha')+(y'+\beta')\cos x'y'$ $=\alpha+x'+y'\cos x'y'$; $y=(y'+\beta')sen x'y'=\beta+y' sen x'y'$. 3.° Che infine se ambedue gli assi nuovi sian paralleli ai primitivi, qualunque siasi il loro angolo, sarà $x'y'=xy$, e quindi $x=x'+\alpha'=x'+\alpha$, $y=y'+\beta'=y'+\beta$. Così potranno trovarsi consimili riduzioni per altri casi. Ed in ciascuna dovranno sempre rapporto ai segni tenersi ferme le regole generali già riportate (905).

908. Confrontando i valori trovati d' x e d' y coi valori generici (903) $x=m+px'$ $+qy'$, $y=m'+p'x'+q'y'$, si trova $m=\alpha=\frac{\alpha' sen x'y + \beta' sen yy'}{sen xy}$, $m'=\beta=\beta'\times\ldots$ $\frac{sen xy' + \alpha' sen xx'}{sen xy}$: queste due costanti dipendono dunque insieme e dalle origini degli assi e dai loro angoli, mentre p, q, p', q', non dipendono che da questi ultimi. Di più se osserveremo che $yy'=xy-xy'$, $xx'=xy-x'y$, potremo concludere facilmente che le quantità p', q' dipendono reciprocamente dalle due p, q, in modo che dei sei coefficienti, quattro soli sono arbitrari nel caso che sia arbitraria la scelta dei nuovi assi. Introdotti frattanto i valori trovati d' x e d' y nell' equazione della curva data essa si cangerà dunque in un' altra, che conserverà il grado della prima, ma ne differirà e nei coefficienti e nel numero dei termini, senza però cessare di appartenere come quella alla curva primitiva, e non ad altre; essendo chiaro che tanto le coordinate x, y, quanto le x' y' si riferiscono agli stessi punti M dei quali si compone la data curva. Perciò una stessa curva può aver differenti equazioni, come all' opposto differenti equazioni possono appartenere ad una medesima curva. Chiameremo *equazioni trasformate* o *derivate* tutte quelle che per effetto o col mezzo di tali sostituzioni nascono da una prima equazione *derivatrice*, o vi si posson ridurre; nei quali casi dunque, come abbiamo avvertito, tutte quante spettano esclusivamente ad una stessa curva, che è quella dell' equazione derivatrice.

909. Or su queste semplicissime nozioni, e sopra poche altre che daremo in appresso, è specialmente fondata la teoria algebrica delle curve, che tutta si aggirerà intorno ai tre seguenti generali quesiti. 1.° *Data la curva trovarne l' equazione, e*

col sussidio di questa e di una facile sintesi rilevarne le principali proprietà; 2.° *Data l'equazione trovarne* il luogo geometrico, *ossia la curva corrispondente*; 3.° *Trovar le curve aventi una qualche data proprietà, o atte a soddisfare ad una condizione assegnata, o a risolvere sia isolatamente, sia congiunte insieme un dato problema.*

La soluzione del primo quesito esige che si conosca la genesi della curva, cioè la legge secondo la quale è stata descritta, o uno almeno dei suoi caratteri distintivi. Il secondo quesito suppone già completamente risoluto il primo, onde non altro resti che ridurre, quando sia possibile, l'equazione proposta ad una di quelle spettanti alle curve già note. Diversamente non potremo che limitarci a descriver la curva coi metodi che daremo, e porne in chiaro le proprietà con quelli che pur daremo per il primo quesito. La soluzione del terzo dipende interamente dall'arte di ricavare dalle date proprietà, o dalle condizioni del problema, una o più equazioni; dopo di che questo quesito ricade subito nel secondo.

910. Per dare intanto un qualche saggio sul modo di risolvere tali quesiti, cominciamo dal primo, e proponiamoci di trovar l'equazione alla circonferenza di un circolo del raggio $CB=a$. Si sa che questa curva è descritta dall'estremità B del raggio CB, che partendosi dalla situazione CB, si muove in giro intorno all'altra estremità immobile C (494). Or si supponga B giunto nel punto qualunque M. Sarà primieramente $CM=CB=a$; e se preso il raggio CB o il diametro AB per asse delle ascisse, e il centro C per origine delle medesime, si cali la normale MP, saranno $CP=x$, $MP=y$ le coordinate del punto qualunque M riferite all'origine C. Frattanto il triangolo rettangolo CPM darà $y^2=a^2-x^2$, equazione cercata. Che se l'origine delle ascisse si voglia prender piuttosto all'estremità A del diametro AB, in tal caso avremo $AP=x$, $CP=AP-AC=x-a$, e lo stesso triangolo CPM darà $y^2=a^2-(x-a)^2=2ax-x^2$, altra equazione alla circonferenza del circolo del raggio a, la quale suppone dunque l'origine dell'ascisse non al centro come la prima, ma ad una delle due estremità del diametro.

Fig. 139

Fig. 139 Abbiamo adunque così ricavata l'equazione dalla ben nota genesi della curva. Vediamo come potrebbe egualmente aversi partendo da qualche sua singolar proprietà. Sappiamo (657) che la normale MP è media proporzionale fra i due segmenti AP, PB del diametro. Poste perciò come sopra MP$=y$, CP$=x$, saranno AP$=a+x$, PB$=a-x$, ed $y^2=(a+x)(a-x)=a^2-x^2$, equazione cercata conforme alla prima delle due precedenti.

Vediamo infine con un esempio come dalla trovata equazione possan dedursi le proprietà di questa curva. Si conducano le corde AM, MB; avremo AM$^2=$MP$^2+$AP$^2=y^2+(a+x)^2$, BM$^2=$MP$^2+$BP$^2=y^2+(a-x)^2$, e quindi AM$^2+$BM$^2=2y^2+(a+x)^2+(a-x)^2=2y^2+2a^2+2x^2$, e posto il valore di y^2 dato dall'equazione, AM$^2+$BM$^2=2a^2+2x^2+2a^2-2x^2=4a^2=(2a)^2=$AB^2. Dunque il triangolo AMB è rettangolo in M (659); dal che si conclude che nel circolo tutti gli angoli inscritti appoggiati sul diametro son retti (568. 2.°).

911. Se in luogo di prendere l'origine delle ascisse sul centro o all'estremità del diametro si fosse presa in un punto qualunque A' nel piano delle xy, e si fossero cangiati gli assi ortogonali X, Y negli assi X', Y' posti ad angolo qualunque, l'equazione avrebbe presa una forma ben differente. Per trovarla con facilità, basterà prendere i valori di x e di y dati per le coordinate x', y' avvertendo che qui gli assi x, y sono ortogonali, e che l'equazione $y^2=a^2-x^2$ spettando a qualunque diametro, ci lascia in libertà di considerare l'asse X come parallelo all'asse X', nel qual caso avremo (907. 2.°) $x=x'+\alpha'+(y'+6')\cos x'y'$, $y=(y'+6')\,\mathrm{sen}\,x'y'$: sostituiti questi valori, cangiate di segno, secondo il precetto (905. 1.°), le coordinate α' e $6'$ che riferiscono il centro o la primitiva origine alla nuova, fatte le debite riduzioni e omessi gli apici per maggior semplicità, avremo per la richiesta trasformata l'equazione generalissima $(y-6)^2+(x-\alpha)^2+2(x-\alpha)(y-6)\cos xy=a^2$. Che se i nuovi assi si suppongano ortogonali e in conseguenza ambedue paralleli ai primitivi, sarà $xy=90°$, e l'equazione si cangerà nell'altra più particolare $(x-\alpha)^2+(y-6)^2=a^2$. Se inoltre l'origine si suppone cadere in un punto qualunque del diametro, sarà $6=0$ ed avremo $y^2=a^2-(x-\alpha)^2$. In tutti questi casi però e in altri che volessero supporsi, non si manchi di attendere alle avvertenze già fatte al paragrafo 905. Così se l'origine è trasportata sulla estremità sinistra del diametro, nel qual caso $6=0$, $\alpha=a$, l'equazione ultima darà immediatamente $y^2=2ax-x^2$ come già si sapeva (910): mentre se l'origine si trasporti sull'estremità destra, tutte le ascisse diverranno negative; in conseguenza si dovrà cangiare x in $-x$, α in $-\alpha$, ed avremo $y^2=a^2-(\alpha-x)^2$, che, posto il valor di $\alpha=a$, darà pure $y^2=2ax-x^2$. Ma ritorniamo alla trasformata.

912. Risolvendo le potenze e i prodotti contenuti in questa generale equazione, e ponendo $1^a.\ 2\cos xy = -b$, $2^a.\ 2\beta + \alpha b = -d$, $3^a.\ 2\alpha + \beta b = -f$, $4^a.\ \beta^2 + \alpha\beta b + \alpha^2 - a^2 = g$, si ottiene $y^2 + bxy + x^2 + dy + fx + g = 0$; ove è da notarsi 1°. che b è un numero, d, f sono linee, g una superficie, come appunto esige l' omogeneità dell' equazione (689.7°); 2°. che questi coefficienti derivando da quattro distinte equazioni, sono quindi affatto indipendenti tra loro (231); 3°. che ciascuno essendo funzione di tutte o di parte delle quattro arbitrarie xy, α, β, a, può quindi variar con esse in infiniti modi, ed aver perciò qualunque valore; 4°. che questa generalità soffre soltanto una qualche restrizione rapporto al coefficiente numerico b, che indipendentemente dal segno deve esser sempre < 2, giacchè deve sempre aversi $\cos xy < 1$. Frattanto poichè l' equazione è una trasformata di quella del circolo, concluderemo (908) che *ogni equazione omogenea di secondo grado fra le coordinate x, y nella quale i quadrati x^2, y^2, ed il rettangolo xy abbiano per coefficiente quelli l' unità positiva, questo un numero, o un rapporto di due rette qualunque* (498) *che, astrazion fatta dal segno, sia < 2, appartiene esclusivamente ad un circolo*. Quando sia data, e note sieno per conseguenza le costanti b, d, f, g, dalle eq. 2^a. e 3^a, avremo α e β, e quindi dalla 4^a il raggio a del circolo corrispondente. E se in oltre sia dato l' asse A'X', e l' origine A' delle ascisse, presa A'N' $= \alpha$, e condotta N'A' $= \beta$ sotto un angolo AN'X' $= xy$ dato dal coefficiente b per mezzo dell' eq. 1^a., il punto A determinerà la posizione del centro (907). F.139

Si osservi che se d ed f sieno zero, avremo $\alpha = 0$, $\beta = 0$, e l' equazione ridotta ad $y^2 + bxy + x^2 + g = 0$ verrà riferita al centro del circolo. Se manchi il secondo termine, sarà $b = 0$ e quindi $xy = 90°$, cioè anche le coordinate della trasformata saranno ortogonali. Se queste vogliansi o debban supporsi obliquangole, la trasformata non potrà più allora ridursi alla derivatrice $y^2 + x^2 = a^2$, ed apparterrà ad altra curva (908); il che accaderà pure ogni qualvolta una qualche estrinseca condizione limiti il numero delle arbitrarie, o ne ristringa la generalità. Se con $b = 0$ ed $xy = 90°$, si abbia in oltre $g = 0$, sarà $\alpha^2 + \beta^2 = a^2$, e l' equazione $x^2 + y^2 + dy + fx = 0$ avrà quindi l' origine delle sue coordinate ortogonali all' estremità di un raggio, e perciò in un punto della circonferenza.

913. Passando al secondo quesito, abbiasi in primo luogo l' equazione indeterminata di primo grado $y = ax + b$, e si cerchi la linea a cui corrisponde. È visibile 1°. che ogni differente valore di x darà un differente valor di y, e quindi ad ogni ascissa corrisponderà un' ordinata unica e diversa da tutte le precedenti e seguenti; 2°. che $x = 0$ dando $y = b$, ed $y = 0$ dando $x = -b : a$, la linea dell' equazione taglierà l' asse Y ad un' altezza b al di sopra del punto d' origine (899); taglierà poi l' asse X sulla parte negativa (898), ad una distanza da quel punto equivalente a $b : a$, ossia equivalente ad una quarta proporzionale do-

po a, 1 e b, ove il termine 1 corrisponde a quella retta che nel computo dei valori di x e di y (896) è presa per unità di misura; 3°. che y sarà e si manterrà positiva, e quindi la linea ignota rimarrà tutta al di sopra dell'asse (899), finchè x sia positiva, o cangiandosi in negativa non divenga $> \frac{b}{a}$; mentre con x negativa e $> \frac{b}{a}$, y diventerà negativa, e il ramo corrispondente della linea cercata si stenderà al di sotto dell'asse; 4°. che nel senso delle ascisse positive, y crescerà indefinitamente crescendo x, e ciascun successivo punto del ramo superiore della linea si scosterà di più in più dall'asse; nel senso opposto si avrà una diminuzione nelle ordinate da $x=0$ fino ad $x=-\frac{b}{a}$, al qual punto, come già abbiamo notato, y si annullerà, e nel seguito divenuta negativa crescerà indefinitamente con x, onde anche il ramo inferiore divergerà sempre dall'asse siccome il superiore.

Fin quì nulla più abbiamo che l'idea della posizione e direzione dei due rami della linea cercata. Per conoscerne la qualità e la natura convien dedurne dall'equazione una qualche caratteristica proprietà. Sia dunque M un suo punto qualunque, F, G quelli del suo respettivo tragitto (898) per i due assi AY, AX concorrenti in A, e posti ad angolo qualunque fra loro. Si conduca da M parallelamente all'asse AY la PM, e si faccia infine $b:a=c$. Sarà (896) $PM=y$, $AP=x$, $AF=b=ac$, $AG=c$, $GP=x+c$. Frattanto introdotto nell'equazione il nuovo valor di b, avremo $y=a(x+c)$, d'onde $y:x+c::a:1::ac:c$, e quindi $PM:GP::AF:AG$; cioè in qualunque luogo della linea cercata si prenda il punto M, il rapporto $PM:GP$ è costante ed eguale a quello di $AF:AG$. Ma questa è proprietà esclusiva di tutti i punti della retta DC che passa per G e per F (577), dunque questa retta è la linea, o il luogo geometrico (909.2°) dell'equazione proposta; e ben si vede come ad essa ed alla sua posizione convengano tutte le particolarità che abbiamo rilevate sopra.

F.140

Del resto alla stessa conclusione saremmo del pari pervenuti se direttamente cercata si fosse l'equazione della retta DC. Infatti i triangoli simili GPM, GAF ci avrebber dato $PM:GP::$

AF : GA, ossia $y : x+c :: nc : c :: a : 1$, d'onde $y=ax+nc=ax+b$, equazione che sarà dunque quella della retta qualunque DC. F. 140

914. Poichè $a=\frac{b}{c}$, introdotto questo valore, l'equazione si cangerà in $y=\frac{b}{c}(x+c)$, e sarà come abbiamo veduto $b=$AF, $c=$AG. Sieno frattanto ω, ω' gli angoli AGF, GFA che la retta fa con gli assi X, Y; avremo $b : c :: sen\omega : sen\omega'$, d'onde $b=\frac{csen\omega}{sen\omega'}$, $c=\frac{bsen\omega'}{sen\omega}$, valori che successivamente sostituiti nella nuova equazione, daranno I^a. $ysen\omega'=xsen\omega+csen\omega$; II^a. $ysen\omega'=xsen\omega+bsen\omega'$. Quindi 1°. se la retta passa per il punto A, nel qual caso b, c son nulle, tanto la I^a. che la II^a: si risolveranno in $ysen\omega'=xsen\omega$; 2°. se la retta sia parallela all'asse X, nel qual caso $\omega=0$, la II^a. darà $y=b$, e se sia parallela all'asse Y e quindi $\omega'=0$, la I^a. darà $x=-c$, che si converte in $x=c$ quando la retta incontri l'asse X dalla parte positiva, mentre allora l'AG prende una direzione opposta alla primitiva (898); 3°. se gli assi sono ortogonali sarà $\omega'=90°-\omega$, e perciò $sen\omega'=cos\omega$, $sen\omega=cos\omega'$, e quindi la II^a. darà $y=xtang\omega+b$, e la I^a. $x= . . . ytang\omega'-c$, che si converte al solito in $x=ytang\omega'+c$ ogni qualvolta la retta incontri prima l'asse X che l'asse Y. E di qui frattanto s'inferisce 4°. che nel caso il più frequente, in quello cioè degli assi ortogonali, l'equazione della linea retta potrà indifferentemente venire espressa o da $y=ax+b$, o da $x=ay+b$; 5°. che in ambedue i modi il coefficiente a equivale alla tangente dell'angolo che la retta fa con l'asse corrispondente alla coordinata alla quale quel coefficiente appartiene; 6°. che perciò il valore di questo coefficiente non cangia se non quando la retta cangi di direzione, ed è dunque lo stesso per tutte le rette parallele; mentre all'opposto quello di b varia ogni qual volta la retta cangi comunque di posizione, ed ha poi sempre il valore che prende la coordinata del primo membro, quando quella del secondo si annulla (899); ed è nullo quando la retta passa per il punto di concorso, mentre allora le due coordinate svaniscono insieme (899).

915. Abbiasi in secondo luogo l'equazione $y^2=2ax-x^2$, e fingasi di non sapere e di voler conoscere a qual curva appartenga. Osserveremo 1°. Che da questa equazione traendosi immediatamente $y=\pm\sqrt{(2ax-x^2)}$, ad ogni punto dell'asse, o ad ogni ascissa corrispondon dunque due eguali ed opposte ordinate (898): onde la curva ha due rami perfettamente eguali, uno al di sopra, l'altro al di sotto dell'asse. 2°. Poichè con $x=0$, come con $x=2a$ si ha $y=0$, perciò la curva attraversa l'asse in due punti, uno corrispondente a quello d'origine, o all'ascissa $x=0$, l'altro all'ascissa $x=2a$. 3°. Poichè con $x>2a$, e

parimente con x negativa risulta y immaginaria (189), la curva non si estende dunque al di quà dell'origine, ossia della parte negativa dell'asse, nè al di là di $x=2a$, ed è dunque ristretta fra $x=0$, ed $x=2a$; e come in questi punti il ramo inferiore si congiunge col superiore, perciò la curva è *rientrante* o *chiusa*. 4°. Fatto $x=a$, si ha $y=\pm a$; fatto $x=a\pm z$, si ha $y=\pm\sqrt{(a^2-z^2)}<a$; dunque la curva ha due ordinate massime eguali alla metà del suo asse effettivo, e corrispondenti ad un' ascissa parimente eguale a questa metà. Inoltre poichè il valor di y è tanto più piccolo quanto più cresce z, cioè quanto x differisce o in più o in meno da a, così le ordinate saranno tanto più piccole quanto più il valor delle ascisse corrispondenti sarà o maggiore o minore di a; andranno dunque dall'una e dall'altra parte gradatamente diminuendo da $y=a$ fino ad $y=0$. 5°. Poichè si ha lo stesso valor di y da $x=a-z$, come da $y=a+z$; perciò a due ascisse di cui l'una sia tanto maggiore quanto l'altra minore di a, corrispondono ordinate perfettamente eguali. La parte sinistra della curva è dunque interamente eguale alla destra, nel modo che abbiamo veduto esser la parte superiore eguale all'inferiore.

916. Tutti questi caratteri spettano evidentemente alla circonferenza del diametro $2a$; ma potrebbero insieme convenire a qualche altra differente curva, onde non può dirsi ancor dimostrato che questa circonferenza sia esclusivamente la curva della nostra equazione. Toglieremo per altro ogni dubbio se condotta dalla metà C dell'asse la retta CM all'estremità M d'un'ordinata qualunque, osserveremo che il triangolo CMP dà $CM^2=PM^2+CP^2=y^2+(a-x)^2$; onde avendosi dall'equazione $y^2=2ax-x^2$, sarà $CM^2=2ax-x^2+a^2-2ax+x^2=a^2$, e in conseguenza $CM=a$; d'onde abbiamo che ciascun punto M della curva è ad egual distanza dal punto C, proprietà distintiva della curva circolare, alla quale dunque apparterrà unicamente la data equazione. F.139

917. É noto a ciascuno come questa curva si descriva per *punti continui*, cioè col tratto continuato d'una delle punte d'un compasso, che fisso si tenga con l'altra punta nel centro.

Ma quando ciò non costasse, l' equazione c' insegnerebbe a descriverla per *punti discreti*, dandoci cioè il modo di segnare quanti si voglian punti tutti spettanti alla cercata circonferenza, i quali poi destramente riuniti ci presenteranno la curva con tanta maggior verità, quanto saranno più numerosi e per conseguenza men discosti fra loro. Per giungere a ciò si faccia rappresentare l' asse $2a$ da una retta qualunque AB, e questa si divida in un numero qualunque di parti eguali, per esempio in 20. Presa una di queste parti per unità di misura (498), sarà $2a=20$; e se da ciascun punto di divisione si alzeranno tanto al di sopra che al di sotto di AB delle normali respettivamente eguali in lunghezza a quei valori di y, che si hanno dal porre nell' equazione, $2a=20$, ed $x=0$, $=1$, $=2$, $=3$, ec. fino ad $x=20$, è chiaro che l' estremità di queste normali saranno altrettanti punti in curva, che colla loro disposizione ne indicheranno la figura; e che con arte e con la guida dell' occhio riuniti verranno così a rappresentare la curva cercata. Ecco i valori di y, con sopra i doppj valori di x a cui corrispondono (904). F.139

$$x=\left\{\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & \multirow{2}{*}{10} \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & \end{matrix}\right\}$$

$$y=\pm\ 0,\ \sqrt{19},\ 6,\ \sqrt{51},\ 8,\ \sqrt{75},\ \sqrt{84},\ \sqrt{91},\ \sqrt{96},\ \sqrt{99},\ 10$$

Le ordinate di valore irrazionale possono agevolmente costruirsi o coi noti metodi geometrici, o con alcuno dei mezzi meccanici per questo e per molti altri simili usi ingegnosamente immaginati. Quanto ai primi, se qui non si presupponesse ignota la maniera di descriver la curva circolare, nè ciò formasse appunto l' oggetto dell' attuale ricerca, tornerebbe a proposito qualunque di quelli esposti al § 591. II°. Così per costruire $y=\sqrt{19}$, basterebbe descrivere un semicircolo sopra il diametro AB, ed elevare sulla prima divisione un' ordinata; questa, comecchè media proporzionale fra i segmenti 1 e 19 (657), corrisponderebbe precisamente a $\sqrt{19}$. Del pari $\sqrt{51}$ si avrebbe elevando un ordinata sulla terza divisione. Ma non potendo qui, senza incorrere in una manifesta petizion di principio, applicare questo mezzo, del quale faremo poi liberamente uso nella descrizione delle altre curve, proporremo per momentaneo com-

penso il seguente, che, quantunque dell'altro men semplice, è per altro assai facilitato da un teorema ben noto nell' Algebra sublime, cioè che *tutti i numeri interi si compongono della somma o di due, o di tre, o di quattro quadrati*. Così $19 = 9+9+1$, $51 = 49+1+1$, ec. Trattandosi perciò di costruir $\sqrt{19}$, prese due rette CD, DE eguali ambedue a 3 delle parti di AB, si formi il triangolo rettangolo CDE; sarà $CE = \sqrt{(CD^2+ED^2)} = \sqrt{18}$. Si alzi da C normalmente a CE la $CF = 1$, e chiuso il triangolo EFC, avremo $FE = \sqrt{(CE^2+CF^2)} = \sqrt{19}$. É chiaro per l'enunciato teorema che in ogni caso due, o al più tre triangoli soli ci condurranno sempre all'intento.

F. 139

918. Quanto ai mezzi meccanici, due sono i principali, somministrati l'uno dal *Compasso di proporzione*, l'altro dalla *Scala ticonica*. Non c'impegneremo a dar qui la descrizione del primo, che troppo a lungo ci porterebbe, specialmente se espor si volessero i moltiplici usi a cui, oltre l'attuale, si presta questo mirabile strumento inventato da *Galileo*. Non crediamo però poter dispensarci dal dare una succinta idea della Scala ticonica, ancor più del Compasso conosciuta e adottata, e che specialmente è commendevole per la facilità con la quale ognuno può da se medesimo procurarsela.

141

919. Formisi il rettangolo qualunque FC, e se ne dividano i lati FL, DC, e le basi FD, LC, quelli in 10, queste in un numero qualunque di porzioni eguali. Si suddividano parimente in 10 parti eguali le prime porzioni FE, LG di FD e di LC. A ciascuna delle divisioni si apponga un numero nel modo e con l'ordine che vedesi nella figura. Si uniscano tra di loro con parallele, che chiameremo *orizzontali*, le divisioni corrispondenti dei lati FL, DC: con parallele *trasversali*, oblique ai lati e alle basi, le suddivisioni di FE, LG come scorgesi praticato nella figura. Da questa costruzione, e dall'ispezione della figura, risulta 1°. che prese per unità di misura le parti di LC o di FD, sarà $\frac{1}{10}$ il valore delle parti in cui si son suddivise LG ed FE, ed egualmente saranno del valore di $\frac{1}{10}$ tutte le porzioni di parallele orizzontali comprese tra due successive trasversali; 2°. che

al contrario le porzioni di queste parallele comprese tra la prima verticale GE e la contigua trasversale varieranno di valore secondo il numero apposto a ciascuna parallela. Così quella spettante alla parallela 1 avrà $\frac{1}{10}$ del valore d'una delle suddivisioni di LG, e poichè queste valgono $\frac{1}{10}$, quella varrà dunque $\frac{1}{100}$; come varrà $\frac{2}{100}$ quella spettante alla parallela 2; $\frac{3}{100}$ quella spettante alla 3, ec. Ciò manifestamente deriva dalle proporzioni a cui dan luogo i triangoli simili formati dalla verticale, dalla trasversale e da ciascuna delle parallele (555,579). F. 141

920. Or da questo si ha, che se data ad un compasso un' apertura qualunque non maggiore di LC, e posta per esempio una punta sull' intersezione della verticale 3 con la parallela orizzontale 5, l'altra punta vada a cadere sull' intersezione della stessa parallela con la trasversale 8, la distanza da punto a punto valutata su questa scala, ossia considerate come uno le porzioni di LC, varrà 3,85. Infatti la distanza della verticale 3 alla prima verticale GE vale evidentemente tre intere parti; quella di GE alla prima trasversale sulla parellela 5 vale per ciò che si è detto $\frac{5}{100}$; quella infine della prima all' ottava trasversale vale $\frac{8}{10}$, in tutto dunque 3,85. Per le stesse ragioni è chiaro che se debba trovarsi una lunghezza equivalente a 2,37 dovremo porre una punta del compasso sopra l'intersezione della verticale 2 con l'orizzontale 7, ed aprir di tanto il compasso che l'altra punta cada sull' intersezione dell' orizzontale 7 con la trasversale 3. Che se in luogo di 2,37 occorresse trovare una lunghezza equivalente a 12,37, e la scala non contenesse che 10 parti di LC, si dovrà allora prendere separatamente una lunghezza equivalente a queste 10 parti, e unirla in seguito all' altra equivalente a 2,37.

921. Ciò premesso, e ritornando al caso nostro, vogliasi trovar la lunghezza da darsi all' ordinata $y=\sqrt{19}$ nel circolo del diametro AB=20. Prima di tutto si pongano ad angolo qualunque due rette indefinite PQ, PR. Su queste si prendano le 142

F. 142 lunghezze PS, PT eguali l'una ad un intera parte BG della scala, l'altra eguale ad una delle 20 parti eguali di AB, e si conduca ST. In seguito, poichè si ha prossimamente $\sqrt{19}=4,36$, si applichi sopra PQ la lunghezza PO=4,36 presa sulla scala, e si conduca OM parallela ad ST; sarà PM la lunghezza della richiesta ordinata. Infatti (591) PM : PT :: OP : PS :: 4,36 : 1, e quindi PM=4,36×PT; ma PT è una parte ventesima di AB, dunque PM sarà 4,36 parti ventesime di AB, e in conseguenza equivarrà prossimamente a $\sqrt{19}$.

922. Si debba ora descriver la curva dell'equazione $y^2=px$. Già si vede che questa dee tagliar la linea delle ascisse nella loro origine, poichè fatta $x=0$, si ha $y=\pm\sqrt{px}=0$ (898), e di più che dee aver due rami eguali, uno positivo l'altro negativo. Inoltre poichè comunque si aumenti x, purchè si mantenga positiva, y resta sempre reale, e sempre cresce di valore senza giammai tornare ad essere zero; perciò niuno dei rami toccherà mai più l'asse, da cui continuamente ambedue si scosteranno: onde a differenza del circolo questa curva non sarà rientrante. Infine siccome facendo x negativa, y risulta immaginaria, dunque dalla parte negativa dell'asse non vi è cur-
143 va, la quale avrà quindi la forma MAM'.

923. Presto incontreremo la proposta equazione (937), e vedremo qual'è la curva per noi ignota finquì, a cui esclusivamente appartiene. L'equazione intanto ci fa sapere che ciascuna sua ordinata sarà in questa curva media proporzionale tra l'ascissa ed una costante arbitraria a. Ciò dà il modo di costruirne *graficamente* tutta la porzione compresa fra le ascisse $x=0$, $x=a$.
144 Si prenda AB$=a$, e su questa come diametro si descriva il circolo AMBm. Se da un punto qualunque P si alzi la doppia ordinata Mm, e condotte le corde eguali AM, Am, si prolunghi superiormente e inferiormente l'ordinata in N, n in modo che sia PN=AM, e di più Pn=Am, i due punti N, n apparterranno alla curva cercata. Infatti posto AP$=x$, PN$=y$, sarà sempre (587) $y^2=AM^2=ax$.

924. Sia infine $y^2=x^2-a^2$: facendo $y=0$, si ha $x=\pm a$;
145 onde preso sull'indefinita BD un punto A per origine delle ascis-

se, e due parti AS, As eguali ad a, la curva dee passar pei punti S, s che prendono il nome di *vertici*. In oltre poichè $y = \pm\sqrt{(x^2-a^2)}$, equazione che riman la stessa cangiandovi x in $-x$; perciò la curva ha quattro rami eguali ed opposti, due dalla parte positiva, e due dalla parte negativa dell' asse. Di più poichè posto $x<a$ risulta y immaginaria, perciò non vi è curva fra i vertici S ed s. All' opposto ponendo $x>a$, y è sempre reale, e cresce sempre crescendo x; perciò i quattro rami al di là dei due vertici crescono indefinitamente, nè più s'incontrano con l'asse; onde neppur questa curva è rientrante, ed ha là forma rappresentata dalla figura. F.145

925. Le curve più facili a costruirsi sono, dopo il cerchio, quelle dette di *genere parabolico*, rappresentate dall' equazione $y=p$, ove p è una funzione intera e razionale di x; poichè ad ogni valor di x non corrispondendo che un solo valor di y, la curva proseguirà senza stacco e in infinito dall' una e dall' altra parte dell' asse, che incontrerà in tutti i punti corrispondenti a quei valori reali di x i quali soddisfanno all' equazione $p=0$. Se poi in luogo di $y=p$, si avesse $y=\frac{p}{q}$, a tutti quei valori di x, che soddisfacessero a $q=0$, corrisponderebbe un' ordinata infinita. 146.

926. Dopo le curve di genere parabolico, le più semplici a descriversi son quelle la cui equazione può ridursi alla forma di $qy^2-2py+r=0$, con p, q, r funzioni reali e razionali di x. L' equazione risoluta darà $y=\frac{p}{q}\pm\frac{1}{q}\sqrt{(p^2-qr)}$; ed è chiaro che y sarà reale, razionale e doppia ogni qualvolta abbiasi $p^2>qr$, reale e razionale ma unica quando sia $p^2=qr$, immaginaria quando sia $p^2<qr$. Sostituiti dunque per x in $p^2-qr=0$ i valori 0, 1, 2, ec. qualora e finchè incontreremo un risultato >0, per ogni valore di x avremo due valori differenti di y, e quindi due rami ineguali di curva. All' opposto finchè incontreremo un risultato <0, le ordinate saranno immaginarie, e la curva per tutto quel tratto mancherà. Quando poi incontreremo zero, cioè per tutti i valori di x che son radici reali dell' equazione $p^2-qr=0$, avremo un' ordinata unica la quale non potendo in tal caso attraversar la curva dovrà esserle tangente. E come i valori di x che son radici reali ed ineguali dell' equazione s' incontrano ad ogni cambiamento di segno dato dalle successive sostituzioni (284), così ogni porzione di curva seguita o preceduta da interruzione terminerà o comincerà con un' ordinata tangente. A queste separate porzioni si dà il nome di *ovali coniugate*. 147

Se niun valore di x renda $\frac{p}{q}$ negativo, nè $<\frac{1}{q}\sqrt{(p^2-qr)}$, le ovali saranno tutte e interamente al di sopra dell' asse X. Diversamente attraverseranno l' asse

F.147 nei punti per i quali il valor corrispondente di x rende $\frac{1}{q}\sqrt{(p^2-qr)}=\frac{p}{q}$, il che dà uno dei valori di $y=0$.

Se l'equazione $p^2-qr=0$ ha due radici eguali, sparirà la distanza fra due ordinate tangenti, e con essa o sparirà l'intervallo senza curva, o sparirà l'ovale. Nel primo caso i rami di un'ovale si congiungeranno coi rami della seguente, e la curva comparirà *annodata*; nel secondo sparirà l'ovale, ossia si ridurrà ad un sol punto separato dal resto della curva, e a cui si dà il nome di *punto coniugato*.

Se le radici eguali son tre spariranno insieme l'ovale e lo spazio senza curva; ed il punto coniugato si attaccherà all'ovale susseguente, la quale dovendo dunque terminare in un punto formerà una *cuspide* o *regresso*.

927. Nelle curve dell'equazione $y^3+py^2+qy+r=0$, ove p, q, r si suppongono al solito funzioni reali e razionali di x, e nelle quali y è perciò funzione triforme di x (146), è chiaro che per ogni valore di x l'ordinata y ne avrà tre, i quali potranno essere o tutti reali, o un solo reale e due immaginarj (273).
148 Quindi ciascun'ordinata incontrerà la curva o in un sol punto, o in tre, e soltanto
149 potrà incontrarla in due nel caso che due delle radici reali sieno eguali tra loro. Frattanto poichè un valore reale di y deve sempre aver luogo qualunque sia x (273), perciò queste curve dovranno necessariamente aver un ramo che senza interruzione veruna si stenderà dall'una e dall'altra parte del punto d'origine in infinito, e potranno pure avere un numero più o men grande d'ovali coniugate.

928. In quelle dell'equazione $y^4+py^3+qy^2+ry+s=0$ con y funzione quadriforme di x, l'ordinate potranno avere o quattro valori reali, o due soli, o veruno. Per tutto il tratto dell'asse corrispondente a quei valori di x che danno luogo all'ultimo caso vi sarà un'interruzione nella curva; nei tratti rimanenti le or-
150 dinate incontreranno o due o quattro volte la curva, la quale potrà avere o due, o anche quattro rami infiniti, o nessuno. Nel modo stesso potremo ragionare sulle curve di consimili e più elevate equazioni.

929. Al punto ove due rami di una medesima curva s'intersecano tra di loro si dà il nome di *nodo* o di *punto doppio*. Si chiama punto *triplo* quello per cui passan tre rami, *quadruplo* quello per cui ne passan quattro, o dove si riuniscono due punti doppj, e in generale punto *multiplo* quello che spetta in comune a più rami. Tutti questi punti debbon per natura corrispondere ad una medesima ascissa.

930. Talvolta le curve dopo aver rivolta per qualche tratto all'asse la loro concavità, cambiata direzione vi oppongon la convessità, e viceversa. Il punto ove accade questo cangiamento, e che è il confine della concavità e della convessità si chiama *punto d'inflessione*. I punti coniugati, i nodi e i punti multipli, e quelli di regresso e d'inflessione si chiamano punti *singolari*. Questi, e le ovali o interrotte o coniugate, e con rami finiti o infiniti, sono le principali varietà che possono incontrarsi nelle figure delle curve di qualunque equazione.

931. Le curve si dividono in *algebriche* o *geometriche*, ed in *meccaniche* o *trascendenti*, secondo chele loro coordinate sono o linee rette, la cui ragione possa determinarsi geometricamente, o quantità trascendenti (146).

932. Le curve algebriche si suddividono in *ordini* o *generi*, secondo il grado delle loro equazioni. Non ve n' è alcuna di prim' ordine, perchè un'equazione qualunque di primo grado tra le coordinate x, y porta sempre, siccome vedemmo (913), ad una linea retta, la quale è perciò chiamata *linea di primo genere* o *di prim' ordine*. Ve ne sono quattro del secondo, settantadue del terzo, cento quarantasei del quarto; quelle degli ordini maggiori sono in numero molto più grande.

933. Non sempre un' equazione si riferisce ad una curva del genere corrispondente al suo grado. Se ridotta a zero può decomporsi in fattori, essa appartiene allora *complessivamente* alle curve d' ordine inferiore che hanno quei fattori per loro particolare equazione, e tra le quali niun altro rapporto esiste che l' aver tutte in comune i medesimi assi. Infatti se due o più equazioni si moltiplicano fra loro, è chiaro che i valori di y i quali soddisfanno al prodotto, saranno appunto quelli che soddisfanno in particolare a ciascuna dell'equazioni moltiplicate. Costruendo dunque la nuova equazione, ossia dando ad y tutti i possibili valori, dovremo necessariamente incontrarci in ciascuna di queste curve, nè avran luogo altri valori di y oltre quelli che serviranno per le medesime. Così se l' equazione al circolo $y^2+x^2=a^2$ si moltiplichi per l' equazione alla linea retta $y=ax$, ne risulterà un' equazione del terzo grado, la quale per conseguenza darà tre valori di y per ogni valore di x. Ora tra questi valori dovranno indispensabilmente aver luogo a parte tutti quelli che soddisfanno all' equazione $y-ax=0$, i quali costruiti isolatamente daranno nascita ad una linea retta; e dovranno aver luogo a parte tutti quelli dell' altra equazione $y^2+x^2-a^2=0$, i quali daranno nascita a un circolo. In luogo dunque di una curva di terz' ordine, non altro potremo avere che un circolo ed una retta. Eulero chiama curve *complesse* quelle che corrispondono nell' indicato modo ad un' equazione decomponibile in fattori. Frattanto è manifesto non potere asserirsi che un' equazione appartenga ad una curva del suo grado, se ridotta a zero non sia stata trovata indecomponibile.

934. Le più semplici tra le curve, dopo il circolo di cui abbiamo abbastanza parlato, sono le *sezioni coniche* (752); da queste dunque daremo principio, e comecchè più delle altre importanti, le tratteremo con qualche maggiore estensione. Ma avanti tutto premetteremo, che se presa una qualunque ascissa AP, si alzi un'ordinata PM, e quindi al punto M si conduca MT tangente in M protraendola fino all' incontro in T col prolungamento dell' asse AP, e infine dallo stesso punto M si cali sull' asse la MN normale ad MT nel punto M, tutta l' intera por- F.151

F.151 zione della tangente MT chiusa tra i prescritti limiti, cioè da M a T, si chiama *tangente al punto* M; la porzione PT dell'asse compresa fra T suo punto d'incontro con la tangente, e P piede dell'ordinata PM, si chiama *suttangente*. La normale MN presa essa pure da M ad N dicesi *normale* al punto M; e la porzione PN dell'asse, chiusa tra il piede P dell'ordinata e il piede N della normale, si chiama *sunnormale*. E qui deve osservarsi che la suttangente e la sunnormale sono nella figura dirette l'una contrariamente, l'altra conformemente al senso delle ascisse positive. Onde se con queste direzioni si assumono per positive, qualora in qualche caso prendano una direzione opposta, dovranno considerarsi negative. Similmente l'angolo della tangente con l'asse è acuto nella figura, ma può divenire ottuso, e allora la sua tangente si cangerà di positiva in negativa.

Sezioni Coniche

152 935. Tagliato un cono retto BCD con un piano AMP, si cerca l'equazione della curva MAm che nasce da questa sezione. Per l'asse BN del cono (749) e normalmente al piano secante AMaP si faccia passare il piano triangolare BCD (748), e la retta Aa sia l'intersezione dell'uno con l'altro di questi due piani (692.1°). Da un punto qualunque P di Aa si conduca sul piano secante la PM normale ad Aa, e perciò normale al piano BCD (704) e quindi parallela alla base, e per PM si faccia passare un nuovo piano FMGm parallelo alla base del cono e in conseguenza normale all'asse BN (712). È chiaro 1°. che la nuova sezione FMGm sarà un circolo (750); 2°. che la sua intersezione FG col piano triangolare dovrà come questo passare per l'asse e quindi per il centro del circolo, e sarà dunque un diametro; 3°. che il piano di questo circolo sarà normale al piano BCD (703); 4°. che PM normale per condizione ad Aa sarà insieme normale ad FG (693), e quindi sarà ordinata comune tanto all'una che all'altra sezione. Sia dunque $AP=x$, $PM=y$, $AB=c$, l'angolo $ABa=B$, l'angolo $BAa=A$: il circolo dà $y^2=FP\times PG$ (657), e per trovare FP e PG, conduco AE parallela a

CD, e PK parallela a BD, l'una e l'altra nel piano BCD; d'onde (838) $sen\,AEB : AB :: senB : AE = \frac{csenB}{senD}$. Inoltre $senAKP$ ($= senD$): $senAPK$ ($= senAaE = sen(A+B)$ (559)) $:: x : AK = \frac{xsen(A+B)}{senD}$; dunque $PG = KE = AE - AK = \frac{csenB - xsen(A+B)}{senD}$. Infine $senAFP (= senBFG (793.5^o) = senC) :x :: senA : FP = \frac{xsenA}{senC}$; onde $y^2 = \frac{senA}{senCsenD}(cxsenB - x^2sen(A+B))$, equazione cercata, dalla quale intanto si apprende che in generale ad ogni ascissa x corrispondono sempre due ordinate y eguali ed opposte: onde l'asse delle x divide in mezzo la sezione, la quale deve quindi aver per lo meno due rami.

F.152

936. Sia frattanto $A+B < 180^o$; allora l'angolo CAP sarà maggiore dell'angolo B (559), e il piano secante AMP convergendo sul lato BD lo incontra in a, onde la sezione è *rientrante* o chiusa. Ciò è reso pur manifesto dall'equazione; poichè fatto $y=0$, si ha (261) $x=0$, $x = \frac{csenB}{sen(A+B)}$, cioè si trova che la curva taglia l'asse in due punti (898); e siccome il triangolo ABa dà $\frac{csenB}{sen(A+B)} = Aa$, i due punti son dunque l'uno all'origine A ove $x=0$ (*ivi*), l'altro in a al termine dell'asse Aa. Inoltre posto $Aa = 2a$ l'equazione si converte assai facilmente in $y^2 = \frac{senAsen(A+B)}{senCsenD}(2ax - x^2)$, la quale dà y immaginaria nei casi di x negativa, e di $x > 2a$. È dunque chiaro che la curva è tutta compresa fra i punti o *vertici* A,a. A questa curva si dà il nome di *ellisse* (752); l'intero asse Aa delle ascisse si denomina *asse primo*, *maggiore* o *trasverso*, come per analogia si chiama *asse secondo*, *minore* o *coniugato* la doppia ordinata corrispondente ad $x=a$, o alzata sul *centro* C della curva, ossia sulla metà dell'asse trasverso. Si rappresenti con $2b$ questa doppia ordinata: avremo dall'equazione, postovi $x=a$, $b^2 = \ldots\ldots$ $\frac{senAsen(A+B)}{senCsenD}a^2$, d'onde $\frac{senAsen(A+B)}{senCsenD} = \frac{b^2}{a^2}$, valore che introdotto nell'equazione la riduce ad $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$.

157

F.153 937. Secondariamente sia $A+B=180^\circ$; allora l'angolo CAP è eguale all'angolo B (547), e il piano AMP è parallelo al lato BD; onde la sezione, che in tal caso si chiama *parabola* (752), non terminerà che alla base del cono, l'altezza del quale non essendo determinata da alcun limite, e potendo supporsi infinita, anche i due rami della curva potranno divenire infiniti. Or poichè $A+B=180^\circ$ dà $sen(A+B)=0$, l'equazione alla nuova curva sarà $y^2=\frac{senAsenB}{senCsenD}cx$, ovvero $y^2=px$, posto p in luogo del coefficiente $\frac{senAsenB}{senCsenD}c$, che si suppone tutto noto e costante. A questa costante p si dà il nome di *parametro* della curva; e come è chiaro, deve equivaler sempre alla terza proporzionale dopo un'ascissa qualunque e la corrispondente ordinata; onde è sempre facile a ritrovarsi quando la curva sia data. L'asse AP dell'ascisse si chiama *asse principale*.

938. Finalmente sia nell'equazione generale $A+B>180^\circ$; 154 allora l'angolo CAP sarà minore dell'angolo B, il piano AMP divergerà dal lato BD, nè lo incontrerà se non si supponga prolungato oltre il vertice B, figurandoci cioè che gli apotemi del cono dato, dopo essersi tagliati in B, proseguano ad estendersi anche al di sopra, e formino il nuovo cono dBc, eguale ed opposto al primo. In tal caso il piano secante che taglia il cono inferiore, steso al di sopra taglierà egualmente il superiore, ed avremo due sezioni staccate l'una dall'altra di tutto l'intervallo Aa. Ora dal triangolo ABa abbiamo $c : Aa :: senAaB : senABa$; e poichè conservando ad A, B gli stessi significati che sopra (935), si trova $senABa=sen(180^\circ-B)=senB$, $senAaB=sen(B-aAB)(559)=sen(B-(180^\circ-A))=sen(B+A-180^\circ)=(790)-sen(180^\circ-A-B)=(792.5 1^a)-sen(A+B)$, dunque fatto come nell'ellisse $Aa=2a$, avremo dalla proporzione precedente $\frac{csenB}{sen(A+B)}=-2a$, valore che introdotto nell'equazion generale, darà per una prima trasformazione $y^2=-\frac{senAsen(A+B)}{senCsenD}\times(2ax+x^2)$, ovvero (793.6°) $y^2=\frac{senAsen(360^\circ-A-B)}{senCsenD}(2ax+x^2)$; ove dee notarsi che essendo $A+B>180^\circ$, $sen(360^\circ-A-B)$ sa-

rà sempre positivo (793. 3.°), e quindi tale sempre sarà il coefficiente costante del secondo membro. Potremo dunque rappresentarlo con $\frac{b^2}{a^2}$, con che avremo $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax+x^2)$, equazione che dando y immaginario quando x è negativa e $<2a$, mostra il vuoto che resta per il tratto Aa. E qui pure come nell'ellisse, si chiama *asse primo, maggiore o trasverso* l'asse $2a$, *secondo, minore o coniugato* l'asse rappresentato dalla doppia normale $Bb=2b$, elevata sul centro C, e che in questa curva, alla quale è dato il nome d'*iperbola*, non entra dunque come nell'ellisse fra le ordinate (936).

Fig. 154

155

939. Se, come per il circolo (911), si introducano in luogo delle coordinate x, y i loro valori dati per le coordinate x', y' riferite ad assi qualunque e a qualunque origine, otterremo equazioni più generali. E qui pure dovremo osservare che gli assi primitivi essendo ortogonali, sarà (907. 1.°) $x=\alpha+x'\cos xx'+y'\operatorname{sen} yy'$, $y=\beta+x'\operatorname{sen} xx'+y'\cos yy'$, ovvero $x=\alpha+px'+qy'$, $y=\beta+p'x'+q'y'$ ponendo per semplicità di calcolo $\cos xx'=p$, $\operatorname{sen} xx'=p'$, $\operatorname{sen} yy'=q$, $\cos yy'=q'$; ed occorrerà rammentarci che α e β sono qui le coordinate che riferiscono la nuova origine alla primitiva (906). Abbiasi dunque l'equazione $y^2=ax$ alla parabola del parametro a. Introdotti i nuovi valori, sviluppato il quadrato, mandata a zero l'equazione e fatto $2p'=Aq'$, $2\beta q'-aq=Cq'^2$, $2\beta p'-ap=Dq'^2$, $\beta^2-a\alpha=Fq'^2$, la proposta, omessi per semplicità gli apici delle nuove coordinate, si trasformerà in $y^2+Axy+\frac{1}{4}A^2x^2+Cy+Dx+F=0$. E qui osserveremo che mentre p' e q' sono respettivamente dipendenti da p e q, le cinque quantità a, α, β, p, q sono arbitrarie; d'onde ragionando come si fece per il circolo, concluderemo che i coefficienti A, C, D, F possono esser qualunque, e che perciò la trasformata in null'altro differisce da un'equazione generale di secondo grado, se non in questo che i primi suoi tre termini formano un quadrato perfetto. Perciò *ogni equazione di secondo grado fra due indeterminate* x, y, *nella quale i primi tre termini, o quelli in cui le indeterminate sono alla seconda e massima dimensione formino un quadrato perfetto, è una trasformata dell'equazione* $y^2=ax$ *della parabola,* e quindi appartiene esclusivamente a questa curva (908).

940. Ciò manifestamente vale anche qualora uno o più dei coefficienti A, C, ec. sieno nulli, purchè D non lo sia insieme con C o con A, mentre nel primo caso l'equazione risoluta darebbe $y=-\frac{1}{2}Ax\pm\sqrt{-F}$, cioè con F positiva darebbe y immaginaria, con F negativa apparterrebbe ad una retta (913); e nel secondo non sarebbe più fra due indeterminate, nè potrebbe appartenere a veruna curva.

941. Frattanto se $A=0$, o se abbiasi $y^2+Cy+Dx+F=0$, sarà $p'=\operatorname{sen} xx'=0$; d'onde $xx'=0$, cioè l'asse X' della trasformata sarà parallelo all'asse X della proposta. E se anche $C=0$, ed abbiasi $y^2+Dx+F=0$, sarà $2\beta q'-aq=0$; d'onde $q':q=\cot yy'=(907. 1.°)\ \operatorname{tang} xy'=\frac{1}{2}a:\beta$. Ora sia HO, parallela ad AN, l'asse X'

158

Fig. 158 con l'origine in un punto qualunque H. Condotta dal punto M del suo tragitto per la curva la MP ordinata all'asse AN, la tangente MT, e la normale MN, sarà $\mathrm{MP}=\beta$; $tang\,\mathrm{PTM}=tang\,\mathrm{NMP}=\mathrm{PN}:\mathrm{MP}=(952)\ \frac{1}{2}a:\beta=tang\,xy'=tang\,x'y'$, d' onde $x'y'=\mathrm{MTP}=\mathrm{TMH}$, cioè l'asse Y' sarà parallelo alla tangente in M. Infine se anche $F=0$, ed abbiasi $y^2+Dx=0$, equazione che non differisce dalla primitiva se non per l'angolo delle coordinate, e pel coefficiente di x, sarà $\beta^2-a\alpha=0$, d'onde $\alpha=\beta^2:a=$ AP (937): saranno perciò AP e PM le coordinate che riferiscono alla primitiva A l'origine nuova, la quale dovrà dunque cadere in M. Si avvertirà che in questo caso e nel precedente, si hanno due eguali ed opposti valori di y per ogni valore di x; onde l'asse X' al pari del principale, divide in mezzo tutte le sue coordinate; per lo che vien chiamato *diametro*. Ma su di ciò più estesamente altrove (955).

942. In pari modo si troverà che le due equazioni $y^2=\frac{b^2}{a^2}(\pm a^2\mp x^2)$, spettanti l'una all'ellisse (964), l'altra all'iperbola (980), si trasformano nelle due

$$\left.\begin{array}{l}\mp a^2b^2+a^2\beta^2+2a^2\beta p'x+2a^2\beta q'y+a^2p'^2x^2+2a^2p'q'xy+a^2q'^2y^2\\ \quad\pm b^2\alpha^2\pm 2b^2\alpha px\pm 2b^2\alpha qy\pm b^2p^2x^2\pm 2b^2pqxy\pm b^2q^2y^2\end{array}\right\}=0,$$

che divise per il coefficiente di y^2 posson rappresentarsi in comune con $y^2+Axy+Bx^2+Cy+Dx+F=0$, ove i cinque coefficienti A, B, C, ec. funzioni delle sei arbitrarie $a, b, \alpha, \beta, p, q$ potranno aver qualunque valore. Bensì poichè operando si trova $B-\frac{1}{4}A^2=\pm a^2b^2\left(\frac{p'q-pq'}{a^2q'^2\pm b^2q^2}\right)^2$, dovrà esser $B>\frac{1}{4}A^2$ quando ha luogo il segno superiore, ossia per l'ellisse, e $B<\frac{1}{4}A^2$ nel caso opposto, ossia per l'iperbola. Di qui: *ogni equazione della forma $y^2+Axy+Bx^2+Cy+Dx+F=0$, sarà ad un'ellisse se $B>\frac{1}{4}A^2$, ad un'iperbola se $B<\frac{1}{4}A^2$*. Si eccettui il caso che manchi y^2: poichè dovendo allora aversi $a^2q'^2\pm b^2q^2=0$, nè potendo ciò avverarsi se non qualora abbia luogo il segno inferiore, l'equazione apparterrà dunque in ogni caso all'iperbola.

943. Quindi 1.° se B sia nullo o negativo, l'equazione sarà sempre ad un'iperbola. 2.° Se con $B>\frac{1}{4}A^2$ abbiasi $B=1$, troveremo $\frac{b^2}{a^2}=\frac{p'^2-q'^2}{q^2-p^2}=\frac{sen^2xx'-cos^2yy'}{sen^2yy'-cos^2xx'}=1$, e $b=a$, cioè l'ellisse si cangerà in un circolo (964); come d'altronde è chiaro, avendosi nel caso nostro $A<2$ (912). Nel modo stesso si proverà che se $B=-1$, e di più le coordinate sieno ortogonali, nel qual caso $xx'=yy'$ (904. 3.°), l'iperbola sarà equilatera. 3.° Se $C=D=0$, troveremo $b^2\alpha(pq'-p'q)=0$, $a^2\beta(pq'-p'q)=0$, e poichè il fattore $pq'-p'q$ non può esser nullo, come è facile dimostrare, sarà dunque $\alpha=0$, $\beta=0$, cioè i due nuovi assi passeranno pel centro respettivo delle due curve. 4.° Se inoltre manchi Axy, ed abbiasi soltanto $y^2+Bx^2+F=0$, gli assi diverranno diametri (941). 5.° Se manchi il

170 solo Bx^2, sarà $a^2p'^2=b^2p^2$, $p':p=b:a$, e quindi $tang\,xx'=(988)\,tang\,\mathrm{DCA}$, ed $xx'=\mathrm{DCA}$, cioè l'asse X' sarà parallelo ad uno degli asintoti; come sarà parallelo all'altro asintoto l'altro asse Y', se manchi y^2, e sia perciò $a^2q'^2=b^2q^2$. L'iperbola sarà poi equilatera se di più, come sopra, abbiasi $xx'=yy'$,

cioè se le coordinate sieno fra loro ortogonali. Frattanto poichè all'equazione $y^2+Axy+Bx^2+Cy+Dx+F=0$ può agevolmente ridursi l'altra $Py^2+A'xy+B'x^2+C'y+D'x+F'=0$, sol che questa si divida per P, e poichè quindi non può esservi equazione di secondo grado che non cada o non possa ridursi sotto una delle forme contemplate, concluderemo perciò che escluso il solo caso osservato di sopra (940), *qualunque equazione omogenea del secondo grado, purchè ridotta a zero non sia decomponibile in due fattori di primo (933), spetta sempre o ad un circolo o ad una qualche sezione conica*; d'onde il nome di *linee di second' ordine* dato a queste curve.

944. Le due equazioni dell'ellisse e dell'iperbola posson riunirsi nell'unica $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax\mp x^2)$. Si faccia $\frac{2b^2}{a}=p$: avremo allora $y^2=px\mp\frac{px^2}{2a}$, equazione la quale non differisce da quella della parabola che per l'aggiunta del termine $\mp\frac{px^2}{2a}$. E poichè questo tanto più diminuisce quanto è più piccolo x, e più grande $2a$ (50), perciò *gli archi ellittici ed iperbolici tanto meno differiranno dai parabolici, quanto saran più prossimi al vertice, ed avranno un più grand' asse trasverso.*

945. La costante p introdotta nella comune equazione dell'ellisse e dell'iperbola conserva anche in essa, come in quella della parabola, il nome di *parametro* (937), se non che in queste due curve è terza proporzionale dopo i due assi. Ora una delle più importanti ricerche dell'attuale teoria è di trovare il valor dell'ascisse, o i luoghi dell'asse a cui corrisponde un'ordinata eguale alla metà del parametro. Quanto alla parabola, fatto $y=\frac{1}{2}p$ si ha immediatamente $px=\frac{1}{4}p^2$, ed $x=\frac{1}{4}p$. Quanto poi alle altre due curve si avrà $px\mp\frac{px^2}{2a}=\frac{1}{4}p^2$, ovvero $x\mp\frac{x^2}{2a}=\frac{1}{4}p=$ (944) $\frac{b^2}{2a}$, d'onde per il segno superiore, o per l'ellisse, otterremo $x=a\pm\sqrt{(a^2-b^2)}$, e per il segno inferiore, o per l'iperbola, $x=-a\pm\sqrt{(a^2+b^2)}$.

946. Nella parabola il punto cercato è dunque ad una distanza dal vertice eguale alla quarta parte del parametro. L'ellisse ne ha due, che si troveranno facendo scendere sull'asse trasverso dalla sommità B del coniugato due oblique BF, Bf eguali alla metà dello stesso asse trasverso. Infatti questa costruzione

F. 157

F.157 darà $FC=fC=\sqrt{(a^2-b^2)}$, onde $AF=a-\sqrt{(a^2-b^2)}$, $Af=a+\sqrt{(a^2-b^2)}$. E due parimente ne ha l'iperbola, che si tro-
155 veranno riunendo con l'ipotenusa BA la sommità B dell'asse coniugato con il vertice A della sezione, e quindi prendendo sull'asse trasverso al di quà e al di là del centro C le porzioni CF, Cf ambedue eguali a BA. Infatti poichè $BA=\sqrt{(a^2+b^2)}$, sarà $AF=CF-CA=\sqrt{(a^2+b^2)}-a$, ed $Af=Cf+CA=-\sqrt{(a^2+b^2)}-a$. Questi punti F, f si chiamano *fuochi*; il loro semi-intervallo CF si chiama *eccentricità*, che rappresenteremo con e, ed avremo $CF=e=\sqrt{(a^2\mp b^2)}$.

947. Intanto si noterà che moltiplicando tra loro i due trovati valori di x nell'ellisse e nell'iperbola, si ottiene $(a-\sqrt{(a^2\mp b^2)})(a+\sqrt{(a^2\mp b^2)})=\pm b^2$; dunque, non curati i segni, *il semiasse minore è medio proporzionale tra le distanze dell'uno de' due vertici ai due fuochi*. Basti questo piccol saggio d'analogia tra le tre curve: per maggior chiarezza daremo separatamente il seguito delle lor proprietà; il che faremo nel modo il più semplice ed elementare, ed in guisa che quelli tra i principianti, ai quali non resti agio di proseguir lo studio oltre il primo anno del corso, possan volendo percorrere anche tutto ciò che sarà impresso in carattere minore. Al quale importante oggetto abbiamo appunto in più d'un luogo sacrificata la novità e la maggiore eleganza delle dimostrazioni, onde non dar luogo al richiamo d'altri principj, oltre quelli finora esposti in carattere maggiore.

Parabola

948. Poichè nella parabola abbiamo $y^2=px$ (937): dunque 1°. *i quadrati dell'ordinate sono fra loro come le ascisse.*

158 949. Condotta l'ordinata MP, e da M al fuoco F la retta o *raggio vettore* MF (902), che chiameremo z, sarà $FM=z=\sqrt{(MP^2+FP^2)}=(937.945)\sqrt{(px+(x-\frac{1}{4}p)^2)}=x+\frac{1}{4}p=AP+AF$: prolungata dunque PA, se si prenda $AG=AF=\frac{1}{4}p$, e per G si conduca l'indefinita o *direttrice* hGe parallela all'ordinata MP, sarà la normale $MH=PG=FM$; dunque 2°. *ciascun punto*

della parabola è ad egual distanza dalla direttrice e dal fuoco.

950. Di qui la maniera di condurre una tangente a un punto dato M della parabola. Uniti F ed H, e condotta MT normalmente ad FH, se da qualunque punto m di MT, diverso da M, si conducano in oltre le Hm, Fm e la mh perpendicolare alla direttrice, il triangolo isoscele (515) FmH darà Fm=mH. E siccome il triangolo rettangolo mhH dà mH>mh (568.5°), dunque altresì Fm>mh; onde il punto qualunque m di MT, comecchè più vicino alla direttrice che al fuoco, non caderà sulla curva, la quale perciò non avrà comune con MT che il punto M. Dunque MT sarà tangente (537); e poichè le parallele FT, MH danno l'angolo FTM=TMH (547)=TMF (525.1°), dunque anche il triangolo FTM è isoscele, e perciò FT=FM; quindi *presa* FT=FM, *la retta* MT *condotta* per T *ed* M *sarà tangente in* M.

F.158

951. Prolungata in O la normale MH, e condotta MN normale ad MT, si avrà l'angolo mMO=HMT=TMF (950), e quindi anche OMN=NMF (504.4°). Dunque *tutti i raggi lucidi, calorifici e sonori paralleli all' asse* AN *incontrando la parabola in* M *sotto l'angolo* d'incidenza OMN, *dovran riflettersi per* MF *sul fuoco* F, sapendosi dalla Fisica che l'angolo di riflessione è eguale a quello dell'incidenza.

952. Poichè FT=FM=$x+\frac{1}{4}p$ (949), sarà FT$-\frac{1}{4}p=x=$ AT (945); dunque la *suttangente* PT (934)=$2x$ *è doppia dell' ascissa.* La tangente MT=$\sqrt{(px+4x^2)}=2\sqrt{xz}$; la sunnormale PN=$\frac{PM^2}{PT}=\frac{px}{2x}=\frac{1}{2}p$; onde *nella parabola la sunnormale è costante ed eguaglia la metà del parametro.* Infine la normale MN=$n=\sqrt{(px+\frac{1}{4}p^2)}=\sqrt{pz}$.

953. Chiamato ω l'angolo MTP della tangente con l'asse, avremo (846.1°) $sen\omega=\frac{MP}{MT}=\frac{y}{\sqrt{(px+4x^2)}}=\sqrt{\frac{p}{p+4x}}$; $cos\omega=\frac{PT}{MT}=\frac{2x}{\sqrt{(px+4x^2)}}=\ldots$, $2\sqrt{\frac{x}{p+4x}}=2sen\omega\sqrt{\frac{x}{p}}$; $tang\omega=\frac{sen\omega}{cos\omega}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$. E se dal punto N, ove la normale incontra l'asse, si conducano ad OM e al raggio vettore FM, le perpendicolari NB′, NB, i triangoli NBM, NB′M eguali (951) daranno BM=MB′=PN=$\frac{1}{2}p$; e

F.156 se infine dal punto F si conduca sulla tangente TM la perpendicolare $FC=q$, sarà $MT : TC :: MN : FC$, e poichè $TC=\frac{1}{2}MT$ (525), sarà $FC=q=\frac{1}{2}n=\frac{1}{2}\sqrt{pz}$, e perciò $2qn=n^2=pz$, ed $n=\frac{pz}{2q}$ espressione notabile della normale.

954. Il triangolo FMP dà $FM : FP :: 1 : cos MFP$. Fatto dunque $MFT=\theta$, perciò $MFP=180^\circ-\theta$, e sostituiti i valori di $FM=x+\frac{1}{4}p$, di $FP=x-\frac{1}{4}p$ e di . . . $cos(180^\circ-\theta)=$(792.55ª)$-cos\theta$, avremo $x+\frac{1}{4}p : x-\frac{1}{4}p :: 1 : -cos\theta$; ossia $x+\frac{1}{4}p : \frac{1}{2}p :: 1 : 1+cos\theta$, d' onde $x+\frac{1}{4}p=z=\frac{p}{2(1+cos\theta)}=\frac{p}{4cos^2\frac{1}{2}\theta}$ (797.88ª), equazione polare della parabola (902), di cui si fa molto uso nell'Astronomia. Intanto ne dedurremo che, se collo stesso asse e fuoco si descriva un' altra parabola $A'M'$ del parametro p', sarà $FM : FM' :: p : p' :: FA : FA'$.

459 955. Ogni retta indefinita A'O che da un punto qualunque A' della curva sia condotta parallelamente all' asse principale AL prende il nome di *diametro;* e se da qualsivoglia punto P' del diametro si conduca alla curva la P'M parallela all' A'T tangente all' origine A' del diametro, le A'P', P'M si chiamano *coordinate al diametro*, e tra esse esiste un' equazione di rapporto (896) come fra le coordinate all' asse. Per trovar quest' equazione chiamo al solito x, y le AP, PM coordinate del punto M riferite all' asse principale AL; x', y' le A'P', P'M coordinate dello stesso punto riferito al diametro A'O; a l' ascissa AQ del punto d' origine A', ω l' angolo A'TQ della tangente A'T con l' asse, ossia quello delle nuove coordinate x', y' fra loro. Dall'equazione all' asse avremo $A'Q=\sqrt{ap}$, e il triangolo MP'O darà $MO=y' sen\omega$, $P'O=y' cos\omega$. Di quì $y=MP=MO+OP=MO+A'Q=y' sen\omega+\sqrt{ap}$, $x=AP=AQ+PQ=AQ+A'O=a+x'+y' cos\omega$, valori che sostituiti in $y^2=px$, daranno $y'^2 sen^2\omega+2y' sen\omega\sqrt{ap}=px'+py' cos\omega$. Ma (953) $sen^2\omega=\frac{p}{p+4a}$, e $2sen\omega\sqrt{ap}=pcos\omega$, dunque $\frac{y'^2}{p+4a}=x'$, ossia fatto per comodo $p+4a=p'$, $y'^2=p'x'$, equazione simile alla trovata per l' asse; perciò qualunque diametro A'O divide in mezzo l' ordinate Mm, e il suo parametro $p'=p+4a$ è quadruplo della distanza dell' origine A' dal fuoco F (949).

956. Oltre l' equazione tra le coordinate, hanno i diametri molte altre pro-
460 prietà comuni coll' asse. Si faccia in primo luogo passare per il fuoco F la doppia ordinata Nn. Avremo l' ascissa $ML=FT$ (549)$=a+\frac{1}{4}p$ (949) $=\frac{p'}{4}$(955), equivalente cioè ad una quarta parte del parametro p' e quindi $Nn=2LN$(955)$=p'$. Inoltre sarà $LN=\sqrt{p'x}=\sqrt{\frac{p'^2}{4}}=\frac{p'}{2}$, cioè la doppia ordinata che passa per il fuoco eguaglia il parametro: due proposizioni che si son vedute verificarsi anche rapporto all' asse (945).

957. Abbiasi la secante NIm, e dai punti I, N ove essa taglia la curva si conducano le ordinate IS$=y$, NE$=y'$. Poste x, x' le corrispondenti ascisse ed Mm=b, i triangoli SmI, NmE simili, daranno mS : mE :: SI : NE, ovvero $b+x : b+x' :: y : y' :: \sqrt{p'x} : \sqrt{p'x'}$. Quadrando e riducendo si troverà $(b^2+x^2)x'=(b^2+x'^2)x$, d'onde $b^2(x'-x)=xx'(x'-x)$, e $b^2=xx'$: cioè *la parte esteriore del diametro, compresa fra l'origine e la secante, è media proporzionale fra le due ascisse.* F. 161

958. Or supponiamo che i punti N, I si avvicinino fra loro fino a coincidere in un sol punto M. La secante si cangerà allora in tangente, e le due ascisse x, x' diverranno ambedue eguali ad AR. Avremo in tal caso $b^2=m\text{A}^2=$ AR×AR=AR^2, e quindi mA = AR. Dunque mR = mA+AR=2AR: cioè *la suttangente è doppia dell' ascissa*, come per l' asse (952). 162

959. Ciò dà la maniera di condurre una tangente mM da un punto dato m fuori della curva. Fatto passar per m il diametro mE e presa AR=mA, si applichi in R l' ordinata RM parallelamente ad AG tangente in A (955). Uniti m, M è chiaro per le cose dette che mM sarà tangente.

Può peraltro a questa stessa ricerca soddisfarsi ancor più semplicemente nella guisa che segue. Unito m con F, si conduca da m sulla direttrice he l' obliqua mH=mF, e si cali da H normalmente ad he la retta HM, protraendola fino all' incontro in M colla curva. Sarà M il punto di contatto, e la retta MT condotta da M per m sarà la tangente. Infatti poichè Hm=mF, e (949) HM=MF, MT dunque è normale ad HF (517 1.°), divide quindi in mezzo l' angolo HMF (525. 1.°), e dà TMH=TMF; in conseguenza è tangente (950). 158

960. Ma come son sempre due le tangenti che da uno stesso punto m scendono sulla curva, è dunque chiaro che sì l' una che l' altra costruzione debbono poter raddoppiarsi. Ed infatti quanto alla seconda, siccome son due le oblique eguali mH che da m posson condursi sulla direttrice (497. 9°), così avremo due differenti angoli FmH, ciascun dei quali diviso in mezzo darà una distinta tangente. E quanto alla prima costruzione è manifesto che prolungata in M'' l'ordinata MR, sarà mM'' tangente, per la ragione stessa per cui è tangente mM. Di qui frattanto s'inferirà 1°. *che due tangenti, le quali partono dagli estremi di una doppia ordinata, debbono incontrarsi in un punto del diametro prolungato;* 2°. *la retta che dal punto d'incontro di due tangenti scende sulla metà della corda condotta fra i due contatti, è un diametro che ha per doppia ordinata la corda.*

961. Abbiansi adesso due diametri IL, AE, per le cui origini A, I passi la secante PA; e da un punto qualunque O di questa, preso sulla parte esteriore alla curva, sia condotta OM' parallelamente ad IS ordinata sul diametro AE. Avremo 1.° IS : OR :: AS : AR :: IS^2 : MR^2 (955); d' onde MR^2 = OR×IS=OR×FR; cioè le parti OR, MR, FR saranno continuamente proporzionali. 2.° La retta MM' divisa in mezzo in R e comunque in F darà (655) FM'×FM+FR^2=MR^2=OR×FR=OF×FR+FR^2 (651): onde FM'×FM=OF×FR. 3.° Quindi se da qualunque 162

F. 162 altro punto P di PA si conduca PN' parallela ad OM' sarà pure LN'×LN=PL×LE, onde si avrà FM'×FM : LN'×LN :: OF×FR : PL×LE :: OF : PL (549) :: IF : IL (577) : perciò *qualunque siasi l' angolo sotto cui un sistema di due o più corde parallele è tagliato da un dato diametro, i rettangoli delle parti in cui respettivamente restan divise le corde, staranno fra loro come le ascisse corrispondenti.* Questo teorema include quello che è espresso dall' equazioni agli assi ed ai diametri, ed è molto più generale.

962. Sciogliamo adesso alcuni problemi dipendenti dagli esposti principj.

163 I. Dato l' asse AL e il parametro p, trovare un diametro MO che faccia colle sue ordinate un angolo dato $MPn=a$. Il problema si riduce a trovare il punto Q ove l' ordinata normale MQ incontra l' asse. Sia $AQ=x$; il triangolo MQT dà $tang\ a=\frac{\sqrt{px}}{2x}$ (846. 2°), d' onde $x=\frac{p}{4}cot^2 a$, e $p'=p+4x$(955) $=\frac{p}{sen^2 a}$.

II. Dato il parametro p' e l' origine M del diametro MO, con l'angolo a delle coordinate, trovar l' asse AL, il vertice della curva A, ed il suo parametro p. Serbando le denominazioni del problema precedente, abbiamo $MQ=\pm\sqrt{px}$, $p'=\frac{p}{sen^2 a}=p+4x$, onde $p=p'sen^2 a$, $x=\frac{p'}{4}cos^2 a$, $MQ=\pm\frac{p'}{2}senacosa=\pm\frac{p'}{4}sen2a$ (791. 42°)

160 III. Data la parabola VN$n\nu$ trovarne l' asse, il parametro e il fuoco. Condotte comunque e divise in mezzo in L,I le due corde parallele Nn, Vν, si faccia passare per L,I la retta MB, che sarà un diametro della curva (955). Sopra MB si conduca da n la corda normale on, che sarà parimente normale all' asse cercato; comecchè parallelo ad MB (955); onde divisa on in mezzo con la retta SQ, questa retta sarà l' asse della data parabola (937). Condotta quindi la corda SN, l'ordinata NR, ed NQ normale ad SN, avremo (582. 2°) SR : NR :: NR : RQ, onde RQ sarà il parametro (937). Infine preso $SF=\frac{1}{4}RQ$, sarà in F il fuoco (945).

Ellisse

963. L' equazione all' ellisse essendo $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-xx)$... 157 (936), si avrà 1°. $y^2:2ax-x^2::b^2:a^2$, cioè $PM^2:AP\times Pa::CB^2:CA^2$; onde *il quadrato dell' ordinata sta al prodotto dell' ascisse, come il quadrato dell' asse minore al quadrato del maggiore.* 2°. Per due nuove coordinate, y', x' si avrà $y'^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax'-x'^2)$, ed $y^2:y'^2::x(2a-x):x'(2a-x')$, cioè *i quadrati di due ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse*

corrispondenti. 3°. Descritto col centro C e raggio CA un circolo, sarà $PN^2 = AP \times Pa$, ed avremo $PN : PM :: a : b :: CB' : CB$: onde *l'ordinate dell'ellisse son proporzionali all'ordinate del circolo, e queste stanno a quelle come l'asse trasverso al coniugato*: perciò per descrivere un'ellisse basta far passare una curva per una serie di punti presi sull'ordinate d'un circolo, divise in parti simili. F.137

964. Se in luogo di prender le ascisse dal vertice A, si prendano dal centro C, dovrà cangiarsi x in $a-x$, e l'equazione diverrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$, la quale ha sull'altra il vantaggio di rimaner la stessa tanto per le ascisse positive quanto per le negative, poichè niente cangia permutandovi x in $-x$. Questa, come più semplice, è più in uso; e da essa, se sopra Bb si cali l'ordinata $MQ = PC = x$, si ha $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$, equazione al second'asse, il cui parametro, terzo proporzionale dopo $2b$ e $2a$, sarà $p' = \frac{2a^2}{b} = (944) \frac{2a}{p}\sqrt{2ap} = 2a\sqrt{\frac{2a}{p}}$. È chiaro che se $a = b$, l'equazione all'ellisse diventa quella del circolo (910); onde il circolo è un'ellisse *equilatera* o di assi eguali.

965. Prese dunque l'ascisse dal centro, e supposto un punto M nella parte superiore o positiva della curva, si avrà il raggio vettore $FM = z = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = (946) \sqrt{(y^2 + (c-x)^2)} = \sqrt{(a^2 - 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2})} = a - \frac{ex}{a}$, risultamento che deve prescegliersi in luogo dell'altro $\frac{ex}{a} - a$, a cui pure sembrerebbe che potesse portar l'estrazione della radice, ma che qui non ha luogo, perchè essendo e ed x ambedue minori di a, si ha $ex < a^2$, e in conseguenza $\frac{ex}{a} < a$, onde $\frac{ex}{a} - a$ darebbe per FM un valor negativo, contro l'ipotesi. Nel modo stesso si avrà $fM = z' = \sqrt{(PM^2 + Pf^2)} = \sqrt{(y^2 + (e+x)^2)} = \sqrt{(a^2 + 2ex + \frac{e^2x^2}{a^2})} = \ldots\ldots$ $a + \frac{ex}{a}$. Dunque $fM + FM = 2a$, cioè *la somma dei due raggi vettori, o delle distanze di un punto qualunque dell'ellisse ai due fuochi, eguaglia l'asse trasverso.*

F. 157 966. Se sia l'angolo $PfM = \theta$, sarà $fP = e + x = fM.\cos\theta$, e perciò $x = fM.\cos\theta - e$, ed $fM = z = a + \frac{ex}{a} = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\theta} = (944) \frac{\frac{1}{2}ap}{a - e\cos\theta}$ equazione polare dell' ellisse (902); si avrà pure $FM = \frac{a^2 - e^2}{a - e\cos\theta'} = \frac{\frac{1}{2}ap}{a - e\cos\theta'}$, posto $PFM = \theta'$.

164 967. Debbasi ora condurre ad un dato punto M della curva una tangente. Prolungato in L il raggio vettore fM in modo che sia $ML = FM$, unisco FL, e conduco da M sopra FL la perpendicolare MT, che dividerà in mezzo FL e l'angolo FML (525. 1°). Quindi preso sopra MT un punto qualunque m diverso da M, conduco le rette fm, Fm, mL. Sarà $mF = mL$ (515), e perciò $mF + mf = mL + mf$: ma $mL + mf > fL$ (493), e per costruzione $fL = fM + ML = fM + FM = 2a$ (965); dunque $mF + mf > 2a$, onde il punto qualunque m non caderà sulla curva, la quale non avrà comune con MT che il punto M. Dunque MT sarà tangente; perciò *la retta* MT, *che divide in mezzo l'angolo fatto esteriormente all' ellisse dall' un raggio vettore col prolungamento dell' altro, è tangente.*

968. Poichè FML è diviso in mezzo da MT, avremo $FMT = TML = fMQ$ (506. 1°). Dunque se da M si alzi sulla tangente la normale MN, sarà $fMN = NMF$ (504. 3°) e quindi 1°. *tutti i raggi luminosi, sonori e calorifici che partono da uno dei fuochi, percuotendo la curva si rifletton sull' altro.* 2°. Il triangolo fMF darà (583) $fM : FM :: fN : NF$, ovvero $fM + FM (2a) : FM\left(a - \frac{ex}{a}\right) :: fN + FN (2e) : FN = e - \frac{e^2x}{a^2} = e - x + \frac{b^2x}{a^2}$, ed $fN = 2e - FN = e + \frac{e^2x}{a^2} = e + x - \frac{b^2x}{a^2}$; dunque poichè $fP = x + e$, ed $FP = x - e$, si avrà 1°. la *sunnormale* $PN = FN + FP = \frac{b^2x}{a^2} = \frac{px}{2a}$: 2°. la *normale* $MN = n = \frac{1}{a^2}\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)} = \frac{b}{a^2} \times \sqrt{(a^4 - e^2x^2)} = \frac{b}{a}\sqrt{(2az - z^2)}$ (965); la *suttangente* $PT = \frac{PM^2}{PN} = \frac{a^2y^2}{b^2x} = \frac{a^2 - x^2}{x}$: 4°. la *tangente* $TM = \frac{y}{b^2x}\sqrt{(a^4y^2 + b^4x^2)} = \frac{1}{ax}\sqrt{(a^2 - x^2)(a^4 - e^2x^2)}$. Inoltre $TC = TP + PC = \frac{a^2}{x}$, e quindi $CP : AC :: AC : CT$, d'onde si ha un altro modo di determi-

nare il punto T della tangente in M; $\mathrm{T}f = \frac{a^2}{x} + e = \frac{a^2 + ex}{x} = \frac{a(2a-z)}{x}$ (965); $\mathrm{TN} = \mathrm{TP} + \mathrm{PN} = \frac{a^2 n^2}{b^2 x}$; $\mathrm{TF} = \frac{a^2}{x} - e = \frac{az}{x}$; $\mathrm{AT} = \frac{a^2}{x} - a$; e nel vertice A la tangente $\mathrm{AV} = \frac{\mathrm{PM}\,.\,\mathrm{AT}}{\mathrm{PT}} = \frac{ay}{a+x} = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$. F. 164

969. Se debba condursi la tangente da un punto m dato fuori della curva, si unisca m con F, e quindi si facciano intersecare in L due archi l'uno descritto col centro in m e raggio $m\mathrm{L} = m\mathrm{F}$, l'altro col centro in f e raggio $f\mathrm{L} = 2a$. In seguito si conduca $f\mathrm{L}$; il punto M ove $f\mathrm{L}$ taglia la curva sarà il punto di contatto, e la retta $m\mathrm{T}$ fatta passare per M sarà la tangente cercata. Infatti poichè $m\mathrm{L} = m\mathrm{F}$ ed $\mathrm{ML} = f\mathrm{L} - f\mathrm{M} = 2a - f\mathrm{M} = \mathrm{FM}$ (965), MT è dunque normale sulla metà di FL (517. 1°), divide in mezzo l'angolo FML (525), ed è per conseguenza tangente (967). E' poi manifesto che come l'intersezione dei raggi $m\mathrm{L}$, $f\mathrm{L}$ può aver luogo in due punti, l'uno al di sopra, l'altro al di sotto di m, così la costruzione potrà raddoppiarsi, e darà due tangenti condotte dallo stesso punto m alla curva.

970. Che se dai fuochi f, F, e dal punto N ove la normale incontra l'asse, si conducano sulla tangente e sui raggi vettori le perpendicolari $f\mathrm{Q}$ ed FR, NB ed NB', come pure per il centro C, la DCD' parallela alla tangente, sarà 1.° $\mathrm{TN}\left(\frac{a^2 n^2}{b^2 x}\right) : \mathrm{NM}(n) :: \mathrm{TF}\left(\frac{az}{x}\right) : \mathrm{FR} = q = \frac{b^2 z}{an} :: \mathrm{T}f\left(\frac{2a^2 - az}{x}\right)$; $f\mathrm{Q} = \frac{b^2(2a-z)}{an} = \frac{an}{z}$ (968); d'onde si ha $\mathrm{FR} \times f\mathrm{Q} = b^2$, e la nuova espressione della normale $n = \frac{b^2 z}{aq} = \frac{pz}{2q}$ eguale a quella già trovata per la parabola (953), 2°. $\mathrm{M}f\left(a + \frac{ex}{a}\right) : f\mathrm{P}(c+x) :: f\mathrm{N}\left(c + \frac{e^2 x}{a^2}\right) : f\mathrm{B}' = \frac{c(c+x)}{a}$, onde $f\mathrm{M} - f\mathrm{B}' = \mathrm{MB}' = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{p}{2} = \mathrm{MB}$, atteso l'angolo $f\mathrm{MN} = \mathrm{NMF}$: 3°. $\mathrm{T}f\left(\frac{a^2}{x} + e\right) : f\mathrm{M}\left(a + \frac{ex}{a}\right) :: \mathrm{C}f(e) : f\mathrm{D} = \frac{ex}{a}$, e però $\mathrm{DM} = \mathrm{M}f - f\mathrm{D} = a = \mathrm{D'M}$, attesi i triangoli eguali DMS, SMD'. 4°. Condotta da C la normale CO sulla tangente QT, si avrà $\mathrm{CO} : \mathrm{NM}(n) :: \mathrm{CT}\left(\frac{a^2}{x}\right) : \mathrm{TN}\left(\frac{a^2 n^2}{b^2 x}\right)$, d'onde $\mathrm{CO} \times \mathrm{NM} = b^2$. 5°. Infine condotta CM e chiamati ω, φ gli angoli MCT, MTC i due triangoli rettangoli CPM, TPM daranno $y : x :: sen\omega : cos\omega$, $y : \mathrm{PT} :: sen\varphi : cos\varphi$; d'onde, posto il valor di PT e moltiplicate le due proporzioni, si trarrà $tang\varphi\ tang\omega = \frac{b^2}{a^2}$.

F. 157 971. Se dal punto M si conducano all' asse coniugato la tangente Mt e la normale MO prolungata in n, i triangoli simili MOP, MQn, MQt, e la sunnormale PO$=\frac{b^2 x}{a^2}$ daranno per il second' asse, sostituendo il valor di x^2 (964), 1°. la *sunnormale* Q$n$$=\frac{PM.MQ}{PO}=\frac{a^2 y}{b^2}=\frac{p' y}{2b}$ (964); 2°. la *normale* M$n$$=\frac{OM.MQ}{PO}=$.... $\frac{a}{b^2}V(b^4+e^2 y^2)$; 3°. la *suttangente* Q$t$$=\frac{QM^2}{nQ}=\frac{b^2-y^2}{y}$; onde C$t$=CQ+Q$t$$=\frac{b^2}{y}$ e perciò CQ : CB :: CB : Ct, come nell' asse trasverso (968).

972. La retta nCN che passando per il centro C termina ai due punti opposti della curva, dicesi *diametro;* e condotta DCd parallela alla tangente in N, i diametri DCd, nCN chiamansi *coniugati;* le rette MP parallele alla tangente son l'ordinate del diametro Nn, le parti CP ne son l' ascisse: il parametro di un diametro qualunque è una terza proporzionale a questo e al suo coniugato.

165 973. Per aver l' equazione alle coordinate PM, CP conduco da M la normale MO sull' asse Aa, e da P le PL, PK l' una normale ad MO, l' altra all' asse Aa. Poichè CO e MO sono due coordinate riferite all' asse, chiamo x l' una, y l' altra, m, n i semidiametri CN, CD, x', y' le CP, PM, coordinate al semidiametro CP, ω l' angolo NCT, φ l'angolo NTC $=$ MPL. I triangoli MLP, CPK daranno ML$=y' sen\varphi$, LP$=$OK$=y' cos\varphi$, PK$=$OL$=x' sen\omega$, CK$=x' cos\omega$, e quindi OL+ML$=$MO$=y=x' sen\omega+y' sen\varphi$, e CK$-OK=CO=x=x' cos\omega-y' cos\varphi$. Sostituiti questi valori nell' equazione $b^2 x^2+a^2 y^2=a^2 b^2$ che immediatamente deriva da quella della curva, e osservando che $tang\varphi tang\omega=\frac{b^2}{a^2}$ (970.5°) dà $b^2 cos\omega cos\varphi=a^2 sen\omega sen\varphi$, avremo $y'^2(a^2 sen^2\varphi+b^2 cos^2\varphi)+x'^2(a^2 sen^2\omega+b^2 cos^2\omega)=a^2 b^2$.

Si ponga frattanto $y'=0$; sarà in tal caso (898) $x'=$CN$=m$, ed avremo I^a. $m^2(a^2 sen^2\omega+b^2 cos^2\omega)=a^2 b^2$. Si ponga $x'=0$, sarà y'(*ivi*)$=$CD$=n$, ed avremo nel modo stesso II^a. $n^2(a^2 sen^2\varphi+b^2 cos^2\varphi)=a^2 b^2$. Dunque $a^2\times sen^2\omega+b^2 cos^2\omega=\frac{a^2 b^2}{m^2}$, ed $a^2 sen^2\varphi+b^2 cos^2\varphi=\frac{a^2 b^2}{n^2}$, con che l'equazione ottenuta diverrà $m^2 y'^2+n^2 x'^2=m^2 n^2$, ossia $y'^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x'^2)$ in tutto simile a quella degli assi. Da questa intanto si apprende 1°. che i quadrati delle ordinate stanno tra loro come i rettangoli delle ascisse; 2.° che ogni diametro NCn divide in mezzo l' ordinate MPm, e perciò l' ellisse intera; 3°. che ogni diametro Nn è diviso in mezzo nel centro C, perchè ne' punti N,n si ha $y'=0$, ed $x'^2=m^2$, onde $x'=\pm m$; 4°. che condotta all' opposta estremità n del diametro Nn la tangente nT', e da n l' ordinata nq, sarà nq=NQ, e quindi CT'$=$ (968)$\frac{a^2}{Cq}=\frac{a^2}{CQ}=$CT;

saranno dunque eguali i triangoli TNC, T'nC, e perciò parallele fra loro le due tangenti TE, GT'; laonde le quattro tangenti condotte alle doppie estremità di due diametri qualunque formano un parallelogrammo. F.165

974. Poichè $b^2 = a^2 \tang\varphi \tang\omega$, se questo valore si ponga nel primo membro della I^a. (973), avremo $m^2(\sen^2\omega + \tang\varphi \sen\omega\cos\omega) = b^2 = m^2 \frac{\sen\omega}{\cos\varphi}(\sen\omega \times \cos\varphi + \sen\varphi\cos\omega) = \frac{m^2 \sen\omega \sen(\varphi+\omega)}{\cos\varphi}$, e quindi III^a. $m^2 \sen(\omega+\varphi) = \frac{b^2\cos\varphi}{\sen\omega}$. Operando nel modo stesso sulla II^a., otterremo IV^a. $n^2 \sen(\omega+\varphi) = \frac{b^2 \cos\omega}{\sen\varphi}$, e la III^a. divisa per la IV^a. daranno V^a. $\frac{m^2}{n^2} = \frac{\sen\varphi\cos\varphi}{\sen\omega\cos\omega} = \frac{\sen 2\varphi}{\sen 2\omega}$; onde 1^o. $m^2 \sen\omega \times \cos\omega = n^2 \sen\varphi\cos\varphi$, e poichè condotte le NQ, DI normali all' asse, si ha NQ$=m \sen\omega$, CQ$=m \cos\omega$, DI$=n \sen\varphi$, CI$=n\cos\varphi$, si avrà DI$\times$CI$=$NQ$\times$CQ, cioè i due triangoli DIC, NQC saranno eguali in superficie; 2^o. se $\varphi=\omega$ sarà $m=n$, cioè i diametri saranno eguali, proprietà che dunque esclusivamente appartiene a quei due diametri il cui angolo è diviso in mezzo dall' asse. Si noti che $\varphi=\omega$ dando $b^2 = a^2 \tang^2\omega$, e perciò $= \tang\omega = \frac{b}{a} = \tang$ BaC, sarà dunque in tal caso $\omega =$ BaC, e quindi NCT$=$BaC, cioè il diametro Nn sarà parallelo alla corda aB, e per la stessa ragione l' altro Dd sarà parallelo alla corda ab. Si noti inoltre che nell' ipotesi di $m=n$, l' equazione ai diametri, omessi gli apici, si riduce ad $y^2 = m^2 - x^2$, che si scambierebbe con quella del circolo, se le coordinate non fossero nel caso nostro obliquangole.

3^o. Se la III^a. e IV^a. si moltiplichino insieme, avremo $m^2 n^2 = \frac{b^4 \cos\varphi\cos\omega}{\sen\varphi\sen\omega\sen^2(\varphi+\omega)}$; ma si ha $\cos\varphi\cos\omega = (973) \frac{a^2 \sen\varphi\sen\omega}{b^2}$, dunque VI^a. $m^2 n^2 = \frac{a^2 b^2}{\sen^2(\varphi+\omega)}$, ossia $mn \sen(\varphi+\omega) = ab$, e $4mn \times \sen(\varphi+\omega) = 4ab = 2a \times 2b$. Ora $2a \times 2b$ è il rettangolo degli assi, $4mn \sen(\varphi+\omega)$ è l'intero parallelogrammo EG; perciò *tutti i parallelogrammi circoscritti all' ellisse e formati su due diametri coniugati qualunque, sono eguali in superficie al rettangolo degli assi e quindi tra loro.*

4^o. Se la III^a. si moltiplichi per $\sen^2\omega$, e la IV^a. per $\sen^2\varphi$, e quindi si sommino i due prodotti, avremo $(m^2 \sen^2\omega + n^2 \sen^2\varphi) \sen(\varphi+\omega) = b^2(\sen\omega\cos\varphi + \sen\varphi\cos\omega) = b^2 \sen(\varphi+\omega)$, d' onde VII^a. $m^2 \sen^2\omega + n^2 \sen^2\varphi = b^2$, valore che introdotto nella somma immediata della I^a. e II^a., darà VIII^a. $m^2 \cos^2\omega + \ldots n^2 \cos^2\varphi = a^2$. Quindi sommando la VII^a. e VIII^a. avremo IX^a. $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$, cioè *nell' ellisse la somma dei quadrati dei diametri coniugati è costante, ed eguaglia la somma dei quadrati degli assi.*

5^o. Finalmente se dalla I^a., posto $1 - \sen^2\omega$ in luogo di $\cos^2\omega$, si cavi il valore di $\sen^2\omega$, e dalla II^a. posto $1 - \cos^2\varphi$ in luogo di $\sen^2\varphi$ si tragga il

valore di $\cos^2\varphi$, troveremo $sen^2\omega = \frac{b^2(a^2-m^2)}{m^2(a^2-b^2)}$, $\cos^2\varphi = \frac{a^2(n^2-b^2)}{n^2(a^2-b^2)}$, ossia $\cos^2\varphi = \frac{a^2(a^2-m^2)}{n^2(a^2-b^2)}$, giacchè da $m^2+n^2=a^2+b^2$ si ha $n^2-b^2=a^2-m^2$. Divise l' una per l'altra queste due formule troveremo X^2. $amsen\omega = bncos\varphi$.

F.165 Ma supposte NQ, DI normali all' asse maggiore, e DR(=IC) normale all' asse minore, abbiamo $msen\omega$=NQ, $ncos\varphi$=CI=DR, dunque condotte le corde AN,DB, i due triangoli CNA, CDB, come pure i parallelogrammi CS, CV saranno eguali in superficie; quindi *nell' ellisse le superficie dei parallelogrammi, che un semidiametro qualunque fa col semiasse maggiore, e il suo coniugato col semiasse minore, sono tra loro eguali in superficie*.

975. La perfetta analogia fra l' equazioni agli assi e ai diametri dà luogo per

166 questi a molte proprietà, che abbiamo già veduto spettare a quelli. Sia TR una secante qualunque, che tagli la curva nei punti Q, R e incontri in T il diametro prolungato dD. Condotte su questo le ordinate QS, RH, e chiamato m il semidiametro CD, x', $\pm x''$ le ascisse CS, CH (preso per la seconda il segno inferiore quando C cada fra S ed H), e fatta CT$=r$, i triangoli simili TQS, TRH daranno $TS^2(r-x')^2 : TH^2(r\mp x'')^2 :: SQ^2 : RH^2 :: m^2-x'^2 : m^2-x''^2$ (973); d' onde operando al solito e riducendo, si avrà $(r^2+m^2)(x'\pm x'')\mp 2rx'x''=2rm^2$. Si supponga adesso che la secante TR si converta nella tangente TM, nel qual caso le due ascisse CH, CS si riuniscono nell' unica CP; fatta CP$=x$ l' equazione darà $(r^2+m^2)x-rx^2=rm^2$, dalla quale risoluta si ha $r=\frac{x^2+m^2}{2x}\pm\frac{x^2-m^2}{2x}$; onde escluso il segno superiore da cui si avrebbe $r=x$ assurdo, avremo dall' inferiore $r=CT=\frac{m^2}{x}$, cioè CT terza proporzionale dopo l' ascissa x e il semidiametro m. Si ha pure la suttangente $PT=CT-x=\frac{m^2-x^2}{x}$, e la tangente al vertice $DN=\frac{DT\times PM}{PT}=n\sqrt{\frac{m-x}{m+x}}$, il tutto precisamente come per l' asse (968).

976. L' equazione $CT=\frac{m^2}{x}$ dà una seconda maniera di condurre dal punto esterno e qualunque T, le due tangenti alla curva; a ciò bastando far discender da T un diametro Dd, e prender l' ascissa CP$=x$ terza proporzionale dopo CT e CD; quindi condotta per P la doppia ordinata MM', saranno TM, TM' le due tangenti, avendo in tal caso sì l' una che l' altra la suttangente che lor si compete. Da questa costruzione intanto s' inferirà, come nella parabola (960), che *due tangenti, le quali partono dall' estremità di una corda, vanno a riunirsi nel diametro che la divide per mezzo*, o al quale è ordinata la corda. Ma passiamo ad un altro più importante teorema.

977. Sia la corda MO tagliata comunque nelle due parti MH, HO dal diametro qualunque FE. Condotto sulla metà N della corda il diametro AB, e parallelamente alla stessa il di lui coniugato KL (972), e condotte di più le MR, EG, HI parallele fra loro e ad AB, si faccia $EC=r$, $KC=s$, $HC=x$, $CR=z=MN=ON$, $CI=u=HN$, $GC=\omega$. I triangoli CGE, CIH daranno $GC^2(\omega^2):CI^2(u^2)::EG^2:HI^2(=MR^2)::s^2-\omega^2:s^2-z^2$ (973.1°). Di quì $s^2:s^2-z^2+u^2::\omega^2:u^2$. E poichè gli stessi triangoli danno $GC(\omega):CI(u)::EC(r):CH(x)$, dunque $s^2:s^2-z^2+u^2::r^2:x^2$, ed $s^2:z^2-u^2::r^2:r^2-x^2$. Quindi $z^2-u^2=(z+u)\times(z-u)=(ON+HN)(ON-HN)=HO\times HM=\frac{s^2}{r^2}(r^2-x^2)$. Quest'equazione è analoga a quelle avute per le coordinate agli assi e ai diametri, e fa veder che *comunque e sotto qualunque angolo si taglino un diametro ed una corda, il rettangolo delle ascisse del diametro sta a quello delle due porzioni di corda, come il quadrato dello stesso diametro al quadrato del diametro parallelo alla corda;* teorema che include ambedue quelli contenuti nelle predette equazioni agli assi e ai diametri, e che può riguardarsi come più generale. Una simile osservazione ebbe luogo anche rapporto all'equazione della parabola (961).

F. 167

978. Terminiamo con la soluzione dei seguenti problemi.

I. Dati i due semiassi a, b trovar due diametri coniugati che facciano fra loro un angolo dato $p=DCn$. Sarà $p=(\varphi+\omega)$ (973) e poichè abbiamo $m^2+n^2=a^2+b^2$, ed $mn=\frac{ab}{sen(\varphi+\omega)}$ (974.3°); dunque $m^2+n^2\pm2mn=a^2+b^2\pm\frac{2ab}{senp}$; ed $m\pm n=\sqrt{(a^2+b^2\pm\frac{2ab}{senp})}$, d'onde sommando e sottraendo si ha m ed n. Per determinar la direzione di un de' diametri o l'angolo $NCT=\omega$, poichè si ha $m^2 sen(\omega+\varphi)=\frac{b^2\cos\varphi}{sen\omega}$ (974), e come sopra $\varphi+\omega=p$, sarà $m^2 senp=\frac{b^2\cos(p-\omega)}{sen\omega}=b^2\cot\omega\cos p+b^2 senp$ (788.39°); d'onde $\cot\omega=\frac{m^2-b^2}{b^2}\tan gp$.

165

II. Dati i semidiametri coniugati m, n e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Dall'equazioni $mnsenp=ab$ ed $a^2+b^2=m^2+n^2$ con un calcolo simile al precedente si determina a e b. L'angolo che dà la direzione degli assi si trova come sopra.

979. III. Data un'ellisse trovarne il centro, gli assi ed i fuochi. Condotte comunque e divise in mezzo le due corde parallele CD, EF, si faccia passare per i punti di divisione G, H la corda AB. Sarà AB un diametro (973.2°), sulla cui metà avremo il centro cercato. Con questo centro e con OB per raggio si descriva il circolo KALB, e si uniscano i quattro punti d'intersezione delle due curve. Le normali PQ, MN condotte da O sopra due delle corde adiacenti KB, KA protratte dall'una e dall'altra parte fino al perimetro dell'ellisse, saranno gli assi. Infatti si tagliano normalmente nel centro, e sono respettivamente perpendicolari sulla me-

168

F.168 tà delle parallele KB ed AL, KA e BL, proprietà esclusive degli assi. Trovati questi, i fuochi si avranno nella maniera già data (946).

Iperbola

980. Dall' equazione all' iperbola $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax + x^2)$ (938) 155 si ha 1°. $y^2 : x(2a+x) :: b^2 : a^2$, cioè $PM^2 : AP \times Pa :: CB^2 : CA^2$, *onde il quadrato dell' ordinata è al rettangolo dell' ascisse* (prese l' una da P al vertice A, l' altra da P al vertice a) *come il quadrato del second' asse a quello del primo*. Per due nuove coordinate y', x' avremo $y'^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax' + x'^2)$; dunque 2°. $y^2 : y'^2 :: x(2a+x) : x'(2a+x')$, cioè *i quadrati delle ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse corrispondenti*; due proprietà che rilevammo ancora nell' ellisse (963), con la qual curva vedremo averne l' iperbola comuni molte altre, come è chiaro dover succedere in forza della somma somiglianza tra le due equazioni. Se si ponga $x - a$ in luogo di $x = AP$, l' equazione diventa $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$, e l' ascisse son prese dal centro: e poichè questa non cangia permutandovi x in $-x$, perciò appartiene insieme alle due iperbole opposte (938); quindi quanto saremo per dire dipendentemente da quest' equazione, s' intenderà detto tanto dell' un' iperbola che dell' altra. Intanto da $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ abbiamo $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 + y^2)$, equazione al second' asse, le cui ascisse e ordinate sono ordinate ed ascisse all' asse primo, e tutte esteriori alla curva. In queste equazioni fatto $a = b$, viene $y^2 = 2ax + x^2$, $y^2 = x^2 - a^2$, $x^2 = a^2 + y^2$, e allora l' iperbola dicesi *equilatera*.

981. Prese dunque l' ascisse dal centro, e supposto M un punto nel ramo superiore o positivo della sezione destra o positiva, si avrà il raggio vettore $FM = z = \sqrt{(PM^2 + PF^2)} = \sqrt{(y^2 + (x-e)^2)} = \sqrt{(\frac{e^2x^2}{a^2} - 2ex + a^2)} = \frac{ex}{a} - a$, non dovendosi qui attendere all' altra radice $a - \frac{ex}{a}$, che contro l' ipotesi darebbe FM

negativo, atteso che abbiamo non solo x, ma ancora e maggiore di a (946); e perciò $ex>a^2$, $\frac{cx}{a}>a$, e quindi $a-\frac{ex}{a}$ quantità negativa. Nel modo stesso si troverà $fM=z'=\frac{ex}{a}+a$. Onde $fM-MF=2a$, cioè *la differenza de' due raggi vettori eguaglia l' asse trasverso.* F.155

982. Se sia l' angolo AFM$=6$, verrà, come nell' ellisse (966), FM$=z=$.... $\frac{e^2-a^2}{a+e\cos 6}=\frac{\frac{1}{2}ap}{a+e\cos 6}$, equazione polare all' iperbola.

983. Per condur la tangente MT a un punto M dell'iperbola, si proverà, presso a poco come nell' ellisse, che diviso in mezzo con MT l'angolo fMF formato dai raggi vettori, sarà MT la tangente cercata. Infatti presa sopra fM una porzione MD$=$MF, e da un punto qualunque m di MT condotte mf, mF, mD, avremo $mf<f\text{D}+\text{D}m$ (493), ossia $mf<2a+m\text{F}$. giacchè $f\text{D}=f\text{M}-\text{MF}=2a$ (981) e Dm=mF (525. 2°). Dunque altresì $mf-m\text{F}<2a$; onde non essendo questa differenza eguale a $2a$, il punto qualunque m di MT non caderà sulla curva, che perciò sarà toccata soltanto in M da MT: onde MT è tangente. 169

984. Se la tangente debba condursi da un punto m dato fuori della curva, sarà facile dimostrare, come nell' ellisse (969), che fatti intersecare in D due archi descritti l' uno col centro in m e raggio $m\text{D}=\text{F}m$, l' altro col centro in f e raggio $f\text{D}=2a$, e prolungata fD fino all' incontro in M colla curva, sarà M il punto di contatto e la retta TmM la tangente. E qui pure si osserverà, come nell'ellisse (969), che la costruzione prescritta porta a trovar due punti di contatto, e perciò dà le due tangenti che da m posson condursi alla curva. Ed è poi inutile avvertire come in egual modo potremo condur le due tangenti anche sull' iperbola opposta.

985. Il triangolo fMF dà (583) $f\text{M}:\text{MF}::f\text{T}:\text{TF}$, ovvero $f\text{M}+\text{FM}\ (=\frac{2ex}{a}):f\text{M}(=\frac{ex+a^2}{a})::f\text{T}+\text{FT}(2e):f\text{T}=\frac{a^2+ex}{x}=\frac{a^2}{x}+e$. Dunque $f\text{T}-e=\text{CT}=\frac{a^2}{x}$, d' onde pur si trova un altro modo di determinare il punto T della tangente in M; e di più si conclude, che essendo CT positiva finchè lo è x, *tutte le tangenti a quella delle due opposte sezioni ove le* x *son positive, taglian l' asse fra il vertice della medesi-*

ma e il centro; come per la contraria ragione quelle dell' altra sezione lo tagliano nella parte rimanente. Perciò *niuna retta tangente ad un punto qualunque di un ramo può esserlo a verun punto degli altri.*

F.169 986. Quindi se MN sia la normale, si avrà la *suttangente* $PT = CP - CT = x - \frac{a^2}{x} = \frac{x^2 - a^2}{x} = \frac{a^2 y^2}{b^2 x}$; la *tangente* $MT = \sqrt{(TP^2 + PM^2)} = \frac{1}{ax}\sqrt{(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)}$; la *sunnormale* $PN = \frac{PM^2}{PT} = \frac{b^2 x}{a^2}$; la *normale* $n = \sqrt{(PM^2 + PN^2)} = \frac{b}{a^2}\sqrt{(e^2x^2 - a^4)} = \frac{b}{a}\sqrt{(z^2 + 2az)}$; $TN = PN + PT = \frac{e^2x^2 - a^4}{} = \frac{z(2a+z)}{x} = \frac{a^2 n^2}{b^2 x}$; $AT = \frac{ax - a^2}{x}$; $aT = \frac{ax + a^2}{x}$.

987. Se, come nell' ellisse (970), si conducano le perpendicolari NB, NB' ai raggi vettori, ed FS, fs alla tangente, a cui sia parallela la CD condotta dal centro C, si troverà $FM(\frac{ex}{a} - a) : FP(x - e) :: FN(x - e + \frac{b^2 x}{a^2}) : FB = \frac{ex - e^2}{a}$. Dunque 1°. $MB = FM - FB = \frac{ex}{a} - a - \frac{ex - e^2}{a} = \frac{e^2 - a^2}{a} = \frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}p$ (944); e perchè l' angolo $QMB' = fMT = TMF$ rende eguali gli angoli B'MN, BMN, ed eguali e simili i triangoli NMB', NMB, sarà dunque $MB' = MB = \frac{1}{2}p$. 2°. I triangoli TFS, Tfs simili ad MPT danno TM : MP :: FT : FS, TM : MP :: fT : Fs, e perciò $TM^2 (\frac{1}{a^2x^2}(x^2 - a^2)(e^2x^2 - a^4)) : PM^2 (\frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)) :: FT \times Tf (\frac{e^2x^2 - a^4}{x^2}) : FS \times fs = b^2$. 3°. I triangoli rettangoli SFM, MB'N simili, per esser l' angolo SMF = QMB' = MNB' (504. 3°), danno immediatamente FS (q) : FM (z) :: MB' $(\frac{p}{2})$: $MN = n = \frac{pz}{2q}$, come nella parabola e nell' ellisse (953.970), e di qui $q = \frac{b^2 z}{an}$. 4°. Le parallele TM, CD danno fT : CT :: fM : DM, cioè $\frac{ex + a^2}{x} : \frac{a^2}{x} :: \frac{ex + a^2}{a} : DM = a$. 5°. Condotta da C la normale CO sulla tangente QT, si avrà CO : NM (n) :: CT $(\frac{a^2}{x})$: TN $(\frac{a^2 n^2}{b^2 x})$, d' onde $CO \times NM = b^2$. 6°. Infine condotta CM, e chiamati ω, φ gli angoli MCP, MTP dei triangoli rettangoli MCP, MTP, operando come nell' ellisse (970. 5°), otterremo $b^2 \cos\omega \cos\varphi = a^2 \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\varphi$, ossia $b^2 = a^2 \operatorname{tang}\omega \operatorname{tang}\varphi$.

988. Sia adesso alzata sul vertice A la normale Dd divisa in mezzo in A, ed eguale all' asse conitugato $2b$. Se dal centro C si conducano per i punti D,d le rette indefinite CR; Cr, e da un punto qualunque N di CR si conduca Nn parallela a Dd, avremo (579) CA : DA :: CP : NP, ovvero $a : b :: x : \mathrm{NP} = \frac{bx}{a}$. Dunque 1°. $\mathrm{NM} = \mathrm{NP} - \mathrm{PM} = \frac{bx}{a} - y$, ed $\mathrm{M}n = \mathrm{MP} + \mathrm{P}n = \frac{bx}{a} + y$; onde $\mathrm{NM} \times \mathrm{M}n = \frac{b^2 x^2}{a^2} - y^2 = (980)\, b^2 = \mathrm{DA}^2$. 2°. Poichè $\mathrm{NP} = \frac{bx}{a}$, ed $\mathrm{MP} = y = \frac{b}{a}\sqrt{(x^2 - a^2)} = (429)\, \frac{b}{a}\left(x - \frac{a^2}{2x} - \frac{a^4}{8x^3} - \frac{a^6}{16x^5} - \text{ec.}\right) = \frac{bx}{a} - \frac{ba^2}{2x}\left(1 + \frac{a^2}{4x^2} + \frac{a^4}{8x^4} + \text{ec.}\right)$; sarà sempre $\mathrm{PN} > \mathrm{MP}$, cioè la curva non incontrerà mai le rette indefinite CR, Cr; peraltro sempre più vi si avvicinerà, mentre crescendo l' ascissa x, scema sempre la differenza $\frac{ba^2}{2x}\left(1 + \frac{a^2}{4x^2} + \text{ec.}\right)$ fra NP ed MP. Questa singolarità rimarchevole ha fatto dare il nome di *asintoti* alle rette CR, Cr, come quelle verso cui la curva continuamente si avanza, senza raggiungerle, nè toccarle giammai. L' iperbola riferita agli asintoti ha molte proprietà, ed eccone alcune fra le principali.

F. 470

989. Condotte MQ, AL parallele all' asintoto Cd, i triangoli DLA, CLA sono isosceli (590); onde fatta $\mathrm{AL} = \mathrm{DL} = \mathrm{CL} = m$, $\mathrm{CQ} = x$, $\mathrm{QM} = y$, e condotta MK parallela e perciò eguale a CQ, i triangoli simili DLA, NQM, MKn danno MN : DA :: QM : LA, ed Mn : DA :: MK : DL, e però $\mathrm{NM} \times \mathrm{M}n : \mathrm{DA}^2 :: \mathrm{QM} \times \mathrm{MK} : \mathrm{LA} \times \mathrm{DL} = \mathrm{AL}^2$; ma $\mathrm{NM} \times \mathrm{M}n = \mathrm{DA}^2$ (988); dunque $xy = m^2$, *equazione all' iperbola tra gli asintoti*, in cui $m^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$ si chiama la *potenza dell' iperbola*.

990. Se due parallele Ff, Gg, terminate agli asintoti taglino un' iperbola nei punti m, h, p, K, e sieno MmN, PpQ perpendicolari all' asse, si avrà Fm : Mm :: Gp : Pp, ed mf : mN :: pg : pQ, e però $\mathrm{F}m \times mf : \mathrm{M}m \times m\mathrm{N} :: \mathrm{G}p \times pg : \mathrm{P}p \times p\mathrm{Q}$; ma (988) $\mathrm{P}p \times p\mathrm{Q} = b^2 = \mathrm{M}m \times m\mathrm{N}$; dunque $\mathrm{F}m \times mf = \mathrm{G}p \times pg$; dunque anche $g\mathrm{K} \times \mathrm{KG} = fh \times h\mathrm{F}$.

471

991. Se i punti p, K coincidano in un sol punto D, la retta TDt sarà tangente in D, e si avrà $\mathrm{F}m \times mf = \mathrm{TD} \times \mathrm{D}t = fh \times h\mathrm{F}$; onde $fh(hm + m\mathrm{F}) = \mathrm{F}m(mh + hf)$, e però $fh = \mathrm{F}m$ e $\mathrm{TD} = \mathrm{D}t$; ma condotta DE parallela a Ct, i triangoli simi-

F. 171 li TDE, TtC danno $TE=EC$; dunque la tangente a un punto D dell' iperbola si ha pure conducendo DE parallela all' asintoto, prendendo $ET=EC$, e per T, D conducendo la retta TDt.

992. Dall' esser sempre $fh=Fm$ si ha la maniera di descrivere un' iperbola tra due dati asintoti CT, Ct, che passi per un dato punto m, poichè condotte per m le rette Ff, MN, si farà $fh=Fm$, $nN=Mm$, e i punti m, n, h saranno nell'iperbola.

170 993. Del resto gli asintoti d' una sezione prolungati al di là del centro divengono asintoti dell' opposta. Infatti alzata sul vertice a la normale $D'd'$, i triangoli eguali e simili DCd, $D'Cd'$ danno $D'd'=Dd=2b$, cioè i nuovi prolungamenti sono situati rapporto alla seconda iperbola come gli asintoti rapporto alla prima (988); onde debbon godere delle medesime proprietà.

172 994. Poichè tutte le tangenti all' iperbola mAm' taglian l' asse fra A, C (985), e tagliandolo in C divengono asintoti, ogni altra retta QCQ' contenuta fra l' angolo TCt degli asintoti e che passi per C sarà secante, e taglierà in due punti opposti M, M' le due sezioni. Or la parte MM' di questa secante compresa fra le due curve si chiama *diametro trasverso* o *primo*, il cui *coniugato* o *secondo* è la DCd parallela ed eguale alla Tt tangente in M, e divisa in mezzo in C, come Tt lo è in M (991); l' ordinate sono mQm' parallele al coniugato DCd, e il parametro è una terza proporzionale al diametro e al suo coniugato.

995. Passiamo a trovar l'equazione fra le coordinate ai diametri. Poichè $NQ : Qn :: TM : Mt$, ed $Nm=m'n$; se dunque $CM=m$, $CD=MT=n$, $CQ=x'$, $Qm=y'$, sarà $m : n :: x' : NQ=\frac{nx'}{m}=nQ$; onde $Nm=\frac{nx'}{m}-y'$, ed $mn=\frac{nx'}{m}+y'$: ma ...... $TM^2=Nm\times mn$ (994); dunque $n^2=\frac{n^2x'^2}{m^2}-y'^2$, ed $y'^2=\frac{n^2}{m^2}(x'^2-m^2)$, equazione simile a quella delle coordinate all'asse trasverso, e che dà $x'^2=\frac{m^2}{n^2}(y'^2+n^2)$ per equazione al diametro coniugato; e da queste si apprende 1°. che i quadrati di due ordinate a qualunque dei due diametri, stanno come i rettangoli delle loro ascisse corrispondenti; 2°. che ogni diametro divide in mezzo tutte le sue ordinate, ed è diviso in mezzo nel centro C, poichè $y'=0$ dà $x'^2=m^2$, e quindi $x'=\pm m$. Perciò il diametro di una sezione è diametro anche dell' opposta, e in questa come nell'altra, le ordinate son parallele alla $T't'$ tangente in M', la quale perciò sarà parallela ed eguale al diametro coniugato Dd, e all'altra tangente Tt. E con un raziocinio e calcolo analogo a quello già adoprato nell' ellisse (976.975), si potrà pur dimostrare, che come rapporto all' asse così pure rapporto a qualunque diametro, condotta sul prolungamento di questo da qualsivoglia punto della curva una tangente, la parte del diametro intercetta fra il centro e la tangente è terza proporzionale dopo l' ascissa corrispondente al punto di contatto e il semidiametro; che chiamata x' quest'ascissa si ha per valore della suttangente $\frac{x'^2-m^2}{x'}$; che le due tangenti condotte all'estre-

mità di una corda s' incontrano nel diametro che la divide in mezzo, ec. Può infine anche osservarsi che ogni diametro coniugato di un' iperbola, è diametro trasverso di un' altra totalmente separata dalla prima.

F 173

996. Se come nell' ellisse (973) da M sommità di $PM=y'$ ordinata al diametro CN si conduce MO ordinata all' asse trasverso, e da P le PK, PL normali a CO,MO, e si chiamino come facemmo (987.6°) ω, φ gli angoli NCT, NTO, ben si vede che le rette ML, PL, PK, CK avranno gli stessi valori che le loro identiche nell' ellisse, e sarà perciò $MO=ML+PK=y=x'sen\omega+y'sen\varphi$, e $CO=CK+PL=x=x'cos\omega+y'cos\varphi$, i quali valori se si sostituiscano nell' equazione agli assi, e ci rammentiamo che qui pure si ha (987.6°) $b^2cos\omega cos\varphi=a^2sen\omega sen\varphi$, ci daranno la nuova equazione ai diametri $(a^2sen^2\varphi-b^2cos^2\varphi)y'^2+(a^2sen^2\omega-b^2cos^2\omega)x'^2=\ldots\ldots -a^2b^2$. Paragonandola con la trovata $y'^2=\frac{n^2x'^2}{m^2}-n^2$, avremo

$$\text{I}^a.\ -m^2=\frac{-a^2b^2}{a^2sen^2\omega-b^2cos^2\omega}\ ;\ \text{II}^a.\ n^2=\frac{-a^2b^2}{a^2sen^2\varphi-b^2cos^2\varphi}$$

dal confronto delle quali con le loro corrispondenti I^a. e II^a. nell' ellisse (973), risulta che il b^2 è qui cangiato in $-b^2$, e l' n^2 in $-n^2$. Introdotti dunque questi cambiamenti in tutte le formule che per l' ellisse si dedussero dalla I^a. e II^a., e osservando di più che l'angolo CTN, chiamato allora φ, è qui $180^0-\varphi$, potremo, senza inutilmente ripetere i calcoli, stabilire per l' iperbola dietro alle due prime, le seguenti equazioni: III^a. $m^2sen(\varphi-\omega)=\frac{b^2cos\varphi}{sen\omega}$; IV^a. $n^2sen(\varphi-\omega)=\frac{b^2cos\omega}{sen\varphi}$; V^a. $\frac{m^2}{n^2}=\frac{sen\varphi cos\varphi}{sen\omega cos\omega}$; VI^a. $m^2n^2sen^2(\varphi-\omega)=a^2b^2$, ossia $mnsen(\varphi-\omega)=ab$, e $4mnsen(\varphi-\omega)=2a\times 2b$; VII^a. $m^2sen^2\omega-n^2sen^2\varphi=-b^2$; VIII^a. $m^2cos^2\omega-n^2\times cos^2\varphi=a^2$; IX^a. $m^2-n^2=a^2-b^2$; X^a. $sen^2\omega=\frac{b^2(m^2-a^2)}{m^2(a^2+b^2)}$; XI^a. $cos^2\varphi=\frac{a^2(m^2-a^2)}{n^2(a^2+b^2)}$, le quali due ultime divise l' una per l' altra daranno XII^a. $amsen\omega=-bncos\varphi$.

997. Frattanto dalla V^a. avremo che se dalle estremità N, D dei due diametri coniugati CN, CD si conducan sull' asse le normali NQ, DI, i triangoli CNQ, CDI saranno eguali in superficie. Infatti atteso l'essere $CQ=mcos\omega$, $NQ=msen\omega$, e quindi $CNQ=\frac{1}{2}CQ\times NQ=\frac{1}{2}m^2sen\omega cos\omega$; come del pari per esser l'angolo $DCI=NTO=\varphi$, e perciò $CI=ncos\varphi$, $DI=nsen\varphi$, e (631) $DCI=\frac{1}{2}CI\times DC=\frac{1}{2}n^2sen\varphi cos\varphi$; e quindi in virtù dell'equazione V^a. DCI=CNQ. La stessa equazione c' insegna che non potendo mai essere $\omega=\varphi$, neppur potrà aversi $m=n$, cioè nell' iperbola non hanno luogo come nell' ellisse diametri eguali.

998. Dalla VI^a. si apprende che *tutti i parallelogrammi circoscritti tra le due iperbole, e formati su due diametri coniugati, sono eguali in superficie al rettangolo degli assi e tra loro*. Infatti condotta la normale *tr* sarà il parallelo-

F. 173 grammo $Ct=CN\times tr=m\times tN\times sen\,tNR=mn\,sen(\varphi-\omega)$; e l'intero parallelogrammo $tt'=4Ct=4mn\times sen(\varphi-\omega)=2a\times 2b$. Infine la IX^a. ci mostrerà immediatamente che *nell'iperbola la differenza tra i quadrati di due diametri coniugati qualunque eguaglia la differenza dei quadrati degli assi*; onde nell'iperbola equilatera qualunque diametro eguaglia il suo coniugato.

174 999. Sia in ultimo come nell'ellisse (977), e nella parabola (961) la corda qualunque MO incontrata o tagliata comunque in H dal prolungamento di qualsivoglia diametro FE. Condotto sulla metà N della corda il diametro AB, e parallelamente alla medesima l'ordinata EG e il diametro coniugato KL, si faccia $CE=r$, $KC=s$, $HC=x$, $MN=ON=z$, $HN=u$, $EG=\omega$. Avremo EG^2 $(\omega^2):HN^2$ $(u^2)::CG^2:CN^2::s^2+\omega^2:s^2+z^2$ (995), e quindi $s^2:s^2+z^2-u^2::\omega^2:u^2::EG^2:HN^2::CE^2$ $(r^2):CH^2(x^2)$. Dunque $s^2:z^2-u^2::r^2:x^2-r^2$, d'onde $z^2-u^2=(z+u)(z-u)=HO\times MH=\frac{s^2}{r^2}(x^2-r^2)$, equazione analoga a quella ottenuta per gli assi e per i diametri, ma più generale, e dalla quale può dedursi un teorema simile a quello già concluso nel caso medesimo per l'ellisse (977).

1000. Ecco alcuni problemi la cui soluzione dipende dagli esposti principj.

I. Dati gli assi a,b d'un' iperbola, trovar due diametri coniugati che faccian
173 tra loro il dato angolo $p=DCN$. Abbiamo $p=\varphi-\omega$, $mn\,sen(\varphi-\omega)=ab$, ed $m^2-n^2=a^2-b^2$, che danno m ed n; e per trovar la direzione di un de' diametri o l'angolo $NCT=\omega$, potrà farsi uso della formula (996.X^a.) $sen^2\omega=\frac{b^2(m^2-a^2)}{m^2(a^2+b^2)}$.

II. Dati i semidiametri coniugati m, n d'un' iperbola e l'angolo p che fanno tra loro, trovare i due assi e la lor direzione. Ciò potrebbe aversi con le due equazioni del passato problema; è però più semplice l'usare gli asintoti. Per l'estremità N del primo diametro CN condotta TNt parallela al secondo diametro Dd, e che farà con NP l'angolo $tNP=p$, e presa $Nt=TN'=DC$, si condurranno CT', Ct: quindi diviso l'angolo T'Ct in mezzo con CA, sarà CA l'asse primo, ed alzata in A la normale BA, e in C la CF=BA, sarà CF l'asse secondo (987).

175 III. Trovar gli assi, il centro e i fuochi di un'iperbola data. Condotte comunque due corde parallele pk, mh si faccia passare per le metà O, I delle medesime la retta ID prolungata fino all'iperbola opposta, se questa pure sia data. La parte Dd di questa retta intercetta fra le due iperbole sarà un diametro, e sulla metà C di essa sarà il centro cercato (995.2°). Che se l'iperbola opposta manchi, si conducano due altre corde parallele fra loro, ed oblique alle due prime, ed il centro sarà in questo caso nell' intersezione delle due rette, che dividono respettivamente in mezzo l'una e l'altra coppia di parallele. Con questo centro, e con un raggio qualunque descrivasi un circolo in modo che tagli la curva in due punti; e sulla retta che riunisce i medesimi si conduca dal centro una normale: la parte di questa, intercetta fra il centro e la curva, sarà, come è evidente, il semiasse trasverso.

Quanto al coniugato potrà aversi conducendo all' asse un' ordinata qualunque MP, cercando una media proporzionale fra le due ascisse AP, aP, e quindi una quarta dopo la media suddetta, l' ordinata MP, e il semiasse trasverso CA. Tutto questo è evidente per l' equazione alla curva. Quanto ai fuochi si troveranno col metodo già dichiarato (946). F.175

1001. La rettificazione, la quadratura ed altre proprietà di queste e delle seguenti curve, si troveranno nel Calcolo Integrale. Qui frattanto porremo al solito alcuni problemi e teoremi da sciogliersi o dimostrarsi per esercizio e studio dei principianti, e che serviranno nel tempo stesso a far rilevare altre notabili proprietà spettanti a ciascuna delle sezioni coniche.

I. Nella parabola, come pure nelle altre sezioni coniche, la tangente al vertice è anche normale all'asse.

Ris. Dalle espressioni del raggio vettore in ciascuna curva si dedurrà in primo luogo, che il vertice è fra tutti i punti di ciascuna sezione il più vicino al prossimo fuoco. Di quì, dalla natura della tangente (537), e dalla nota proprietà della normale (519) si concluderà la verità del teorema.

II. Suppongasi che la corda NM nella parabola NEM divida in mezzo l'angolo LMD, fatto dall' asse o diametro ML colla DM tangente al vertice o origine M: determinare il valore delle coordinate NL, LM. 160

Ris. Osservando che il triangolo NML è isoscele, si concluderà NL=ML. Di quì e dall' equazione alla curva si dedurrà che ciascuna delle due coordinate eguaglia il parametro.

III. Nella stessa curva abbiasi l' asse AN colle ordinate MP, EN distanti fra loro d' un intervallo PN eguale al parametro: determinare il rapporto di EN ad MN. 159

Ris. Introdotto nel valor di MN dato dal triangolo rettangolo MNP, quello di MP dato dall' equazione alla curva, e osservando che $p+AP=AN=\frac{EN^2}{p}$, si troverà $MN=EN$.

IV. Condotta comunque nella parabola VSv la corda Nn, e dai punti N, n le Pn, NR ordinate sull' asse o diametro TQ, determinare la ragione delle ascisse SP, SF, SR; e nel caso che la corda attraversi l' asse ad una distanza dal vertice eguale al parametro p, dimostrare che il prodotto delle due ordinate è eguale a p^2. 160

Ris. Dai triangoli simili NRF, PnF e dall' equazione alla curva si avrà primieramente $PF^2 : FR^2 :: SP : SR$. Di quì $FR^2 - PF^2 : FR^2 :: SR - SP : SR$; d' onde osservando che $FR^2 - PF^2 = (FR+PF)(FR-PF) = PR(FR-PF)$, che $SR-SP = PR$, e in seguito che $SR-FR=SF$, si giungerà facilmente all' equazione $PF \times SR = FR \times SF$. Questa dà $SF : PF :: SR : FR$, e quindi $SF-PF : SF :: SR-FR : SR$, ossia $SP : SF :: SF : SR$, onde la ragione cercata è continua geometrica. Di quì $Pn \times NR = p \times SF$, e nel caso di $SF=p$, $Pn \times NR = p^2$.

V. Supposte nella parabola IBN le parallele MF, DB ordinate al diametro IL, 176

F.176 e tagliate in G, K dalla corda IN, determinare il rapporto di $MF \times GF$, $DB \times KD$.

Ris. triangoli simili GIF, KDI e l'equazione alla curva danno $GF : KD :: MF^2 : BD^2$; dunque $GF \times MF : KD \times BD :: MF^3 : BD^3$.

VI. Nella stessa parabola sia IE tangente all'origine I del diametro ID, e da due punti H, E di essa sieno condotte sulla corda NI le rette HG, EK parallele al diametro ID: determinare il rapporto dei rettangoli $CH \times HG$, $EM \times EK$.

Ris. Si rifletterà che HC, EM corrispondono sul diametro a due ascisse, ed HI, EI alle loro ordinate; quindi applicato il raziocinio del problema precedente, si troverà che i dati rettangoli stanno come $GH^3 : EK^3$.

VII. Sull'asse ID della parabola MIT si prenda l'ascissa IF eguale al parametro, e condotta comunque per F la corda MT, se ne uniscano l'estremità M, T col vertice I: determinare il valore dell'angolo MIT.

Ris. Condotte le ordinate MQ, TO, avremo (probl. IV.) $IO \times IQ = IF^2 = OT \times MQ$. I triangoli rettangoli IOT, IMQ son dunque simili (581), e gli angoli MIQ, ITO sono eguali. Quindi $MIQ + OIT = 90°$ (561.3°); onde il dato angolo è retto.

162 VIII. Sull'origine S del diametro o asse SR abbiasi la tangente SC, da un di cui punto qualunque C sia condotta la secante CN che incontri la parabola in n, N, e il diametro in F: determinar la ragione delle parti Cn, CF, CN.

Ris. Le ordinate nP, NR parallele fra loro e alla tangente (955) danno $SP : SF :: Cn : CF$, ed $SF : SR :: CF : CN$. Da queste e dalla proporzione stabilita al problema IV. si concluderà $Cn : CF :: CF : CN$.

176 IX. Da un punto qualunque E di EI tangente all'origine I del diametro ID si conduca fino alla parabola la retta EM parallela al diametro, e la secante ET all'estremità T della retta MT ordinata al punto M: dimostrare che sarà CE=CO.

Ris. Dalla proporzione precedente e dai triangoli simili MTE, OPT si avrà $CE : EO :: MF : MT$; onde come MT è doppia di MF (955), sarà pure EO doppia di CE, e perciò CE=CO.

161 X. Condotte ai vertici A, M di due diametri qualunque AB, MG della parabola AIM, le tangenti AF, CM, ciascuna delle quali sia prolungata fino all'incontro col diametro corrispondente all'altra, determinare come si divideranno tra loro.

Ris. Condotta l'ordinata AR, si avrà CA=MR=FM (958); di qui e dai triangoli simili CAD, DFM si avrà AD=DF, CD=DM, cioè le due tangenti si divideranno in parti eguali.

XI. Poste le stesse cose determinare il rapporto delle due tangenti CM, AF.

Ris. Sieno p', p'' i parametri dei due diametri. Condotte le ordinate AR, KM si rifletterà che queste son parallele alle tangenti. Da ciò, dall'equazione ai diametri, e dall'essere MR=FM (958)=AK si dedurrà $CM^2 : AF^2 :: p' : p''$.

177 XII. Per il fuoco F della parabola MAm passi comunque la corda Mm, alle cui estremità sieno condotte le tangenti MT, mT: determinare dove e sotto qual angolo s' incontreranno.

Ris. Si estenda MT fino all' incontro in H col prolungamento dell' asse, e si conduca inoltre TB sulla metà di Mm, ed FA dal fuoco F al punto A, ove TB taglia la curva. Dal triangolo MBT simile ad MFH (960.955) isoscele (950), si avrà $TB=MB=$(955) $mB=$(956)$\frac{1}{2}p'=$(955) $2FA=$(956) 2AT. Le prime due equazioni fan conoscere che l'angolo MTm è retto, perchè resterebbe inscritto nel semicircolo, che avesse per diametro Mm; l'ultima dando $AT=FA$, mostra che il punto T spettante al diametro AB, parallelo di sua natura all'asse, è necessariamente nella direttrice (949). F.177

XIII. Poste le stesse cose dimostrare che la linea TF condotta dal punto di concorso al fuoco, è normale alla corda mM.

Ris. Riflettendo che $AF=AT=AB$, e ragionando come nel problema precedente, troveremo che anche l'angolo TFB sarà retto.

XIV. Abbiasi la parabola ABC con le AG, GC tangenti in A, C e concorrenti in G; e ad un punto qualunque B dell' arco parabolico ABC sia condotta una terza tangente HF che incontri in H, F le prime due. Mostrare che CF : GF :: GH : AH. 178

Ris. Si conducano le tre corde AC, AB, BC, e quindi da G la GD sulla metà D di AC, e da H, B, F le HI, BK, FE parallele a GD. Sarà GD un diametro prolungato (960.955), e tali per conseguenza saranno pure FE, HI, che avranno per doppie ordinate, e divideranno quindi per metà (955) le BC, AB. Si avrà dunque (577) $AI=IK$, $KE=EC$ ed $AD=DC$, ossia $AI+IK+KD=DE+EC$; d'onde osservando che $KD=KE-DE=EC-DE$, si trarrà facilmente $AI=DE$. Ma GC : GF :: DC : DE, dunque GC : GF :: AD : AI :: AG : AH; e di qui GC—GF : GF :: AG—AH : AH; ossia CF : GF :: GH : AH.

Dunque all' incontro se poste ad angolo due rette qualunque AG, GC si prendono sull' una e sull' altra due punti qualunque F, H in modo che sia CF : GF :: GH : AH, la retta FH sarà tangente in un punto B ad una parabola che abbia parimente per tangenti in A, C le rette AG, GC. Di qui la regola conosciuta dai pratici per descriver graficamente questa curva. Divise in m parti eguali, per esempio in 10, le due rette AG, GC, si contrassegni ciascun punto di divisione con cifre, nel modo ed ordine che vedesi nella figura. Si uniscano quindi con rette le divisioni contrassegnate con le medesime cifre, per esempio le H, F segnate con la cifra 4. E' chiaro che rappresentando con a, b le respettive lunghezze delle divisioni di GC, GA, avremo $GF=6a$, $CF=4a$, $GH=4b$, $AH=6b$, e si avrà CF : GF : : GH : AH; onde FH sarà tangente alla stessa parabola a cui son tangenti GC, GA. Così saranno tangenti tutte le altre rette nel prescritto modo condotte, e ciascuna conterrà intorno al punto di contatto una piccola porzione che sensibilmente si confonderà con la curva, la quale verrà dunque sufficientemente rappresentata dalla successione di queste piccole porzioni. Uniti quindi i punti C, A con la retta CA, la GD condotta sulla metà di CA sarà un diametro, col mezzo del quale potremo aver l'asse, il vertice e il fuoco (962.3°). 179

XV. Tutto supposto come sopra, mostrare che HB : BF :: AH : HG.

Ris. Avremo primieramente HB : BF :: IK : KE :: (per essere $IK=AI=DE$, 178

F. 178 e $KE=KD+DE=KD+IK=DI$) $DE : DI ::$ (per essere $DC=DA$) $DE\times DA : DC\times DI$. Ma condotta FL parallela ad AC, si ha $DE : DC :: GF : GC :: GL : GA$, e d'altronde $DA : DI :: GA : GH$, dunque $DE\times DA : DC\times DI :: GL\times GA : GA\times GH :: GL : HG$, e perciò $HB : BF :: GL : HG$. Infine poichè $GL : AG :: GF : GC :: DE : DC :: AI : AD :: AH : AG$, e quindi $GL=AH$, dunque $HB : BF :: AH : HG$.

162 XVI. Sia nella parabola MAM' la corda MM' ordinata al diametro AR del parametro p', incontrata in F dal diametro IF condotto da un punto qualunque I della curva. Determinare il valore del rettangolo fatto dalle parti FM,FM' della corda.

Ris. Condotta IS parallela ad MM', avremo (655) $MF\times FM'=MR^2-FR^2=MR^2-IS^2=p'(AR-AS)=p'\times IF$.

XVII. Abbiansi nella stessa parabola le due corde MM', DK, che si taglino comunque in F; determinare il rapporto dei rettangoli $MF\times FM'$, $DF\times FK$ fatti dalle parti in cui ciascuna delle corde resta respettivamente divisa.

Ris. Supposti p'; p'' i parametri dei diametri, ai quali le due corde sono ordinate, il risultamento del precedente problema darà $MF\times FM' : DF\times FK :: p' : p''$.

178 XVIII. Si abbiano due parabole DAG, *dag* descritte sullo stesso asse AL e con lo stesso parametro, ma con fuoco diverso, e sia condotta comunque e dovunque nella parabola esterna la corda BE: determinare il rapporto delle parti B*b*, *e*E di questa corda, intercette fra le due curve, e il valore del rettangolo $Bb\times bE$ fatto da una di esse parti B*b*, nella rimanente porzione *b*E della corda.

Ris. Poichè le due parabole hanno un parametro eguale, tutti i diametri che nell' una e nell' altra sono ad egual distanza dall' asse, e perciò coincidenti, avranno pure un egual parametro, e saranno incontrati sotto uno stesso angolo dalle loro coordinate (962.I°), le quali perciò in tutti i punti comuni a due diametri coincidenti, dovranno esse pure necessariamente coincidere. Sia dunque HK un diametro della parabola esterna che passi per *m*, sulla metà di BE. Sarà BE ordinata a questo diametro sul punto *m*, e *be* sarà ordinata sul medesimo punto al diametro *h*K nella parabola interna. Di qui facilmente si dedurrà $Bb=eE$. Di più condotta nell' esterna la corda Oo tangente all' interna sull' origine *h* del diametro *h*K, chiamato p' il parametro comune, e fatte $Hh=b$, $hm=x$, avremo $Bb\times BE=(Bm-bm)(Bm+bm)=Bm^2-bm^2=p'(x+b)-p'x=p'b=Oh^2$, prodotto costante qualunque siasi la corda. Di qui può anche inferirsi, che le due curve son fra loro asintotiche, cioè che prolungate tenderanno sempre ad avvicinarsi senza incontrarsi giammai.

XIX. Nell' ellisse e nell' iperbola il prodotto degli assi è sempre minore del prodotto di due diametri coniugati qualunque.

Ris. Nell' ellisse si ha (974.3°) $mn\,sen(\varphi+\omega)=ab$; nell' iperbola (996.VI°) $mn\,sen(\varphi-\omega)=ab$. Di qui chiaramente tanto per l' una che per l' altra curva $mn>ab$.

XX. L' asse trasverso $2a$ è maggiore nell' ellisse, minore nell' iperbola d' ogni diametro trasverso $2m$. Ma l' asse coniugato $2b$ è minore in ambedue le curve d' ogni diametro coniugato $2n$.

Ris. Supposte x, y le coordinate all' origine del diametro m, si troverà a^2 per

l' una che per l' altra curva $m^2 = x^2 + y^2 = (964.980.946)\ a^2 + \frac{e^2}{a^2}(x^2 - a^2)$; e poichè nell' ellisse è sempre $x < a$, nell' iperbola $x > a$, dunque in quella $a > m$, in questa $a < m$. Ciò vale per il diametro trasverso: quanto al coniugato, poichè per ambedue insieme le curve abbiamo $a^2 \pm b^2 = m^2 \pm n^2$ (974.4°,996.IX⁴), dunque è manifesto che sì nell' ellisse ove $a > m$, che nell' iperbola ove $a < m$, sarà $b < n$.

XXI. Nell'ellisse e nell'iperbola la somma e la differenza degli assi sono respettivamente l'una minore, l' altra maggiore della somma e della differenza di due qualunque diametri coniugati.

Ris. Poichè nell' ellisse $m^2 + n^2 = a^2 + b^2$ (974.4°) ed $mn > ab$ (teor. XIX.), sarà dunque $(m+n)^2 > (a+b)^2$, $(m-n)^2 < (a-b)^2$; quindi $m+n > a+b$, ed $m-n < a-b$. E poichè nell' iperbola $m^2 - n^2 = a^2 - b^2$ (996.IX), ed $n > b, mn > ab$ (teor. XIX. XX.), sarà 1°. $m^2 + n^2 > a^2 + b^2$, 2°. $(m+n)^2 > (a+b)^2$, quindi $m+n > a+b$; onde avendosi $(m+n)(m-n) = (a+b)(a-b)$, $m-n < a-b$.

XXII. Ai vertici A, a di qualunque diametro Aa di un' ellisse o di un' iperbola si conducano le tangenti AD, ad, che incontrino in D, d la retta Dd tangente nel punto qualunque M; determinare il valor del rettangolo AD$\times ad$. F. 179

Ris. Prolungato il diametro e la tangente Dd fino al loro incontro in T, e condotta l' ordinata MP, dai triangoli simili PTM, ATD, aTd avremo AD : AT :: MP : PT, ad : aT :: MP : PT, onde $\mathrm{AD} \times ad = \frac{\mathrm{MP}^2}{\mathrm{PT}^2} \times \mathrm{AT} \times a\mathrm{T}$, cioè applicati i noti valori (975.976.995) $\mathrm{AD} \times ad = n^2$.

XXIII. Poste le stesse cose, e soltanto cangiato in asse il diametro, l' angolo che fanno fra loro le rette fD, fd condotte da uno qualunque dei fuochi f all' estremità D, d delle tangenti AD, ad, sarà retto.

Ris. Avendosi in questo caso $\mathrm{AD} \times ad = b^2 = \mathrm{A}f \times fa$ (947), i triangoli DAf, fad saranno simili (584), e quindi eguali gli angoli ADf, afd. Dunque $afd + \mathrm{A}f\mathrm{D} = \mathrm{AD}f + \mathrm{A}f\mathrm{D} = 90°$ (561.3°), e perciò anche Dfd = 90° (505). Può anche osservarsi che $\mathrm{D}d^2 = 4\frac{(a^4 - e^2x^2)}{a^2 - x^2}$, $fd^2 = \frac{2(a+e)(a^2+ex)}{a+x}$, $f\mathrm{D}^2 = \frac{2(a-e)(a^2+ex)}{a-x}$; onde $\mathrm{D}d^2 = fd^2 + f\mathrm{D}^2$, e perciò l' angolo D$fd$ retto (659).

XXIV. Se dal fuoco f di un' iperbola o di un' ellisse si conduca sulla tangente Dd la normale fE, e le rette AE, aE dai vertici A, a, l' angolo AEa sarà retto.

Ris. Rinnovate le superiori costruzioni (XXII. XXIII.), e immaginati descritti due circoli, l' uno sul diametro Df, l' altro sul diametro fd, il primo passerà per i vertici A,E degli angoli retti DAf, DEf, l' altro per i vertici E,a degli angoli retti fEd, fad. Quindi i due angoli DEA, DfA inscritti nel primo sulla corda comune AD, e i due angoli dEa, dFa inscritti nel secondo sulla comun corda ad saranno respettivamente eguali fra loro. Dunque DEA + dEa = DfA + dfa = (teor. prec.) 90°, e quindi anche AEa = 90°.

F. 179 XXV. Poste sempre le stesse cose, e condotta inoltre dal centro C la CE al piede della perpendicolare fE, determinare il valore di CE.

Ris. Il circolo descritto sul diametro Aa passa per E; dunque CE=CA=a semiasse trasverso.

XXVI. Nell' ellisse e nell' iperbola il quadrato della normale condotta dal fuoco sulla tangente sta al quadrato del semiasse minore, come il raggio vettore che partendo dal medesimo fuoco va al punto di contatto, a quello che vi va partendo dall'altro.

Ris. Sostituito in $q=\frac{b^2z}{an}$(969.1°,987.3°) l'opportuno valor di n (968.2°,986), si avrà $q^2=\frac{b^2z}{2a\mp z}$; di quì la proporzione assegnata.

XXVII. Nelle stesse due curve, le normali condotte da ciascun dei fuochi sulla tangente, son proporzionali ai raggi vettori corrispondenti.

Ris. Per l' una di queste normali si ha $q=\frac{b^2z}{an}$, per l' altra $q'=\frac{an}{z}$(969.1°,987) Di quì, operando come sopra, avremo la data proporzione.

XXVIII. Nelle medesime curve il prodotto dei raggi vettori condotti all' estremità di un diametro eguaglia il quadrato del semidiametro coniugato.

Ris. Chiamati z, z' i due raggi vettori, si ha $zz'=$(965,981) $(a+\frac{ex}{a})(\pm a\mp\frac{ex}{a})=\pm a^2\mp\frac{e^2x^2}{a^2}=$(teor. XX.)$\pm a^2\mp m^2+b^2=n^2$(974.4°,996.IX²).

180 XXIX. Nell' ellisse se una secante HM incontri esteriormente in H il diametro FE prolungato, il rettangolo del diametro prolungato HF nel prolungamento HE, sta a quello dell'intera secante HM nella sua parte esteriore HO, come il quadrato di esso diametro al quadrato del diametro parallelo alla secante.

Ris. Ripetuta la stessa costruzione che al num°. 977, ritenute le stesse denominazioni, e rinnovati gli stessi calcoli e raziocinj, si perverrà parimente all' equazione $z^2-u^2=\frac{s^2}{r^2}(r^2-x^2)$, ovvero $u^2-z^2=\frac{s^2}{r^2}\times(x^2-r^2)$. Ora $u^2-z^2=(u+z)\times(u-z)=$(HN+MN)(HN−MN)=HM$\times$HO, ed $x^2-r^2=(x+r)(x-r)=$(HC+CF)(HC−CE)=HF$\times$HE. Dunque HF$\times$HE : HM$\times$HO :: r^2 : s^2.

181 XXX. Nell' iperbola se una secante HM parta da un qualunque punto H del diametro FE, il rettangolo delle due parti FH, EH del diametro sta a quello della secante nella sua parte esteriore, come il quadrato di esso diametro al quadrato del diametro parallelo alla secante.

Ris. Ripetuta quì pure la stessa costruzione che al num°. 999, e ritenute le stesse denominazioni, si giungerà nel modo medesimo all'equazione $z^2-u^2=\frac{s^2}{r^2}(x^2-r^2)$ da cui nasce l' altra $u^2-z^2=\frac{s^2}{r^2}(r^2-x^2)$. Ora, siccome è facile ritrovare, $u^2-z^2=$MH$\times$HO, ed $r^2-x^2=$FH$\times$HE, dunque FH$\times$HE : MH$\times$HO :: r^2 : s^2.

XXXI. Supposto che le corde MO, PD si taglino in un punto H dentro l' ellisse, o dentro una delle due iperbole opposte, assegnare il rapporto fra i rettangoli MH$\times$HO, PH$\times$HD fatti dalle parti in cui ciascuna corda è divisa. F.182

Ris. Condotto per H il semidiametro AC$=r$, fatto CH$=x$, e chiamati s, t i semidiametri paralleli alle corde, avremo per la prima (977.999) HO$\times$HM$=\frac{s^2}{r^2}(\pm r^2 \mp x^2)$, per la seconda PH$\times$HD$=\frac{t^2}{r^2}(\pm r^2 \mp x^2)$; e il rapporto richiesto sarà di $s^2 : t^2$. Quindi se l' ellisse si cangi in un circolo ove $s=t$, i rettangoli si eguaglieranno, come già si sapeva (588).

XXXII. Supposto che le due corde si cangino nelle secanti MH, DH, determinare il rapporto dei rettangoli MH$\times$HN, HD$\times$HG, fatti da ciascuna secante intera nella sua parte esteriore.

Ris. Unito H col centro C della curva, posto r il semidiametro AC, s, t i semidiametri paralleli alle secanti, richiamati i teoremi XXIX, XXX. e operando nel resto come al precedente problema, il rapporto cercato si troverà di $s^2 : t^2$; onde riguardo all' ellisse, se questa si cangi in un circolo, i due rettangoli si eguaglieranno, come era già noto (589).

XXXIII. Due tangenti condotte da un punto stesso sull' iperbola o sull' ellisse, stanno fra loro come i diametri paralleli.

Ris. S' immaginino le due secanti del probl. prec. convertite in tangenti; i rettangoli di quelle diverranno quadrati di queste; di qui il teorema attuale.

XXXIV. Due ellissi o iperbole simili, cioè con gli assi $2a$, $2b$, $2a'$, $2b'$ respettivamente proporzionali, hanno proporzionali anche i diametri corrispondenti, ossia quei diametri che fanno fra loro, o con l' asse un angolo stesso; in generale hanno proporzionali tutte le loro dimensioni omologhe.

Ris. Soprapposte le due curve in modo che i centri coincidano in un sol punto, e gli assi in una medesima retta, anche i diametri corrispondenti coincideranno. Sia BE$=2m$ l' uno, P'F$=2m'$ l' altro, condotte sull' asse le ordinate EM$=y$, FR$=y'$, chiamate x, x' le loro ascisse CM, CR, e riflettendo che dall' ipotesi abbiamo $\frac{b}{a}=\frac{b'}{a'}$ i triangoli simili CRF, CME daranno $m^2 : m'^2 :: x^2 : x'^2 :: y^2 : y'^2 :: \pm a^2 \mp x^2 : \pm a'^2 \mp x'^2 :: a^2 : a'^2 :: b^2 : b'^2$. Di qui manifestamente il teorema, che nel modo medesimo può estendersi a tutte le dimensioni omologhe. 183

XXXV. Date due ellissi o due iperbole, concentriche, e con gli assi coincidenti, se nella curva esteriore si conduca una corda NO che passi per l' interiore, le parti NI, HO di questa corda, intercette fra le due curve, saranno eguali; e il rettangolo HO$\times$HN di una di queste parti nella rimanente porzione della corda, eguaglierà il quadrato LP^2 della tangente LP, condotta alla curva interiore sull' origine P del diametro PF, che divide in mezzo la corda, e terminata all' incontro in L con la curva esteriore.

183 *Ris* Con raziocinio analogo a quello tenuto nel probl. XVIII. si proverà che PF diametro divide in mezzo la corda IH; d' onde NI=HO. Quindi chiamata x l' ascissa CD, m, m' i due semidiametri CB, CP, n, n' i lor coniugati, e riflettendo che la similitudine delle curve interna ed esterna dà $m : m' :: n : n'$, avremo (973.1°) $OD^2 : HD^2 :: \pm m^2 \mp x^2 : \pm m'^2 \mp x^2$, ed $OD^2 : OD^2 - HD^2 :: \pm m^2 \mp x^2 : \pm m^2 \mp m'^2 :: OD^2 : LP^2$ (*ivi*). Dunque $LP^2 = (OD+DH)(OD-DH) = NH \times HO$.

184 XXXVI. Condotta fra le due opposte sezioni di un' iperbola equilatera la retta AD parallela all' asse BE, ed unite l' estremità A, D della medesima con uno dei vertici B, dimostrare che l' angolo ABD sarà retto.

Ris. Si conducano le ordinate AP,DQ e la tangente GB. Si troverà $GB^2 = AP^2 = DQ^2 =$ (980) $EP \times BP = BQ \times QE = GD \times AG$, e perciò retto l'angolo ABD (582.2°).

185 XXXVII. Prolungata fino agli asintoti CT,Ct dell' iperbola MAm la Tt tangente in qualunque punto M, dimostrare che la superficie del triangolo TCt sarà sempre costante, ed eguaglierà il doppio della potenza m^2 dell' iperbola nel *seno* dell' angolo dei due asintoti.

Ris, Condotte NM,MQ parallelamente ai due asintoti, e osservando che TM= Mt (991), si concluderà che sono eguali i triangoli TNM,OMt, e che perciò Ot= NM=OC. Ma $OMt = \frac{1}{2} MNOC = \frac{1}{2} CN \times OC \times sen NCt$ (633.846.1°) $= \frac{1}{2} m^2 sen NCt$ (989); dunque $TCt = TNM + MOt + MNOC = 2m^2 sen NCt$.

186 XXXVIII. Da due punti qualunque C,E degli asintoti AC,AE e parallelamente ai medesimi sieno condotte le rette EL, CL prolungate fino al loro concorso in L; dal punto D, ove la prima taglia la curva sia inoltre abbassata la DG parallela ad AE, e sia infine unito il punto A col punto L; determinar la ragione delle tre rette AI,AH, AL.

Ris. Condotta BH parallela ad AE avremo (989) $AB \times BH = m^2 = AG \times GD = AG \times CL$, d'onde AB : AG :: CL : BH :: AL : AH :: AH : AI; quindi la ragion cercata è continua geometrica.

187 XXXIX. Se in qualsivoglia sezione conica si fa passare la tangente indefinita RT per l' estremità dell'ordinata FM alzata sul fuoco F, ogni altra ordinata PS protratta fino all' incontro in R colla tangente, eguaglierà il raggio vettore FS, condotto da F al punto S ove è intersecata la curva.

Ris. Per ciascuna delle tre curve si ha $PR = \frac{FM \times PT}{FT} =$ (945) $\frac{p \times PT}{2FT}$; quindi per la parabola, ove la suttangente $FT = \frac{1}{2} p$ (952) e $PT = AP + AT = x + \frac{1}{4} p$, sarà $PR = x + \frac{1}{4} p = z$ (949). Per le altre due curve, ove $FT = \frac{\pm a^2 \mp e^2}{e}$ (968,986) $= \frac{b^2}{e}$... (946), $PT = \pm CT \mp CP =$ (968.985) $\frac{\pm a^2 \mp ex}{e}$, e $p = \frac{2b^2}{a}$ (944), sarà parimente $PR = \pm a \mp \frac{ex}{a} = z$ (965,981).

188 XXXX. Dato un segmento LNM di qualunque sezione conica, inscrivervi il triangolo massimo.

Ris. Condotta la corda PQ parallela alla base LM del segmento, si faccia passare

per la metà di ambedue la retta NK ; il triangolo LNM sarà il cercato. Infatti NK sarà diametro (962.III. 979.III. 999.III.), ed NB tangente all' origine N sarà parallela ad LM. Perciò ogni altro triangolo inscritto sul dato segmento avrà con LNM comune la base, e minore l'altezza; quindi sarà minore (632). F. 188

XLI. Il triangolo massimo LNM inscritto nel segmento parabolico PHML è quadruplo dei triangoli massimi inscritti sui segmenti terminati dai lati LN,NM.

Ris. Per la metà di NM si faccia passare il diametro HD, e si prolunghi fino all' incontro in B con la NB tangente in N vertice del triangolo dato. Per il teorema precedente sarà NHM il massimo triangolo inscrittibile nel segmento NHMN. Ora avendosi NC=CM, e BH=HC (958), i tre triangoli MCH,HCN,HNB, e i tre MCD,NCB, NHM saranno respettivamente eguali in superficie (640,510.2°). Dunque il triangolo KNM eguaglia il parallelogrammo KB quadruplo del triangolo NCB, con cui ha comune l' altezza e di cui ha doppia la base (633), e perciò KNM è quadruplo di NCB e quindi di NHM. E potendo altrettanto dimostrarsi rapporto al triangolo massimo nel modo medesimo inscrittibile sull'altro lato LN, è dunque manifesta la verità del teorema, dal quale è quindi assai facile inferire che tutta la superficie del segmento parabolico LPNHM eguaglia il prodotto di quella del triangolo LNM nella somma S della serie $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+$ ec. Or poichè si ha in generale $\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+$ ec., è dunque chiaro che fatta $x=4$, sarà $S=\frac{4}{3}$; cioè il segmento parabolico LPNHM è $\frac{4}{3}$ del massimo triangolo inscritto. E poichè compito il parallelogrammo KR, e chiamata P l' area del semisegmento KNHM si ha $KR=2KNM=LNM=\frac{3}{4}\times 2P=\frac{3P}{2}$, sarà $P=\frac{2}{3}KR$, cioè la superficie parabolica chiusa fra la curva e due coordinate è $\frac{2}{3}$ del parallelogrammo costruito sulle due coordinate. E siccome, condotta da M la MS normale al diametro NK, abbiamo $KR=NK\times MS$, dunque la medesima superficie equivale a $\frac{2}{3}$ del rettangolo dell' ascissa nella normale condotta dalla sommità dell' ordinata sopra il diametro.

XLII. Abbiasi l' arco parabolico LPN compreso fra i due diametri NT, LO, all' uno e all' altro dei quali sia normale la retta OT. Assegnar l' espressione della superficie $OLPNT=S$.

Ris. Condotta la corda LN, e la LF normale ad NT, e per la metà G della corda il diametro AE, si ponga $OE=LI=h$, $OL=y$, $AE=y_1$, $NT=y_2$, e si chiamino S_1, S_2 le superficie del trapezio ON, e del segmento LANL. Avremo (634) $S_1=\ldots h(y+y_2)$, $S_2=$(teor. prec.) $\frac{2}{3}LF\times AG=\frac{4}{3}h\times AG$; e siccome $AG=AE-EG=y_1-\frac{1}{2}(y+y_2)$, sarà $S_2=\frac{2h}{3}(2y_1-y-y_2)$. Dunque $S=S_1+S_2=\frac{h}{3}(y+4y_1+y_2)$

Di quì si ha il modo di misurare con molta approssimazione la superficie S di una figura quadrilatera, della forma AMNB terminata superiormente da una curva 189

F.189 qualunque MN. Si alzino le ordinate ortogonali P_1M_1, P_2M_2, P_3M_3, ec. a piccoli ed eguali intervalli tra loro. Qualunque sia la curva MN i piccoli archi MM_1, M_1M_2, M_2M_3, ec., potranno aversi, senza error sensibile, come parabolici, e le ordinate AM, P_1M_1, P_2M_2, ec., come diametri. Rappresentando questi in ordine con y, y_1, y_2, ec. e gli intervalli eguali AP_1, P_1P_2, P_2P_3, ec. con h, avremo per ciò che si è dimostrato $AM_2 = \frac{h}{3}(y+4y_1+y_2)$, $P_2M_4 = \frac{h}{3}(y_2+4y_3+y_4)$, $P_4M_6 = \frac{h}{3}(y_4+4y_5+y_6)$, ec. e quindi per la superficie totale $S = \frac{h}{3}(y+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+4y_5+\text{ec})$.

Curve algebriche d' ordini superiori al secondo

190 1002. *Cissoide di Diocle.* Se condotte al circolo ANB del raggio CB la tangente QBq, e le rette AQ a varj punti di essa, si prenda $QM=AN$, la curva MAm, che passa per i punti M, m così determinati si chiama *cissoide*.

1003. Per trovarne l' equazione, conduco OM, MP, NG, l'una parallela, l' altre perpendicolari ad AB; fatte $AP=x$, $PM=y$, e $AB=2a$ diametro del circolo *genitore*, essendo $AN=MQ$, sarà $AG=PB$, ed $AG(2a-x) : GN(\sqrt{(2ax-x^2)}) :: AP(x) : PM(y) = \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)}}$, onde $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$, equazione cercata, da cui si vede 1°. che la curva è algebrica del terz' ordine (932); 2°. che ha due rami eguali ed opposti; 3°. che quando $x=0$, anche $y=0$, e però la curva passa per l' origine delle ascisse, ove forma una cuspide (926); 4°. che con $x=a$, si ha $y=\pm a$, cioè i due rami della cissoide tagliano la circonferenza in due punti in distanza di 90° dall'origine A; 5°. che se $x=2a$, y è infinita, e perciò BQ è asintoto della curva; 6°. le rette $FP=\sqrt{(2ax-x^2)}$, $AP=x$, $PM=y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(2a-x)}}$ sono in proporzione continua; 7°. posta $AM=r$, e l' angolo $MAP=\varphi$, sarà $x=r\cos\varphi$, $y=r\,\mathrm{sen}\varphi$, e l' equazione darà $r^2\mathrm{sen}^2\varphi = \frac{r^3\cos^3\varphi}{2a-r\cos\varphi}$, d' onde facilmente $r=\frac{2a}{\cos\varphi\,\mathrm{cosec}^2\varphi} = 2a\,\mathrm{sen}\varphi\,\mathrm{tang}\varphi$, equazione polare della cissoide.

191 1004. Se la perpendicolare indefinita BQ si inalzi non più dall' estremità del diametro, ma dal centro del circolo, sarà allora $AG=MO=PB=a-x$, $GB=a-AG=x$, $GC=a+x$, $NG^2=AG\times GC=a^2-x^2$; e i triangoli simili AGN, APM daranno $(a-x)^2 : a^2-x^2 :: x^2 : y^2 = \frac{a+x}{a-x}x^2$, equazione alla nuova cissoide, che avrà come l' altra due rami opposti ed infiniti dalla parte destra dell' asse e la BQ per asintoto; e poichè cangiata x in $-x$ si ha $y=\pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, reale da $x=0$ fino ad $x=a$, ove di nuovo $y=0$, avrà dunque dalla parte sinistra dell' asse due rami finiti che si riuniranno in B', ad una distanza $AB'=a$ dall' origine A, e formeranno l' ovale o *foglia* AC'B'C''.

1005. Infine se invece del cerchio si sostituisca un' altra curva qualunque dell' equazione $u=f(z)$, supposta come sopra $AB=2a$, avremo $AG=z=MO=PB=2a-x$, $NG=u=f(2a-x)$, e i due triangoli ANG, AMP daranno $2a-x:f(2a-x)::x:y=\frac{x}{2a-x}f(2a-x)$. E se in luogo di una curva si avesse una retta che partisse dal punto B e fosse inclinata sull' asse con un angolo $ABN=\varphi$, osservando che in generale $BG=PB+PG=AG+PG=AP=x$, si avrebbe $NG=x sen\varphi$, e i soliti triangoli darebbero $2a-x:x sen\varphi::x:y=\frac{x^2}{2a-x}sen\varphi$, ossia $xy+x^2 sen\varphi-2ay=0$, equazione all' iperbola tra gli asintoti (943). F. 190

1006. Da questa curva si ha un' assai facile ed elegante maniera per risolvere il problema sì famoso tra gli antichi, di trovar cioè tra due rette date a, b due medie proporzionali x, y; ed anzi a quest' unico oggetto venne per la prima volta proposta dal suo inventore. Sia $m:n$ il rapporto delle due rette date. Dall' origine A della curva si alzi normalmente al diametro AB la AH tale che abbiasi $BA:AH::m:n::a:b$. Si conduca BH, e per il punto I, ove questa taglia la curva, si faccia passare la NG ordinata al circolo genitore. Avremo dal circolo $NG^2=AG\times GB$, e dalla curva (1003.6°) $AG^2=NG\times IG$; e le quattro rette GB, NG, AG, IG saranno fra loro continuamente proporzionali, come le quattro rette a, x, y, b. Sia q la ragione costante (359) delle prime, q' quella delle seconde; sarà $NG=q\times GB$, $AG=q^2\times GB$, $IG=q^3\times GB$, $x=aq'$, $y=aq'^2$, $b=aq'^3$. Ma i triangoli IBG, HBA danno $GB:IG::AB:AH::m:n::a:b$, dunque $b\times GB=a\times IG$, ossia $aq'^3\times GB=aq^3\times GB$; e quindi $q'=q$, e per conseguenza $\frac{x}{a}=\frac{NG}{GB}$, $\frac{y}{a}=\frac{AG}{GB}$, d' onde $x=\frac{a\times NG}{GB}$, $y=\frac{a\times AG}{GB}$, valori delle due medie cercate.

Può osservarsi che fatto $AC=a$, alzando dal centro del circolo il raggio normale CE, e suppostone in R l' incontro con la corda AK che passa per I, e rammentandoci che $AG^2=NG\times IG$ ed $NG^2=AG\times GB$, si troverà $CR:AC::IG:AG::AG:NG::NG:GB$; e quindi $CR=\frac{AC\times NG}{GB}=x$, cioè sarà CR la prima delle due medie, e come tale Diocle la fece appunto conoscere.

1007. *Concoide di Nicomede.* Se per un punto B preso fuori di una retta GH, si conducano delle rette BQM, BAD, ec. tali che le parti QM, AD, ec. sieno eguali, la curva MDM' che passa per i punti M, D, ec. si chiama *concoide*. Il punto B è il *polo*, la retta GH la *direttrice*, e prese sotto GH le parti eguali Qm, Ad, ec., la curva mdm' è la concoide *inferiore* o la parte inferiore d'una stessa concoide. Onde 1°. GH ne è l' asintoto; 2°. Dd normale a GH ne misura la massima larghezza; 3°. se $BA>dA$, la curva è qual si vede alla fig. 192; se $BA<dA$, ha un *nodo* $Bndn'$, e allora si chiama concoide *annodata*; se $BA=dA$, il nodo svanisce e resta una *cuspide* in B. 192 193

1008. Per aver l' equazione di questa curva, si conduca PM perpendicolare ad AP, e sia $AD=QM=a$, $AB=b$, $AP=x$, $PM=y$; si avrà $PQ:PM::AQ:AB$, ov- 192

F. 192 vero $\sqrt{(a^2-y^2)} : y :: x-\sqrt{(a^2-y^2)} : b$, onde $xy=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$, equazione alla concoide superiore; lo stesso calcolo dà $xy=(b-y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ per l' inferiore, e l'equazione è la stessa per l' annodata; e se si facesse $x=AR$ ed $y=RM$, si verrebbe a cangiare x in y ed y in x, e l'equazione sarebbe $xy=(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque la curva è algebrica del quart'ordine. Essa può descriversi con la continua in- 194 tersezione d' una riga BCM mobile intorno a B, e d'un circolo descritto col raggio $CM=a$, che si farà muovere in modo che il centro C sia sempre in HG; basta allora che la riga passi costantemente per il centro del circolo.

1009. Possono anzi formarsi infinite concoidi differenti sostituendo al circolo una 195 curva qualunque CM, e al centro di esso un punto fisso Q dell'asse della medesima. Troviamone l'equazione. Condotte le MP, AB perpendicolari alla direttrice, e fatte $AP=x$, $PM=y$, $CP=z$, $CQ=a$, $AB=b$, sarà $PQ(z-a) : PM(y) :: AQ(x+a-z) : AB(b)$; onde $z=a+\frac{xy}{b+y}$, valore che sostituito nell'equazione della curva CM, dà quella della concoide MD. Per esempio, se la curva CM è un circolo il cui centro sia Q, si ha $y^2=2az-z^2$, che dà $xy=(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}$ come sopra; e se la curva CM è una parabola dell' equazione $y^2=pz$, allora $y^3+by^2-py(a+x)=apb$ è l'equazione della concoide parabolica.

203 1010. *Lemniscata*. Tale è il nome dato da *Gio. Bernoulli* alla curva dell'equazione $(x^2+y^2)^2=a^2(y^2-x^2)$. Risolvendo si ha $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2a^2-4x^2\pm 2a\times\sqrt{(a^2-8x^2)})}$ I quattro valori di y son reali finchè abbiasi $x\sqrt{8}<a$, e si riducono a due soli se $x\sqrt{8}=\pm a$, nel qual caso si ha $y=\pm\frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$, e l'ordinata divien tangente (926). Al di là di questo punto le ordinate divengono immaginarie e cessa la curva. All'origine ove $x=0$ si hanno due valori di $y=0$, e due altri che sono $y=\pm a$. Cangiato x in $-x$ l'equazione non varia; onde la parte negativa è in tutto eguale alla positiva. La curva è dunque simmetrica, rientrante, e dotata di un punto doppio all' origine che dà nascita a un nodo (929), e di due ovali.

1011. *Parabole superiori*. Oltre la parabola conica, detta ancora *parabola Apolloniana* o *ordinaria*, vi sono due parabole *cubiche* che hanno per equazioni $y^3=p^2x$, $y^3=px^2$; ve ne sono due del 4°. grado con l' equazioni $y^4=p^3x$, $y^4=px^3$. L'equazione $y^4=p^2x^2$ quadrato dell' altra $y^2=px$ non rappresenta che il complesso di due parabole ordinarie (933). In generale tutta quanta la famiglia delle parabole è rappresentata dall' equazione $y^{m+n}=p^m x^n$, rapporto alla quale non altro può qui osservarsi se non che 1°. se m ed n son pari, posto $m+n=2k$, avremo $y=\pm\sqrt{(p^m x^n)^{\frac{1}{k}}}$, equazione che somministrando due valori reali ed opposti di y per qualunque valore di x, dando in oltre $y=0$ con $x=0$, e rimanendo infine la stessa col cangiarsi 204 di x in $-x$, mostra che le curve di questo genere avranno quattro rami infiniti ed eguali che s' incontreranno all' origine, ove formeranno un nodo; 2°. se n ed m sono impari, $m+n$ rimarrà pari, e potrà come sopra eguagliarsi a $2k$, d' onde $y=\pm\sqrt{(p^m x^n)^{\frac{1}{k}}}$, equazione che dando in questo caso y immaginaria quando x sia ne-

gativa; mostra che le curve non avranno allora che due soli rami infiniti dalla parte positiva dell' asse, i quali si riuniranno all' origine; 3°. se n è pari ed m impari, sarà impari la somma $m+n$, che eguagliata a $2k+1$, darà $y=(p^m x^n)^{\frac{1}{2k+1}}$, equazione la quale non porge che un sol valore reale di y per qualunque valore di x, ma riman la stessa cangiandovi x in $-x$; onde le curve non avranno allora che due rami infiniti ambedue superiormente all' asse X, l' uno dalla parte positiva, l'altro dalla negativa, che s' incontreranno all'origine ove formeranno una cuspide; 4°. infine con m pari ed n impari, e perciò $m+n$ impari, avrà luogo la stessa equazione $y=(p^m x^n)^{\frac{1}{2k+1}}$, la quale darà un valor reale di y per ogni valore sia positivo, sia negativo di x, se non che y sarà costantemente positiva nel primo caso, negativa nel secondo. Le curve non avranno dunque che due rami eguali ed infiniti, uno superiormente all' asse dalla parte positiva, l'altro inferiormente dalla parte negativa, ambedue i quali si riuniranno all'origine ove formeranno un'inflessione. Si noti che con $m+n$ pari le parabole si dicono di primo genere, con $m+n$ impari di secondo.

F. 205

206

207

1012. *Ellissi ed Iperbole superiori.* Si dà questo nome alle curve rappresentate dall' equazioni $y^{m+n}=\frac{b^{m+n}}{a^{m+n}}(a+x)^m(\pm a\mp x)^n$, valendo il segno superiore per le ellissi, l'inferiore per le iperbole. E qui pure han luogo discussioni analoghe a quelle già fatte sopra. Ci limiteremo ad esaminare il caso di m ed n impari, e quindi $m+n=2k$ pari, e supporremo di più k impari. Da ciò si avrebbe $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a+x)}^{\frac{m}{k}}\times(\pm a\mp x)^{\frac{n}{k}}$, ove con $x=0$ il segno inferiore dà y immaginaria, il superiore dà $y=\pm b$; con $x<a$ l' inferiore continua a dare y immaginaria, e il superiore dà due valori reali ed eguali di y per x positiva, altrettanti conformi ai primi per x negativa. Con $x=\pm a$ ambedue i segni danno $y=0$, ed infine con $x>a$ il segno superiore dà y immaginaria, l'inferiore dà valori reali doppj ed eguali tanto con x positiva, quanto con x negativa. Dal che agevolmente si raccoglie che nel caso contemplato le ellissi e le iperbole superiori hanno forme in tutto consimili alle ellissi ed alle iperbole coniche.

1013. *Curve di genere parabolico.* Abbiamo già accennata altrove (925) la natura, l' indole e la configurazione di queste curve, che hanno in generale per equazione $y=a+bx+cx^2+dx^3+$ec. Qui resta solo da mostrare un bel partito da trarsene, sia che vogliasi far passare una curva per un numero dato di punti, sia che occorra assegnare con qualche prossimità l'equazione di una curva delineata a caso sopra di un piano. Quanto alla prima ricerca si rappresentino con x_1, x_2, x_3, ec., y_1, y_2, y_3, ec. le coordinate che respettivamente riferiscono ad assi noti la posizione dei dati punti, e delle quali, quando manchi altro mezzo, potremo aver sempre il valore con l'immediata misura (919. e *segg.*). Si supponga inoltre $y=a+bx+cx^2+$

dx^3+ec. l'equazione della curva cercata, presi tanti termini nel secondo membro quanti saranno i punti dati. Poichè per ciascuno di questi deve in ipotesi passar la curva richiesta, e tutti debbon perciò appartenerle, l'equazione dovrà esserne dunque sodisfatta da ciascuna coppia delle loro respettive coordinate, ed avremo quindi

$y_1=a+bx_1+cx_1^2+dx_1^3+$ec. $\qquad y_2=a+bx_2+cx_2^2+dx_2^3+$ec.

$y_3=a+bx_3+cx_3^2+dx_3^3+$ec. $\qquad y_4=a+bx_4+cx_4^2+dx_4^3+$ec.

ec. $\qquad$ ec.

cioè avremo tante equazioni di primo grado quanti sono i coefficienti incogniti a, b, c, d, ec., e che in conseguenza varranno a tutti determinarli. Ciò fatto, e sostituiti i trovati valori nell' equazione supposta, otterremo in forma del tutto nota quella della curva cercata, la quale costruita passerà per tutti i punti dati. L'operazione potrà molto semplicizzarsi, se per uno dei due assi si prescelga la retta che unisce i due punti più distanti tra loro, poichè in tal caso verrà ad annullarsi sì per l' uno che per l'altro la corrispondente ordinata.

1014. In modo presso a poco consimile dovrà procedersi nella seconda ricerca, scegliendo cioè lungo la curva data una serie di punti, in maggior distanza fra loro, nei tratti ove la curva veggasi meno concava, più prossimi l'uno all'altro dove la concavità sia maggiore. Quindi se col metodo precedente si cerchi la curva atta a passare per tutti questi punti, è chiaro che questa dovrà presso a poco confondersi con la data, e tanto più sensibilmente, quanto maggiore sarà il numero dei punti prescelti. L' equazione che risulterà per questa curva potrà dunque stimarsi esser quella della data.

Curve trascendenti

F. 196

1015. *Quadratrice di Dinostrato*. Se la retta AG tangente al circolo AEae in A si muova uniformemente e parallelamente a se stessa lungo il diametro Aa, mentre il raggio AC gira uniformemente intorno al centro C verso il punto E, in modo che AG e AC si confondano con CE nel momento stesso, l' intersezione continua di queste due rette dà la curva AMD, chiamata *quadratrice*, dalla cui descrizione segue che uno spazio qualunque AP, percorso dalla retta AG, sta all' arco circolare AB, descritto nel tempo stesso dall' estremità del raggio, come un altro spazio AC percorso da quella retta, all'arco corrispondente ABE descritto dal raggio. Fatta dunque $AP=x$, $PM=y$, $AB=u$, $AC=r=1$, $ABE=90°=\frac{1}{2}\pi$, si avrà 1°. $x:u::1:\frac{1}{2}\pi$, onde $u=\frac{1}{2}\pi x$; 2°. CP : PM :: CA : AG, ovvero $1-x:y::1:tang u$, onde $y=(1-x)tang\frac{1}{2}\pi x$, equazione alla quadratrice, quando l' origine dell' ascisse è in A.

1016. Se sia in C, cangio x in $1-x$, ed ho $u=\frac{1}{2}\pi(1-x)$ ed $y=x tang\frac{1}{2}\pi(1-x)=$ (792.58°) $x\cot\frac{1}{2}\pi x=$ (809) $\frac{2}{\pi}-\frac{\pi x^2}{2.3}-\frac{\pi^3x^4}{2^3.3^2.5}-$ec.; onde quando $x=0$, sarà

y=CD=$2:\pi$ e però se si conoscesse la *base* CD della quadratrice, si avrebbe subito la quadratura del circolo; di qui è venuto il nome alla curva. Fig 199

1017. Se sia descritto col centro C e raggio CD il quadrante DLK, sarà (621) $\frac{\pi}{2}$: DLK :: 1 : $\frac{2}{\pi}$; dunque DLK=1=CA. Così PC=all' arco LD, perchè $\frac{2}{\pi}$: KL :: 1 : u :: 1 : $\frac{\pi}{2}(1-x)$: onde KL=$1-x$=AP, e PC=LD.

1018. Prese le ascisse negative AP', e sostituito il loro valore nella prima equazione, avremo $y=-(1+x)tang\frac{1}{2}\pi x$, che dà l'ordinate negative P'M'. Quindi la curva ha un ramo AM', di cui la retta QN, condotta alla distanza AQ=r=1, è l'asintoto; poichè fatto x=1, viene $y=-2\infty$.

Ben si vede 1.° che la retta AG e il raggio CA seguitando a muoversi dopo essersi confusi in CE, formano la parte Da della quadratrice; 2.° che se la curva fosse geometrica, si avrebbe qualunque angolo d'un dato numero di gradi, come di $\frac{90°}{m}$, poichè divisa AC in P in modo che sia AP : AC :: 1 : m, e condotta PM e il raggio CB, l'angolo ACB sarebbe=$\frac{90°}{m}$; infatti $x:1::u:\frac{\pi}{2}:1:m$.

1019. *Cicloide.* Se un circolo AG giri sopra una retta Aa, finchè il punto che toccava sul principio questa retta in A, la tocchi un' altra volta in a, questo punto descriverà una curva chiamata *cicloide*. La porzione Aa della retta compresa fra il primo e secondo contatto di essa col punto A, si chiama *base*; ed è chiaro che questa eguaglia in lunghezza la circonferenza intera del circolo generatore della curva. Alla BC alzata normalmente sulla metà C di Aa, si dà il nome di *asse* o altezza della cicloide; B ne è il vertice, che corrisponde al luogo su cui cade il punto primitivo A allorchè il circolo genitore è giunto alla metà del suo giro. 197

1020. Posto ciò, condotte MP normale a BC, le corde MN, OC ai punti di contatto N, C, ed NE normale in N alla tangente AN, sarà NE un diametro eguale e parallelo a BC; saranno inoltre eguali e parallele le ascisse NQ, CP, ed eguali in conseguenza le ordinate MQ, OP, e quindi eguali i triangoli rettangoli MQN, OPC, eguali e parallele le corde MN, OC, ed eguali in ultimo le MO, NC, comecchè parallele comprese tra parallele. Dunque poichè NC=AC—AN=BIOC—NKM=BIOC—OLC=BIO, la parte MO dell'ordinata MP è sempre eguale all'arco corrispondente BIO del circolo genitore. Inoltre il resto OP è il seno del medesimo arco; dunque facendo MP=y, BIO=u, si avrà per equazione alla cicloide ordinaria $y=u+senu$; e se il circolo è del raggio a, $y=au+asenu$, ove i valori di u e di $senu$ dovran prendersi nel circolo del raggio 1.

1021. Che se si faccia BP=x e in conseguenza OP=$senu=\sqrt{(2x-x^2)}$, DP=$cosu=1-x$, d' onde $u=arc.sen\sqrt{(2x-x^2)}=arc.cos(1-x)$, sarà $y=arc.sen\sqrt{(2x-x^2)}+\sqrt{(2x-x^2)}=arc.cos(1-x)+\sqrt{(2x-x^2)}$, che dà immedia-

Fig. 197 tamente il rapporto tra le coordinate x ed y sempre supposto 1 il raggio del circolo genitore. Che se il raggio sia a, il valor di y dovrà moltiplicarsi per a.

1022. Le principali fra le mirabili proprietà geometriche di questa curva verranno esposte nei calcoli differenziale e integrale. Qui avvertiremo che se mentre il circolo ruota sopra Aa, questa retta abbia un moto di traslazione o nel medesimo senso o in senso contrario, nasce allora una nuova specie di cicloide che chiamasi cicloide *allungata* nel primo caso, *accorciata* nel secondo, a distinzione dell'altra già contemplata a cui si dà il nome di cicloide *ordinaria*. Dicesi poi *epicicloide* se il circolo ruoti sul perimetro d'un circolo o d'un' altra curva qualunque.

198 1023. *Logaritmica* o *Logistica*. Preso sull'indefinita HG un punto A e alzate dell'ordinate PM che abbian per logaritmi le loro ascisse AP, la curva BMm, che passa per l'estremità di queste ordinate, dicesi *logaritmica*. Sia AP$=x$, PM$=y$, A il modulo, e la solita base dei logaritmi iperbolici; sarà $x=Aly=xle$, onde $y^A=e^x$, che dà $y=e^{x:A}$, equazione della logaritmica. Essa mostra 1.° che questa curva è trascendente (931); 2.° che l'ascisse x, x' della stessa ordinata y in diverse logaritmiche, o i logaritmi dello stesso numero in diversi sistemi, son come i moduli A, A'; 3.° che quando $x=0$, si ha $y=1=$AB; 4.° fatto $e^{1:A}=a$, sarà $y=a^x$; e perciò se le ascisse forman la progressione aritmetica 1, 2, 3, 4, ec., l'ordinate formeranno la geometrica a, a^2, a^3, a^4, ec., e però la logaritmica va all'infinito di là da AP. Ma prese verso AQ l'ascisse negative $x=-1$, -2, ec., l'ordinate diverranno $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, ec., cioè la curva ha un ramo infinito BO, di cui la direttrice o asse GH è l'asintoto.

1024. La più rimarchevole proprietà di questa curva è di aver la suttangente costante, ed eguale al modulo A. Si prendano infatti sull'asse le due ascisse AP$=x$, A$p=x+\omega$, ed alzate le corrispondenti ordinate PM$=y$, $pm=y'$, si conduca per M, m la secante mMS, e da M la Mr parallela ad Ap. Sarà $rm=y'-y=e^{(x+\omega):A}-e^{x:A}=e^{x:A}\left\{e^{\omega:A}-1\right\}$; e i triangoli SPM, M$rm$ daranno PS : PM :: rM : rm, d'onde PS$=y\omega:e^{x:A}\left\{e^{\omega:A}-1\right\}=1:\left\{\frac{1}{A}+\frac{\omega}{2A^2}+\frac{\omega^2}{2.3A^3}+\text{ec.}\right\}$ (461). Fingiamo adesso il punto m trasportato in M; in tal caso ω si annullerà, la secante mS si convertirà nella tangente MT, e la PS nella suttangente PT; sarà dunque PT$=A$.

208 1025. *Curva de' Seni*. È così detta la curva dell'equazione $y=b.arc.sen\frac{x}{c}$, nella quale cioè qualunque ordinata y è proporzionale all'arco che nel circolo del raggio 1 ha $\frac{x}{c}$ per seno. Su di che è da osservarsi che siccome ad un medesimo seno corrispondono infiniti archi (793. 8.°), così ad ogni valore di x corrisponderanno infiniti valori di y, positivi e negativi, i quali, supposto

e il minimo fra tutti gli archi predetti, verranno espressi i primi da $y=b(n\pi\pm u)$, Fig. 208
i secondi da $y=-b(n\pi\mp u)$ presi i segni inferiori quando n sia impari (794. 68.ª 70.ª), se si considerino positive le ascisse; se poi si considerino negative e quindi si cangi u in $-u$ e π in $-\pi$, i valori positivi dell'ordinate saranno dati da $y=b(n\pi\mp u)$, ed i negativi da $y=-b(n\pi\pm u)$ presi i segni come sopra. Dal che segue 1.° che ogni valor di $n>0$ darà sempre per ogni ascissa x quattro ordinate, due positive e due negative, ineguali per altro fra loro; 2.° che le ordinate positive insistenti sopra una stessa ascissa x e risultanti da un valor qualunque dato ad n, eguaglieranno le negative insistenti sull'ascissa $-x$ e date dal medesimo valor di n; 3.° che la differenza fra due ordinate successive insistenti sopra una medesima ascissa sarà costante ed eguale a $b(\pi-2u)$, se la prima o minore verrà data da n pari, eguale a $b(\pi+2u)$ se da n impari; 4.° che questa differenza si annullerà allorchè avremo $x=c$, nel qual caso $\frac{x}{c}=1$, ed $u=\frac{1}{2}\pi$ (781. 4.°), e quindi $2u=\pi$; la curva perciò non potrà in quei punti venire attraversata nei suoi rami successivi dalle ordinate, le quali in conseguenza si cangeranno in tangenti (926); 5.° infine non potendo verun arco nel circolo del raggio 1 aver un seno maggiore dell'unità, non potrà dunque aversi $x>c$, e quindi la curva sarà tutta compresa tra $x=c$ ed $x=-c$. Si rileva perciò che questa curva avrà una forma serpeggiante composta di porzioni successive tutte eguali tra loro, contrariamente situate, e chiuse fra due tangenti normali all'asse delle x, come la vediamo rappresentata dalla figura.

Curve Spirali

1026. Le *curve spirali* son così dette dai ripetuti ravvolgimenti che fanno intorno a un centro o polo. Si rappresentano analiticamente per mezzo d'equazioni polari (901). Le ordinate sono i *raggi vettori* CM (902), condotti dal polo C ad un punto qualunque M della curva. Tengon luogo d'ascisse gli *angoli direttori* ACM che ciascuna ordinata CM fa con l'asse AC di posizione arbitraria, o come più ordinariamente useremo, le lunghezze lineari degli archi AL, che presi sopra un circolo di raggio arbitrario AC, misurano gli angoli ACM. Condotta per C la TN normale all'ordinata CM, MT tangente in M, ed MN normale ad MT in M, le porzioni MT, MN della tangente e della normale vengon considerate l'una per tangente, l'altra per normale al punto M (934); e in conseguenza la CT, e la CN sono l'una suttangente, l'altra sunnormale. Le più celebri fra le curve spirali si riducono alle seguenti. 199

1027. *Spirale d'Archimede.* Si chiama così la curva CKMA descritta da un punto C che si muove uniformemente lungo il raggio CA, mentre il raggio stesso si muove uniformemente intorno al centro C, in maniera che quando il

Fig.199 raggio ha percorsa la circonferenza intera, questo punto si trovi confuso col punto A. Se prolungato il raggio CA, gli si faccia fare una seconda rivoluzione, mentre il punto C continua ad allontanarsi dall'origine del suo movimento, si descriverà una *seconda spirale*, poi una *terza*, ec.; o piuttosto queste spirali saranno una sola curva, le cui rivoluzioni possono accrescersi in infinito.

Premesso ciò, e supposto che il raggio $CA=a$, abbia percorso l'arco $AL=ax$, e che frattanto il punto mobile sia giunto in M, fatta $CM=y$, la natura della spirale darà luogo alla proporzione $y : ax :: a : 2a\pi :: 1 : 2\pi$ e quindi $y=\frac{ax}{2\pi}$, equazione della curva, nella quale x è la lunghezza lineare dell'arco che nel circolo del raggio 1 misura l'angolo MCA (677); e perciò 1.° la curva è trascendente; 2.° passa per il centro C, poichè $x=0$ dà $y=0$; 3.° passa altresì per A, poichè $x=2\pi$ dà $y=a$; 4.° fatto $x=2\pi+x'$, l'equazione diventa $y=a+\frac{ax'}{2\pi}$, e perciò dati ad x' i valori che son tra 0 e 2π, la spirale fa una seconda rivoluzione che termina all'estremità d'un raggio doppio del primo; e ne fa una terza, una quarta, ec. se $x=4\pi+x''$, $x=6\pi+x'''$, ec.

200 1028. *Spirale Parabolica*. Presa sulla direzione di un raggio CL una media proporzionale CM tra l'arco AL e una retta data p, la curva che passerà per i punti M determinati così, sarà la *spirale parabolica*. Sia dunque $AL=x$, $CM=y$: avremo $y^2=px$, equazione in cui sostituendo $2\pi+x$, $4\pi+x$, ec., in luogo di x, troviamo che questa curva può fare un' infinità di rivoluzioni intorno al centro C, e che perciò è del numero delle spirali.

201 1029. *Spirale Iperbolica*. Suppongo che dal punto C preso per centro sull'indefinita CP si descrivano degli archi AG, QM, PO, ec. eguali in lunghezza, e che per le loro estremità G, M, O, ec. si faccia passare una curva CKGMO. Questa sarà una *spirale iperbolica*; e ben si vede che presa $CB=AG=QM=PO$, ec. ed alzata BR parallela a CP, questa ne sarà l'asintoto, perchè può solamente incontrarla quando il raggio CM sia infinito.

Sia dunque il raggio $CA=a$, $AL=ax$, $CM=y$, $AG=QM$, ec $=b$; si avrà $ax : b :: a : y$, onde $xy=b$. Ora sostituiti ad x i valori $2\pi+x$, $4\pi+x$,.... $2m\pi+x$, si avrà successivamente $y=\frac{b}{2\pi+x}$, $y=\frac{b}{4\pi+x}$, ... $y=\frac{b}{2m\pi+x}$; onde crescendo l'ascissa, scema l'ordinata, senza poter mai annullarsi; dunque *la spirale iperbolica fa un'infinità di giri intorno al centro nè vi giunge giammai.*

202 1030. *Spirale Logaritmica o Logistica*. Si chiama *spirale logaritmica* la curva che taglia sotto uno stesso angolo tutti i raggi CM condotti dal suo centro C, cosicchè la tangente MT fa sempre un angolo stesso col raggio CM. In questo senso la circonferenza d'un circolo sarebbe una spirale logaritmica. Daremo in breve il modo di stabilir l'equazione di questa curva (1047).

Altre nozioni generiche sulle curve, e loro particolari applicazioni

1031. Oltre le considerazioni già fatte (925.e seg.) intorno alla diversa natura ed indole dell' equazioni delle curve, ed alle varietà che s' incontrano costruendole, altre molte ne resterebbero per compimento totale di questa vasta Teoria. Daremo qui luogo a quelle fra le più essenziali, che con maggior facilità si deducono dai principj fin qui stabiliti, tra le quali alcune ne incontreremo notabilissime pel numero e qualità delle loro applicazioni. Di queste parleremo alquanto più estesamente; mentre per servire quanto è possibile alla brevità, non passeremo che di volo sull' altre.

1032. *Curve simili.* Così vengon chiamate due o più curve della medesima specie, nelle di cui equazioni tutte le costanti, o come con più universale denominazione si appellano, tutti i *parametri* sieno respettivamente tra loro in una stessa ragione. Così due ellissi saranno simili se essendo a, b i semiassi dell' una, a', b' quelli dell' altra, abbiasi $a : a' :: b : b'$. Non sussistendo questa condizione le curve si chiamano *affini*, sempre inteso però che sieno della medesima specie.

1033. La più notabile singolarità che presentano le curve simili si ripone in questo, che se si prenda un' ascissa x nell' una ed un' ascissa x' nell' altra, tra le quali sussista la ragione $1 : n$ comune a tutti i parametri, anche le corrispondenti ordinate y, y' saranno nella stessa ragione di $1 : n$. Infatti si suppongan dell' ordine m^{simo} le due curve, e sieno I^a. $y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} +$ ec. $= 0$, II^a. $y'^m + \ldots$ $A'y'^{m-1} + B'y'^{m-2} + C'y'^{m-3} +$ ec. $= 0$ le respettive loro equazioni, l'una coi parametri a, b, c, ec., l' altra coi parametri a', b', c', ec. respettivamente omologhi ai primi, e che stiano a quelli nella suddetta comune ragione di $1 : n$. Poichè le due curve sono della medesima specie, e le due equazioni debbon esser necessariamente omogenee, è chiaro 1°. che A, A', B, B', C, C', ec. saranno funzioni relativamente simili delle due variabili x, x' e dei parametri omologhi a, a', b, b', c, c', ec; 2°. che in A ed A' le variabili ed i parametri dovranno trovarsi in termini separati e distinti, ed in modo da non dar luogo che ad una sola dimensione (689 2°); mentre formeranno due dimensioni in B, B', tre in C, C', ec; 3°. che dunque avendosi in forza dell' ipotesi $a' = an$, $b' = bn$, $c' = cn$, ec, se prenderemo $x' = nx$, e tutti questi valori si sostituiscano nella II^a., verremo a trovare $A' = An$, $B' = Bn^2$, $C' = Cn^3$, ec., con che la II^a. si cangerà in $y'^m + Any'^{m-1} + Bn^2y'^{m-2} + Cn^3y'^{m-3} +$ ec. $= 0$. Ma i valori di y' in quest' equazione equivalgono a quelli di y della I^a. moltiplicati per n (275); dunque $y' = ny$, e perciò $y : y' :: 1 : n :: x : x'$. Del rimanente questo costante rapporto che regna tra le coordinate delle curve simili regnerà del pari, come è evidente tra tutte le altre quantità omologhe, e si convertirà in $1 : n^2$ per le superficie (642). Può anche osservarsi di passaggio che tutte le curve di una stessa specie saranno simili se le loro equazioni non sieno fornite che di un solo parametro, poichè supposto a questo parametro in un' equazione, a' in una qualunque delle altre, ed $1 : n$ la loro ragione, non altro abbisognerà che porre $x' = nx$,

perchè immediatamente ne risulti $y'=ny$. Così tutti i circoli, tutte le parabole, come pure tutte le cissoidi, cicloidi, ec., saranno curve simili.

1034. *Diametri delle curve, e curve dotate di centro*. Trattando delle sezioni coniche abbiamo usata la voce *diametro* per indicare una retta che divide in due parti eguali tutte le corde parallele. Ma più in generale sotto il nome di diametro nelle curve algebriche d'ordine qualunque deve intendersi una retta, la quale in tal modo divida le parallele stese tra due o più rami, che la somma delle parti positive eguagli quella delle negative. In tal caso è chiaro che l'equazione della curva riferita ad uno di questi diametri, ordinata per y, e ridotta a zero, deve mancare del suo secondo termine, il cui coefficiente rappresentando per ogni valore di x la somma dei corrispondenti valori di y (285.3°), è necessariamente nullo quando la parte negativa di questi valori eguaglia la positiva.

1035. Potendosi tracciare per entro una curva qualunque infiniti sistemi di corde parallele in ogni direzione, infiniti altresì potranno esserne i diametri. Ma i diametri che più specialmente si considerano son quelli che essendo nel tempo stesso assi ortogonali della curva, la dividono in due o più parti simili ed eguali. Per riconoscere se una curva abbia o no diametri di questa specie convien distinguer tre diversi casi; poichè o si vuole che la curva sia divisa in due parti eguali dall'uno o dall'altro dei due assi X, Y, o si vuole che sieno respettivamente eguali tra loro le due porzioni della curva contenute nelle regioni R, S, cioè tra i due assi e i due loro prolungamenti, e le due contenute nelle regioni Q, T tra l'uno degli assi e il prolungamento dell'altro, o si vuole infine che tutte queste quattro parti sieno eguali tra di loro.

F. 209

1036. Nel primo caso è manifesto che se la curva debba esser divisa in parti eguali dall'asse X, dovrà quest'asse dividere in parti eguali ciascuna doppia ordinata. L'equazione dovrà dunque rimaner la stessa qualora si cangi y in $-y$; non potrà in conseguenza contener veruna potenza impari di y, come per la stessa ragione non potrà contenere potenze impari di x quando la curva debba esser divisa in mezzo dall'asse Y. Agli assi o diametri che in tal guisa dividon la curva in due parti interamente ed esattamente eguali e simili, e per metà le doppie ordinate, si dà il nome di *diametri ortogonali* o *principali*. Così la parabola, la cui equazione non contiene potenze impari di y, ha un diametro ortogonale che è l'asse delle x.

1037. Nel secondo caso è del pari manifesto che l'equazione non dovrà subir cangiamento alcuno, qualora vi si permutino insieme x ed y in $-x$ e $-y$. Queste coordinate dovran dunque trovarsi in tal modo mescolate fra loro, che o in tutti quanti i termini formino o una dimensione di grado pari, o in tutti quanti una dimensione di grado impari. Infatti nel primo supposto la permutazione simultanea di x, y in $-x$, $-y$ non farà cambiar di segno alcun termine, e lascerà l'equazione nello stato suo primitivo; nel secondo tutti quanti i termini cambieranno di segno, ma se poi lo cangeremo a tutta quanta l'equazione, ciascuno riprenderà

nuovamente quello che gli apparteneva. Niuno dei due assi sarà diametro ortogonale, poichè le parti in cui ciascuno divide la curva non sono tra loro eguali, se non considerate inversamente, nè veruna doppia ordinata è divisa dagli assi per metà. Bensì divise saranno per metà tutte quante le rette, che passando per l'origine A, si stendono da un punto della curva al suo opposto. Infatti supposte eguali e tra loro contrarie di segno le due ascisse AP, Ap, e quindi eguali in virtù dell' ipotesi le loro ordinate parallele PN, pn, se si conduca Nn, i due triangoli che risulteranno da questa costruzione dovranno essere eguali e simili, e quindi dovrà la retta Nn passare per A, e quivi rimaner divisa in due parti eguali. Ciò ha fatto dare il nome di *centro* al punto A.

F. 209

1038. Nel terzo caso l'equazione dovrà rimaner la stessa comunque ci piaccia di cangiare o unitamente o separatamente x in $-x$, ed y in $-y$. Dovrà dunque in un tempo stesso mancare insieme di tutti i termini tanto con x, quanto con y a potenza impari; il che verificandosi, gli assi ortogonali della curva saranno altresì suoi diametri ortogonali, e la curva avrà per centro l'origine A.

1039. Da tutto ciò si apprende 1°. che una curva algebrica avrà un diametro ortogonale, se la sua equazione sia funzione razionale di x ed y^2, o di x^2 ed y e delle respettive loro potenze: tale è il caso della parabola, della cissoide e della concoide; 2°. che avrà due diametri ortogonali, e di più sarà dotata di centro se la sua equazione non contenga che potenze pari di x e di y: tale è il caso dell'ellisse e dell'iperbola; 3°. non avrà diametri ortogonali, ma sarà bensì dotata di centro se la sua equazione contenga x ed y a potenze pari ed impari, ma in modo che le dimensioni formate in ciascun termine da queste variabili sieno o tutte quante di grado pari, o tutte quante di grado impari. Tale sarebbe il caso dell' equazioni $y^5+axy^3+byx^2+cx=0$, $y^4+axy+bx^2+c=0$.

1040. *Secanti rettilinee*. Rapporto alle secanti rettilinee ciò che può maggiormente interessare è la determinazione del numero dei punti, nei quali incontrano o attraversano i diversi rami di una curva data; il che è ben facile a concludersi. Sappiamo infatti che col mezzo delle opportune trasformazioni (903) ogni retta secante può cangiarsi in asse della curva data, e che l'equazione riferita a questo nuovo asse conserva il grado della sua derivatrice. D'altronde la curva non tocca nè attraversa l'asse, se non qualora le sue ordinate si annullano, e perciò tante volte quanti esser possono i valori reali di x che sodisfanno all' equazione $y=0$. Or come questi valori non possono eccedere il grado dell' equazione, concluderemo dunque che una curva dell' ordine m^{simo} non potrà incontrarsi o tagliarsi con una retta che in m punti. Così le rette comecchè linee di prim' ordine (932), non possono incontrarsi o tagliarsi che in un sol punto. Del pari qualunque delle tre sezioni coniche non può aver comuni con una retta più di due punti; dal che particolarmente s'inferisce che se una retta seghi i due rami d'una delle due iperbole opposte, non incontrerà in verun punto i rami dell'altra, e se da un punto dell' una passi ad un punto dell'altra, non incontrerà mai più nè questa nè quella.

1041. *Tangenti.* In ciascuna delle tre sezioni coniche, come pure nel circolo, abbiamo dato il modo di condur la tangente, e ne abbiamo determinato il valore per vie sempre particolari e dipendenti dalle individuali proprietà di ciascuna curva. Il metodo che siamo adesso per dare è generico ed applicabile a qualunque curva.

F. 151 Sia ABC la curva, MT la tangente, l'equazione dell'una $y=\varphi(x)$, $u=az+b$ quella dell'altra (914.4°), riferite ambedue alla stessa origine A, e ai medesimi assi AX, AY. Poichè il punto M di contatto è comune alla curva e alla tangente, si rende primieramente chiaro che per questo punto avremo $u=y$, $z=x$, e quindi $y=ax+b$. Or si prendano sull'asse X le due porzioni piccolissime e tra loro eguali pP, Pp', e da p,p' s'inalzino le pm, $p'm'$ ordinate alla curva, e si protraggano fino all'incontro in n,n' con la tangente. Fatta $p\text{P}=p'\text{P}=\omega$, avremo $pm=\varphi(x+\omega)=$ (439) $\varphi(x)+\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)+\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec.}$; $p'm'=\varphi(x-\omega)=\varphi(x)-\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)-\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec.}$; $pn=a(x+\omega)+b=y+a\omega=\varphi(x)+a\omega$; $p'n'=a(x-\omega)+b=y-a\omega=\varphi(x)-a\omega$. Ma se MT è tangente, i punti n,n' sono al di sopra della curva, e quindi si ha $pn>pm$, $p'n'>p'm'$; sarà dunque

$\varphi(x)+a\omega>\varphi(x)+\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)+\text{ec.}$, d'onde $a>\varphi_1(x)+\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)+\text{ec.}$

$\varphi(x)-a\omega>\varphi(x)-\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)-\text{ec}$; $\qquad a<\varphi_1(x)-\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)-\text{ec.}$

Dunque per il noto principio (808) $a=\varphi_1(x)$; cioè a, o la tangente dell'angolo MTP (914.5°), eguaglia la derivata prima di $\varphi(x)$ (439), o il coefficiente di ω nello sviluppo di $\varphi(x+\omega)$. Trovato perciò con alcuno dei metodi conosciuti questo coefficiente, avremo il valor di a, e quindi quello della suttangente $\text{PT}=\frac{\text{PM}}{tang\,\text{MTP}}=\frac{y}{a}$ d'onde in seguito la sunnormale $\text{PN}=\frac{y^2}{\text{PT}}$, la tangente $\text{MT}=\sqrt{\text{PT}(\text{PT}+\text{PN})}$, e la normale $\text{MN}=\sqrt{\text{PN}(\text{PT}+\text{PN})}$.

1042. Abbiasi per esempio l'equazione alla parabola $y=\sqrt{px}$; sarà $\varphi(x)=\sqrt{px}$, $\varphi(x+\omega)=\sqrt{p(x+\omega)}=(x+\omega)^{\frac{1}{2}}\sqrt{p}=$ (216) $\left\{x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\omega-\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\omega^2+\text{ec.}\right\}\sqrt{p}$, avremo $\varphi_1(x)=a=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$, e di quì $\text{PT}=2y\sqrt{\frac{x}{p}}=2\sqrt{\frac{px^2}{p}}=2x$, $\text{PN}=\frac{y^2}{2x}=\frac{1}{2}p$, come già si trovò (952). Abbiasi l'equazione alla logaritmica (1023)

$y=e^{x:A}$; sarà $\varphi(x+\omega)=e^{(x+\omega):A}=e^{x:A}\times e^{\omega:A}=e^{x:A}\left(1+\frac{1}{A}\omega+\frac{1}{2A^2}\omega^2+\text{ec.}\right)$

(461); d'onde $\varphi_1(x)=a=\frac{1}{A}e^{x:A}$, e quindi $\text{PT}=\frac{y}{a}=A$, come pur si trovò (1024).

1043. Ma sia $y=u+senu$, equazione alla cicloide generata dal circolo del raggio

197 DB=1 (1020). Come u e $senu$, son funzioni dell'ascissa x=BP, potrà porsi $y=\varphi(x)$. Per aver $\varphi_1(x)$ si supponga che col cangiarsi x in $x+\omega$, l'arco u si cangi in $u+\theta$, ed

y divenga y'. Poichè si ha $1-x=\cos u$, sarà $1-(x+\omega)=\cos(u+\theta)=$ (809.3°) $\cos u-\theta \operatorname{sen} u-\frac{\theta^2}{2}\cos u+\frac{\theta^3}{2.3}\operatorname{sen} u+$ec; d' onde $\omega=\theta \operatorname{sen} u+\frac{\theta^2}{2}\cos u-$ec., e invertendo la serie (437) $\theta=\frac{\omega}{\operatorname{sen} u}-\frac{\cos u}{2\operatorname{sen}^3 u}\omega^2-\frac{1+2\cos^2 u}{2.3\operatorname{sen}^5 u}\omega^3-$ ec. Avremo inoltre $y'=u+\theta+\operatorname{sen}(u+\theta)=$ (809.3°) $u+\operatorname{sen} u+\theta(1+\cos u)-$ ec; posto dunque il valor di θ, e arrestandoci alla prima potenza di ω (1041), otterremo per derivata prima di y, $\varphi_1(x)=\frac{1+\cos u}{\operatorname{sen} u}$, e quindi $a=\operatorname{tang}\text{MTP}=\frac{1+\cos u}{\operatorname{sen} u}=\frac{\text{CP}}{\text{OP}}=\operatorname{tang}\text{COP}=\operatorname{tang}\text{OBP}$. Dunque MTP$=$OBP; donde si ha che la tangente MT è parallela alla corda OB del circolo, e quindi con ogni facilità si conduce. Sarà pure la normale MN parallela all' altra corda CO; ed avremo inoltre $\text{PT}=\frac{y}{a}=\frac{y\operatorname{sen} u}{1+\cos u}=\frac{y\sqrt{(2x-x^2)}}{2-x}=\frac{xy}{\sqrt{(2x-x^2)}}=\frac{xy}{\operatorname{sen} u}$, quarta proporzionale dopo OP, PM, PB.

F. 197

1044. Nel ragionamento precedente (1041) abbiamo supposto in generale che la curva volgesse all' asse la sua concavità. Tutto anderebbe nel piede stesso se vi volgesse invece la sua convessità; se non che in questo caso si avrebbe $pn<pm$, $pn'<pm'$. S' incontrerebbe poi del pari $a=\varphi_1(x)$. Frattanto nella prima ipotesi abbiamo $a<\varphi_1(x)-\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)-$ec.(1041), e nella seconda si trova $a>\varphi_1(x)-\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)-$ec., se dunque $a=\varphi_1(x)$ dovrà aversi $0<-\varphi_2(x)+\omega\varphi_3(x)-$ec. nell'una, e $0>-\varphi_2(x)+\omega\varphi_3(x)-$ec. nell' altra. Or poichè il valor di ω è arbitrario, e si può prender tale che il termine $\varphi_2(x)$ superi la somma di tutti i rimanenti (807), è chiaro che la prima ineguaglianza non potrà sussistere, nè perciò la curva potrà rivolger la concavità all'asse, se $\varphi_2(x)$, o la derivata seconda di $\varphi(x+\omega)$ non sia negativa, come non potrà sussister l' altra se $\varphi_2(x)$ non sia positiva. Da questo criterio ravviseremo dunque se la curva rivolge all' asse la sua concavità, o la sua convessità. Così nella parabola, in cui per l' asse principale si ha $y=\sqrt{px}$, si trova per derivata seconda di $\sqrt{p(x+\omega)}$, $\varphi_2(x)=-\frac{1}{8x}\sqrt{\frac{p}{x}}$ (1042) negativa, mentre nella logaritmica si ha $\varphi_2(x)=\frac{1}{2A^2}e^{x:A}$ (*ivi*) positiva. Dunque la parabola volge all' asse la sua concavità, e la logaritmica la sua convessità.

1045. Passiamo adesso a supporre che $y=\varphi(x)$ sia un'equazione polare (902), e in conseguenza l' ordinata y un raggio vettore CM, ed x l' arco che nel circolo del raggio 1 misura l' angolo direttore TCM. In tal caso se si supponga la curva concava verso l'asse, condotte e prolungate fino all' incontro in n, n' con la tangente TM le ordinate Cm, Cm', in modo che l'una e l'altra facciano con CM uno stesso e piccolo angolo ω, è chiaro che saranno $Cn>Cm$, $Cn'>Cm'$. Ora poichè TCM$=x$ dà TC$n=x-\omega$, TC$n'=x+\omega$, primieramente dall'equazione della curva si avrà $Cm=\varphi(x-\omega)$, $Cm'=\varphi(x+\omega)$; ed in oltre, chiamato θ l' angolo TMC, i triangoli nCM, MCn' da-

210

F. 210 ranno (839) $Cn = \frac{y sen\theta}{sen(\theta+\omega)}$, $Cn' = \frac{y sen\theta}{sen(\theta-\omega)}$; dovrà dunque aversi $\frac{y sen\theta}{sen(\theta+\omega)} > \varphi(x-\omega)$, $\frac{y sen\theta}{sen(\theta-\omega)} > \varphi(x+\omega)$, d'onde, posto il valor di $y=\varphi(x)$, $sen\theta.\varphi(x) > sen(\theta+\omega)\varphi(x-\omega)$, e $sen\theta.\varphi(x) > sen(\theta-\omega)\varphi(x+\omega)$, ossia (809.3°.439),

$$sen\theta.\varphi(x) > (sen\theta+\omega cos\theta-\frac{\omega^2}{2}sen\theta-\text{ec.})(\varphi(x)-\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)-\text{ec.})$$

$$sen\theta.\varphi(x) > (sen\theta-\omega cos\theta-\frac{\omega^2}{2}sen\theta+\text{ec.})(\varphi(x)+\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)+\text{ec.}),$$

cioè sviluppando, ordinando per ω e riducendo

$$0 > (cos\theta.\varphi(x)-sen\theta.\varphi_1(x))-\frac{1}{2}\omega(sen\theta.\varphi(x)+2cos\theta.\varphi_1(x)-2sen\theta.\varphi_2(x))+\text{ec.}$$

$$0 < (cos\theta.\varphi(x)-sen\theta.\varphi_1(x))+\frac{1}{2}\omega(sen\theta.\varphi(x)+2cos\theta.\varphi_1(x)-2sen\theta.\varphi_2(x))-\text{ec.}$$

Dunque per il solito principio (808) $cos\theta.\varphi(x)-sen\theta.\varphi_1(x)=0$; e quindi $tang\theta = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)} = \frac{y}{\varphi_1(x)}$, d'onde facilmente il valor di $CT = (839) \frac{y sen\theta}{sen(\theta+x)} = \frac{y tang\theta}{tang\theta cos x + sen x} = \frac{y^2}{y cos x + \varphi_1(x) sen x}$, da cui potremo al solito (1041) concluder quelli di MT, CN, MN.

199 1046. Nelle spirali, ove TCM=90° (1026), e quindi $CT = y tang\theta$, si avrà dunque $CT = \frac{y^2}{\varphi_1(x)}$, $MT = \frac{y}{\varphi_1(x)} \sqrt{((\varphi_1 x)^2+y^2)}$, $CN = \varphi_1(x)$, e finalmente $MN = \sqrt{((\varphi_1 x)^2+y^2)}$. Così nella spirale d'Archimede, ove $y=\varphi(x)=\frac{ax}{2\pi}$ (1027), e quindi $\varphi_1(x)=\frac{a}{2\pi}$, sarà $CT = \frac{2\pi y^2}{a} = y \times \frac{2\pi y}{a} = yx$, valore della lunghezza lineare dell'arco x=MQ che misura l'angolo QCM nel circolo del raggio $CM=y$ (678); e se la tangente sia condotta al punto A, avremo $y=a$, e $CT=2a\pi$ lunghezza lineare di tutta intera la circonferenza ALBD. Potrà ancora osservarsi che $tang\, CMT = tang\theta = \frac{y}{\varphi_1(x)} = \frac{2\pi y}{a} = x$, arco che misura l'angolo MCQ nel circolo del raggio 1.

Nella spirale parabolica, ove $y^2=px$ (1028), avremo (1042) $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{x}}$, e $CT = 2px\sqrt{\frac{x}{p}} = 2x\sqrt{px} = 2xy = 2.arc.MQ$.

Nella spirale iperbolica ove $y=\frac{ab}{x}$ (1029), poichè si trova $\varphi_1(x) = -\frac{ab}{x^2}$ sarà $CT = -\frac{a^2b^2}{x^2} \times \frac{x^2}{ab} = -ab$, cioè questa curva ha come la logaritmica (1024) costanti tutte le sue suttangenti.

1047. Il valor generico di $tang\theta = \frac{\varphi(x)}{\varphi_1(x)}$ (1045) ci dà campo di trovar l'equazio-

F.202

ne della spirale logaritmica (1030). Si faccia $tang\theta = c$, quantità costante per condizione della curva (*ivi*), e si supponga $y = \varphi(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ ec. la richiesta equazione; sarà $\varphi_1(x) = B + 2Cx + 3Dx^2 +$ec., e perciò $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 +$ec. $=$ $(B + 2Cx + 3Dx^2 +$ec$)c$; di quì applicato il noto metodo (419) dedurremo facilmente $B = \frac{A}{c}$, $C = \frac{A}{2c^2}$, $D = \frac{A}{2.3c^3}$, ec., onde $y = A\left(1 + \frac{x}{c} + \frac{x^2}{2c^2} + \frac{x^3}{2.3c^3} + \text{ec}\right) = \ldots\ldots$ (461) $Ae^{x:c}$ equazione cercata, che non in altro differisce dalla logaritmica comune (1023), se non perchè ambedue i termini dell' esponente son quì funzioni circolari. Se ne deduce frattanto 1°. che questa spirale fa un' infinità di giri intorno al centro, sia per discostarsene, sia per accostarvisi, senza però potervi mai giungere; infatti comunque si cangi x in $x + \pi$, $x + 2\pi$, $x + 3\pi$, ec, ovvero in $-x$, $-x - \pi$, $-x - 2\pi$, ec, y risulta sempre reale. 2°. Che in A, ove $x = 0$, si ha CD$= y = A$.

211

1048. ***Punti d' inflessione.*** Nei punti d' inflessione (930) la tangente attraversa per condizione necessaria la curva; e se questa dopo aver rivolto all' asse la sua concavità, passi a rivolgergli la sua convessità, dovrà aversi $pn > pm$, $p'n' < p'm'$, mentre nel caso opposto sarà $pn < pm$, $p'n' > p'm'$. Posti dunque per le quattro ordinate i precedenti loro valori (1041), e riflettendo che per natura della tangente deve aversi $a = \varphi_1(x)$ (*ivi*), fatte tutte le riduzioni, la prima ipotesi darà

$0 > \varphi_2(x) + \omega\varphi_3(x) + \omega^2\varphi_4(x) +$ec. ; la seconda $0 < \varphi_2(x) + \omega\varphi_3(x) + \omega^2\varphi_4(x) +$ec.
$0 < \varphi_2(x) - \omega\varphi_3(x) + \omega^2\varphi_4(x) -$ec. $\qquad 0 > \varphi_2(x) - \omega\varphi_3(x) + \omega^2\varphi_4(x) -$ec

In forza del noto principio (808) sarà dunque in ambedue i casi $\varphi_2(x) = 0$, equazione che dovrà perciò sempre verificarsi, e quindi dare per x dei valori reali, qualunque volta abbia luogo nella curva una o più inflessioni dell' un genere o dell' altro. E se per ogni valore di x si prenderà sull' asse delle x un' ascissa equivalente, e in seguito si eleveranno le respettive ordinate, l' incontro di esse con la curva determinerà i punti del flesso. I valori poi di x sostituiti nell' equazione $y = \varphi(x)$ daranno quelli delle ordinate che salgono o discendono ai flessi.

1049. Quanto al modo di distinguere il genere d' inflessione osserveremo che con $\varphi_2(x) = 0$, la seconda delle due ineguaglianze spettanti al genere primo si cangia in $0 > \varphi_3(x) - \omega\varphi_4(x) +$ec., e la seconda delle due spettanti al secondo si cangia in $0 <$ $\varphi_3(x) - \omega\varphi_4(x) +$ec. Ora è chiaro che siccome può darsi ad ω un tal valore, che il primo termine $\varphi_3(x)$ superi in valore la somma di tutti i susseguenti (807), nè quella potrà verificarsi se $\varphi_3(x)$ sia positiva, nè questa se $\varphi_3(x)$ sia negativa. Avremo dunque inflessioni del genere primo per tutti quei valori di x, che soddisfacendo all' equazione $\varphi_2(x) = 0$, e introdotti in $\varphi_3(x)$ rendono questa derivata negativa, ed avremo un' inflessione del genere secondo per quelli che la rendono positiva.

1050. Sia per esempio la curva dell' equazione $y = 1 + senx$. Poichè (809.3°) $sen(x + \omega) = senx + \omega cosx - \frac{\omega^2}{2} senx - \frac{\omega^3}{2.3} cosx +$ec., sarà $\varphi_2(x) = -\frac{1}{2} senx$, $\varphi_3(x) =$

$-\frac{4}{2.3}\cos x$. La derivata $\varphi_2(x)$ eguagliata a zero dà $x=n\pi$ (794.72ª), cioè successivamente $x=0,=\pi,=2\pi,=3\pi$, ec., infiniti valori, che posti in $\varphi_3(x)$ rendono questa derivata alternativamente negativa e positiva. La curva dunque avrà un'infinità d'inflessioni del primo genere corrispondenti alle ascisse $x=0,=2\pi,=4\pi$, ec. ed altrettante del secondo corrispondenti alle ascisse $x=\pi,=3\pi,=5\pi$, ec. Tutti questi punti poi saranno ad egual distanza dall'asse, ed avranno per ordinata $y=1$, onde la curva anderà serpeggiando come vedesi nella figura.

F. 212

1051. Può accadere che i valori di x tratti dall'equazione $\varphi_2(x)=0$ annullino la derivata $\varphi_3(x)$. Questo caso, in luogo di toglierci, come sembra, il mezzo di distinguer l'una dall'altra inflessione, ci rende anzi avvertiti che non ha allora luogo inflessione di sorta alcuna, a meno che contemporaneamente non si annulli $\varphi_4(x)$. Infatti i due primitivi sistemi d'ineguaglianza (1048) darebbero allora $0>\varphi_4(x)+\omega\varphi_5(x)+$ec. e $0<\varphi_4(x)-\omega\varphi_5(x)+$ec. per le inflessioni di primo genere; $0<\varphi_4(x)+\omega\varphi_5(x)+$ec. e $0>\varphi_4(x)-\omega\varphi_5(x)+$ec. per quelle di secondo, con manifesta contradizione sì per l'un caso che per l'altro. Ed è poi chiaro che se $\varphi_4(x)=0$, la contradizione svanisce; ma siccome essa unicamente dipende dal trovarsi $\varphi_4(x)$ con un medesimo segno in tutte le ineguaglianze, così di nuovo ricomparirà se con $\varphi_4(x)=0$ sia $\varphi_5(x)=0$ e non $\varphi_6(x)=0$, se con $\varphi_6(x)=0$ sia $\varphi_7(x)=0$ e non $\varphi_8(x)=0$, ec. In generale, se si abbiano inflessioni, è necessario che l'equazione $\varphi_2(x)=0$ dia valori reali per x, e che questi introdotti nelle derivate seguenti, o non ne annullino veruna, o le annullino in numero pari.

1052. *Ordinate massime e minime.* Si chiamano massime o minime quelle ordinate che sono maggiori o minori di tutte le precedenti e seguenti comprese o fra due successive ed opposte inflessioni, o fra due successivi tragitti della curva per l'asse. Dovrà dunque insieme aversi $PM>pm$, e $PM>p'm'$, se PM sia massima, e $PM<pm$, $PM<p'm'$ se PM sia minima; e quindi nella prima ipotesi

213

$$\varphi(x)>\varphi(x)+\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)+\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec. ossia } 0>\varphi_1(x)+\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)+\text{ec}.$$
$$\varphi(x)>\varphi(x)-\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)-\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec.} \qquad 0<\varphi_1(x)-\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)-\text{ec}.$$

e nella seconda

$$\varphi(x)<\varphi(x)+\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)+\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec. ossia } 0<\varphi_1(x)+\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)+\text{ec}.$$
$$\varphi(x)<\varphi(x)-\omega\varphi_1(x)+\omega^2\varphi_2(x)-\omega^3\varphi_3(x)+\text{ec.} \qquad 0>\varphi_1(x)-\omega\varphi_2(x)+\omega^2\varphi_3(x)-\text{ec}.$$

Il solito principio darà dunque per l'un caso e per l'altro $\varphi_1(x)=0$; se perciò han luogo nella curva una o più ordinate massime o minime, i valori dell'ascisse corrispondenti dovran trovarsi fra le radici dell'equazione $\varphi_1(x)=0$, e questi introdotti nell'equazione della curva daranno quelli delle richieste massime o minime ordinate. Per distinguer l'une dall'altre, applicato il raziocinio precedente (1049), si troverà che avremo ordinate massime se i valori reali di x dati da $\varphi_1(x)=0$, sostituiti in $\varphi_2(x)$ rendono negativa questa seconda derivata; avremo poi ordinate minime nel caso opposto. Che se con questi valori risulterà $\varphi_2(x)=0$, non avremo ordinata massima, nè minima, se pure non risulti inoltre $\varphi_3(x)=0$, ec.

Es. Si cerchi la massima o minima ordinata nella curva dell' equazione $y=bx-x^2$. Posto $x+\omega$ in luogo di x, troveremo $\varphi_1(x)=b-2x$, $\varphi_2(x)=-1$. Da $b-2x=0$ si ha $x=\frac{1}{2}b$; valore che introdotto in quello di y darà $y=\frac{1}{4}b^2$, ordinata massima, perchè $\varphi_2(x)$ è negativa. Del resto il Calcolo differenziale facilitando immensamente, siccome vedremo, la ricerca delle derivate, rende altrettanto facile la soluzione dei quesiti tanto di questo genere che dei due precedenti.

1053. *Parametri.* Già si è detto (1032) che sotto il nome generico di parametro intendonsi tutte le linee costanti, che accompagnano sotto la forma di coefficienti le coordinate dell' equazione, e riducon queste alla necessaria omogeneità. Ora è chiaro che mentre i valori delle coordinate x, y variano l' uno con l' altro, da uno ad un altro punto della curva, i parametri conservan sempre lo stesso valore, e ciò finchè la curva si mantiene identicamente e per ogni guisa la stessa. Non così se da una curva si passi ad un' altra della medesima specie, purchè di dimensioni diverse, o se si cangino gli assi, o se restando fermi gli assi si cangi la posizione della curva. In tutti questi casi i parametri, dai quali appunto e le dimensioni e la posizione delle linee unicamente dipendono, cangiano o tutti o in parte di valore, ne acquistano uno novello proporzionale al primitivo, se dalla curva data si fa passaggio ad una curva simile (1032) ed egualmente situata; comunque diverso se dalla curva data si passa ad una curva affine, o se si cangi la posizione della curva rapporto agli assi, o quella degli assi rapporto alla curva. Da ciò deriva che quando la curva è data, sia di dimensione, sia di posizione, o quando si cercano le proprietà di una curva di specie e d' equazione data, astraendo affatto dalla sua posizione e dalle sue dimensioni, i parametri sono allora, o si suppongono noti, o, salvi i rapporti che alcuni di essi debbono per legge della curva aver talvolta fra loro, possono stabilirsi ad arbitrio; dal che il nome di *costanti arbitrarie* con cui frequentemente si appellano. Ma se supponendosi in tutto e per tutto nota la curva, si cercano le dimensioni e la posizione che debbon darlesi, affinchè soddisfaccia a delle condizioni assegnate, come sarebbero a quelle di passar per dati punti, di esser tangente a curve o a rette date, ec., allora i parametri sono altrettante incognite da determinarsi coerentemente alle condizioni volute, le quali però come è ben chiaro non potranno mai superare in numero le costanti dell' equazione. A mostrare frattanto come dobbiamo condurci in queste ricerche bastino i seguenti esempj, che hanno inoltre il vantaggio di palesare importantissime relazioni.

1054. Vogliasi l' equazione di una retta obbligata a passare per due punti dati B, C. Sieno x', y' le coordinate del punto B, x'', y'' quelle del punto C, che debbon supporsi note appena che i punti son dati (899); e sia $y=ax+b$ l' equazione cercata; dovran dunque determinarsi a, b. Or poichè i due punti appartengono necessariamente alla retta che passar deve per l' uno e per l' altro, sussisterà tra le loro respettive coordinate la stessa equazione di rapporto che sussiste tra quelle di ciascun altro punto di questa retta. Avremo dunque $y'=ax'+b$, $y''=ax''+b$. Di qui F. 214

F. 214 $a=\frac{y'-y''}{x'-x''}$ e $b=\frac{x'y''-x''y'}{x'-x''}$, valori che sostituiti in $y=ax+b$, daranno per l' equazione cercata $y(x'-x'')-x(y'-y'')=x'y''-x''y'$.

1055. Si noti 1°. che se fosse stato dato un sol punto per cui dovesse passar la retta cercata, non avremmo potuto instituire che la sola equazione $y'=ax'+b$, dalla quale tratto il valor di $b=y'-ax'$, e sostituitolo nell' equazione generale, si avrebbe avuto $y-y'=a(x-x')$, equazione che contenendo l' indeterminata a, mostra come infinite possono esser le rette sottoposte a passare per un punto dato; 2°. se uno dei punti, per esempio B cada sull' asse X, avremo $y'=0$, e l' equazione della retta diverrà $y(x'-x'')=y''(x'-x)$; se cada sull' asse Y avremo $x'=0$, e l' equazione diverrà $x''(y-y')=x(y''-y')$; se poi cada nell' origine A, avremo $x'=y'=0$, e per equazione $yx''=xy''$; 3°. se la retta sia tutta compresa tra i due punti B,C, chiamata r la lunghezza BC, e condotte BD, CD respettivamente parallele ai due assi, avremo $BD=x''-x'$, $CD=y''-y'$, e quindi $BC=r=\sqrt{((x''-x')^2+(y''-y')^2)}$, espressione che denoterà pure la distanza fra due punti situati nel piano delle $x\,y$, e aventi per coordinate l' uno x',y', l' altro x'',y''.

1056. Vogliasi l' equazione di una retta che da un punto dato scenda perpendicolarmente sopra una retta data di posizione. Sieno x', y' le coordinate del punto dato, $y=a'x+b'$ l' equazione della retta data, $y=ax+b$ quella della retta cercata. Saranno cognite x',y' come pure a' e b'. Inoltre poichè il punto dato appartiene alla retta cercata che ne discende, avremo 1ª. $y'=ax'+b$. Di più poichè la retta cercata deve esser normale alla data, l' angolo che l' asse X fa con quella supererà di 90° l' angolo ω che fa con questa, e sarà di $90°+\omega$. Dunque 2ª. $a=(914.5°)\,tang(90°+\omega)=-cot\omega=-\frac{1}{a'}$ valore che sostituito nella 1ª. e nell' equazione generale, darà facilmente per la cercata $y-y'=-\frac{1}{a'}(x-x')$. E quì pure si noterà che qualora il punto di partenza della perpendicolare non fosse stato assegnato, non si sarebbe ottenuta che la sola equazione $a=-\frac{1}{a'}$, ossia $aa'+1=0$, che contien dunque la condizione necessaria perchè l'equazioni $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ appartengano a due rette reciprocamente normali tra loro.

1057. Supponendo di nuovo dato il punto di partenza della perpendicolare, potranno anche trovarsi facilmente l' equazioni del punto ove essa incontra la data. Questo infatti deve appartenere in comune alle due rette. Rappresentando dunque in particolare con x,y le sue coordinate, dovrà rapporto ad esse verificarsi tanto l'equazione $y=a'x+b'$ della retta data, quanto l'altra $y-y'=-\frac{1}{a'}(x-x')$ della perpendicolare trovata. Di quì $y=\frac{a'(a'y'+x')+b'}{1+a'^2}$, $x=\frac{a'(y'-b')+x'}{1+a'^2}$, equazioni richieste. E se questi valori di x,y si pongano in luogo di x'',y'' in $r=\sqrt{((x''-x')^2+}$

$(y''-y')^2)$, r rappresenterà allora la distanza del punto dato al punto d'incontro, o la lunghezza della normale. Avremo frattanto $x''-x'=\frac{a'(y'-b'-a'x')}{a'^2+1}$, $y''-y'=\frac{-(y'-b'-a'x')}{a'^2+1}$, e quindi $r=\frac{y'-b'-a'x'}{\sqrt{(a'^2+1)}}$.

1058. Si cerchi l'equazione di una retta che debba passare per un punto dato parallelamente ad una retta data. Ritenute le superiori denominazioni (1056) avremo primieramente $y'=ax'+b$. Di più la condizione del parallelismo darà (914.6°) $a=a'$. Dunque (1055) $y-y'=a'(x-x')$.

1059. Vogliasi infine l'equazione di una retta r che partendo da un punto dato incontri una retta r' parimente data, sotto l'angolo rr' (903). Sieno G, DC il punto e la retta data; si supponga GL la cercata, e si ponga $tang rr'=a''$. Avremo come sopra $y'=ax'+b$, d'onde $b=y'-ax'$. Avremo inoltre $a=tang\,\mathrm{MLX}$(914.5°)$=tang(\mathrm{MDL}+\mathrm{DML})$(789.40°) $\frac{tang\,\mathrm{MDL}+tang\,\mathrm{DML}}{1-tang\,\mathrm{MDL}\,tang\,\mathrm{DML}}=\frac{a'+a''}{1-a'a''}$; e quindi per l'equazione cercata $y-y'=\frac{a'+a''}{1-a'a''}(x-x')$. E qui pure si noterà che se il punto di partenza non fosse stato assegnato, sarebbe mancato il mezzo di determinar b, e avremmo avuta per equazione $y=\frac{a'+a''}{1-a'a''}x+b$, spettante in comune a tutte quante le rette parallele inclinate sulla retta DC sotto uno stesso angolo GMC. Perciò l'equazione $a=\frac{a'+a''}{1-a'a''}$, o l'altra identica $a-a'-a''=a\,a'a''$ contiene la condizione analitica, posta la quale, due rette qualunque dell'equazioni $y=ax+b$, $y=a'x+b'$ formeranno tra loro l'angolo che ha per tangente a''.

F. 215

1060. Si osservi 1°. che dall'ultima equazione avendosi $a''=\frac{a-a'}{1+a\,a'}$, perciò 1°. se l'angolo dato sia retto e quindi $a''=\infty$ (781.4°), dovrà aversi $a\,a'+1=0$, come pur vedemmo di sopra (1056). Si troverà egualmente $a\,a''+1=0$ ed $a'a''+1=0$ nei casi che o l'una o l'altra delle due rette sieno normali all'asse X, e quindi infinita la tangente a', o la tangente a (781.4°). 2°. Che se le due rette son date per mezzo delle loro equazioni $y=ax+b$, $y=a'x+b'$, e se ne voglia l'angolo rr', l'equazione $a-a'-a''=a\,a'a''$ darà immediatamente $a''=tang rr'=\frac{a-a'}{1+aa'}$, dalla quale con tutta facilità potremo anche dedurre $sen rr'=$(787.9°)$\frac{a-a'}{\sqrt{(1+a^2)(1+a'^2)}}$. 3°. Volendo infine determinare il punto d'incontro, supposte x'', y'' le sue coordinate, osserveremo al solito che il punto spettando insieme all'una e all'altra retta, debbono rapporto ad esso sussistere le due equazioni $y''=ax''+b$, $y''=a'x''+b'$, le quali ci daranno dunque per equazioni del punto (899) $x''=\frac{b'-b}{a-a'}$, $y''=\frac{ab'-a'b}{a-a'}$.

1061. Vogliasi l'equazione di una retta che sia tangente in un punto dato ad una

curva dell'equazione $y=\varphi(x)$. Supposta $y=ax+b$ l'equazione cercata, ed x', y' le coordinate del punto di contatto, siccome è questo un punto per cui deve passar la retta, così avremo (1055) $y-y'=a(x-x')$, e poichè $a=\varphi_1(x)$(1041), sarà dunque $y-y'=(x-x')\varphi_1(x)$. Quindi se la curva data è un circolo dell'equazione $y=\sqrt{(r^2-x^2)}$ per cui si trova $\varphi_1(x)=-\frac{x}{\sqrt{(r^2-x^2)}}=-\frac{x}{y}$, la tangente avrà per equazione $yy'+xx'=r^2$.

1062. Si cerchi adesso l'equazione di un circolo che debba passare per tre punti dati B, C,D. Se la posizione degli assi è data, e suppongansi x', y', x'', y'', x''', y''' le coordinate che vi riferiscono i tre dati punti, queste sostituite nell'equazione generale del circolo (911) $(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2$ daranno luogo a tre equazioni, per mezzo delle quali potremo determinare il raggio r, ed α, β coordinate del centro. Ma se possiamo disporre gli assi comunque, si ponga la nuova origine sul punto delle coordinate x''', y''', e si faccia passar l'asse X per quello delle coordinate x'', y''; avremo $x'''=y'''=y''=0$, e le tre equazioni diverranno $(y'-\beta)^2+(x'-\alpha)^2=r^2$, $\beta^2+(x''-\alpha)^2=r^2$, $\beta^2+\alpha^2=r^2$. Eliminando r, dalla 2ª. e 3ª. avremo $\alpha=\frac{1}{2}x''$, dalla 1ª. e 2ª. $\beta=\frac{y'^2+x'^2-x'x''}{2y'}$, dopo di che la 3ª. darà $r=\frac{1}{2y'}\sqrt{((y'^2+x'^2-x'x'')^2+x''^2y'^2)}$.

1063. Si osservi 1°. che se $y'=0$, nel qual caso i tre punti sarebbero tutti sull' asse X, e quindi in linea retta tra loro, r risulterebbe infinita, ed il cerchio indescrivibile; 2°. se i punti dati sieno due soli, mancherà una delle tre equazioni, e quindi rimarrà arbitrario uno qualunque dei tre parametri, onde infiniti saranno i circoli che posson farsi passare per due dati punti. Per altro siccome allora dalle due equazioni residue si trae l'altra $2\beta(y'-y'')+2\alpha(x'-x'')=y'^2-y''^2+x'^2-x''^2$ del primo grado rapporto alle due coordinate α, e β del centro, così i centri di tutti i circoli che passano per due punti dati si trovano tutti in una stessa linea retta (913). È poi chiaro all'incontro che se uno dei parametri è dato, come per esempio, se la lunghezza del raggio fosse determinata, la terza equazione non potrebbe rimaner soddisfatta dai valori di α, β che soddisfanno alle altre due, e quindi il circolo non potrebbe farsi passare che per due punti.

F. 216 1064. Vogliasi infine far passare una Sezione conica per cinque punti dati A, C, D, B, E. Per due di questi punti conduco AB, e dagli altri punti le perpendicolari CF, DH, EG sopra di essa; e poi suppongo che l'equazione della sezione conica cercata sia $y^2+bxy+cx^2+dx+fy+g=0$, e fo AF$=p$, FC$=q$, AG$=p'$, GE$=q'$, AH$=p''$, DH$=q''$, AB$=p'''$. Quando $x=0$ sarà $y=0$, onde $g=0$, e però l'equazione si riduce ad $y^2+bxy+cx^2+dx+fy=0$. Quindi secondo che $x=p, =p', =p'', =p'''$, si ha $y=q, =-q', =q'', =0$: sicchè si hanno le quattro equazioni $q^2+bpq+cp^2+dp+fq=0$, $q'q'-bp'q'+cp'p'+dp'-fq'=0$, $q''q''+bp''q''+cp''p''+dp''+fq''=0$, $cp'''p'''+dp'''=0$, da cui si avranno i valori di b, c, d, f, che sostituiti nell'equazione supposta daranno quella della curva cercata.

In simil guisa, per dirlo qui di passaggio, date più quantità a, a', a'', ec. b, b', b'' ec. respettivamente legate fra loro con rapporti ineguali, potremo trovar la legge che tutte le riunisca sotto un rapporto comune. A tal effetto consideriamole come coordinate di una curva ignota dell'equazione $y = A + Bx + Cx^2 +$ ec. Se col metodo che sopra si trovino i valori dei coefficienti A, B, C, ec. è chiaro che l'equazione per tal via pienamente determinata darà il rapporto cercato; come pure che lo stesso rapporto si estenderà fra qualunque altro valore piacerà dare ad x e quello che ne risulterà per y. Con che potremo interpolare fra le date qualsivoglia numero di quantità.

Problemi indeterminati del secondo grado

1065. Si chiamano così quei problemi geometrici i quali han per oggetto di trovar la curva o luogo geometrico (909. 2.°) a cui appartiene una data proprietà esprimibile per mezzo d'un'equazione indeterminata di secondo grado. È chiaro che la curva richiesta non potrà essere che una sezione conica (943) facile a determinarsi con le regole esposte. Eccone degli esempj.

I. Dati i due punti A, B, trovare il luogo di tutti i punti M tali che l'angolo AMB sia sempre lo stesso. Condotta MP normale ad AB, sia $AP = x$, $PM = y$, $AB = m$, $tang AMB = t$; avremo (846) $tang AMP = \frac{x}{y}$, e $tang BMP = \frac{m-x}{y}$. Dunque (789. 10.ª) $t = \frac{my}{y^2 - mx + x^2}$; il che dà $y^2 + x^2 - \frac{my}{t} - mx = 0$ equazione ad un circolo (912). Volendo descriverlo basterà trovarne il raggio a e le coordinate α, 6 del centro. Ora avendosi quì $b = 0$, $d = -\frac{m}{t}$, $f = -m$, $g = 0$, sarà (*ivi* 2.ª 3.ª 4.ª) $6 = \frac{m}{2t}$, $\alpha = \frac{m}{2}$, $a^2 = \alpha^2 + 6^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{m^2}{4t^2}$. Alzata dunque sulla metà di AB la normale $FE = \frac{m}{2t}$, saranno E il centro, ed AE il raggio del circolo cercato. Ed infatti le corde AM, BM, formano l'angolo inscritto AMB eguale all'angolo centrale AEF, il quale d'altronde eguaglia il dato, come è facile concludere, qualora si osservi che $sen AEF : cos AEF :: AF : FE :: t : 1$, d'onde $tang AEF = t$.

II. Data la retta AB, e il circolo TGD col centro in C trovare il luogo M dei centri di tutti i circoli tangenti al dato ed alla retta AB. Condotte da C la CM, e la CA normale ad AB, e da M le ME, MP normali l'una ad AB, l'altra a CA, si ponga $CA = b$, $AP = x$, $PM = y$, e $CG = r$. Sarà $MG = ME = x$, $MC = r + x$, $PC = b - x$, e il triangolo rettangolo MPC darà $(r+x)^2 = y^2 + (b-x)^2$, cioè $y^2 - 2x(b+r) + b^2 - r^2 = 0$, equazione trasformata alla parabola (939), cogli assi X, Y, o meglio X', Y' per costruzione ortogonali, e nella quale 1.ª $A = \frac{2p'}{q'} = 0$, 2.ª $C = \frac{26}{q'} - \frac{aq}{q'^2} = 0$, 3.ª $D = \frac{26p' - ap}{q'^2} = -2(b+r)$, 4.ª $F = \frac{6^2 - a\alpha}{q'^2} = b^2 - r^2$. La 1.ª mostra paralleli gli assi X, X' (941), e per

Fig. 218

219

Fig. 219 conseguenza anco gli assi Y, Y'; quindi (939) $p=1, p'=0, q=0, q'=1$. La 2.ª darà dunque $6=0$, cioè l'asse principale X coinciderà coll'asse X', ossia colla retta AC, e la parabola avrà quindi il suo vertice in un punto di questa retta; la 3.ª darà il parametro $a=2(b+r)$; la 4.ª finalmente darà per l'ascissa che riferisce l'origine A al vertice della curva $\alpha=-\frac{1}{2}(b-r)=-\frac{1}{2}$AF, quantità che essendo negativa, mostra come A si trova alla sinistra del vertice, il quale dunque caderà nel punto V preso sulla metà di AF. Sarà poi facile il vedere come il fuoco e la direttrice che debbono trovarsi ambedue distanti dal vertice di una quarta parte del parametro (946, 949), ossia di $\frac{1}{2}(b+r)$, cadranno l'uno sul centro C del circolo dato, l'altra in H ad una distanza AH$=r$, dall'origine A. Questa osservazione verifica la soluzione del problema. Infatti condotto il raggio vettore CM, e da M la normale MQ sulla direttrice, avremo (949) MQ=CM; e poichè EQ=AH$=r=$CF sarà dunque ME=MG come esige la condizione del quesito.

220 III. Sulle rette ad angolo AB, BC sieno prese le porzioni qualunque AP, BE nel rapporto fra loro di $1:m$. Si unisca quindi A con E, e da P si conduca parallelamente a BC la PM che incontri in M la retta AE. Si cerca il luogo del punto M.

Fatta AP$=x$, PM$=y$, AB$=a$, avremo $x:y::a:$BE$::a:mx$. Dunque $x^2=ay:m$ equazione alla parabola (941. 955).

221 IV. Abbiasi il semicircolo AGQ inclinato di un angolo qualunque θ sopra il piano AQRS, e da ogni punto della circonferenza sia calata sul piano una normale. Determinar la curva che le normali descriveranno sul piano.

Condotte PG, PM normalmente al diametro AQ, intersezione comune del semicircolo e del piano, fatta AP$=x$, PM$=y$, e supposto 1 il raggio del dato semicircolo, il triangolo GPM rettangolo in M, e in cui l'angolo GPM$=\theta$ (701), darà $y^2=cos^2\theta\times$PG$^2=$ (910) $cos^2\theta(2x-x^2)$, equazione all'ellisse (942).

222 V. Supposta AB perpendicolare al piano MPB, e condotta sul piano per B la retta PB, e da qualunque punto P di questa la PM normale a PB, determinare sopra PM un tal punto M, che l'angolo MAP sia eguale ad un angolo dato Φ.

Fatta AB$=a$, BP$=x$, PM$=y$, i triangoli ABP rettangolo in B (693) ed MPA rettangolo in P (704) daranno $x^2=y^2cot^2\Phi-a^2$, equazione all'iperbola (942).

223 VI. La data retta DE si muova nell'angolo BCA in modo che due suoi punti qualunque A e B stiano sempre sui lati dell'angolo dato: cerco la curva descritta da un dato punto M di AB. Condotta PM parallela ad AC, sia CP$=x$, PM$=y$, AM$=m$, BM$=n$, cosACB$=cos$MPB$=c$: avrò BP$=nx:m$, e il triangolo MPB darà (845)

$y^2-\frac{2ncxy}{m}+\frac{n^2x^2}{m^2}-n^2=0$, equazione all'ellisse, poichè $c<1$ dà $\frac{n^2}{m^2}>\frac{n^2c^2}{m^2}$ (942). Se l'angolo ACB sia retto, l'equazione diventerà $y^2=\frac{n^2}{m^2}(m^2-x^2)$, e apparterrà a un'ellisse dei semiassi m, n. Quindi dati gli assi potrà descriversi l'ellisse; essendo il maggiore $2a$, il minore $2b$, prendo AM$=a$, MB$=b$, e muovo AB tra i lati d'una squadra; il punto M descriverà il quarto dell'ellisse richiesta.

VII. S' immagini che la squadra NMK sia fatta strisciare coi suoi lati NM, MK sul perimetro di una parabola qualunque NAK. Cerco il luogo di tutti i punti per i quali anderà scorrendo il vertice M. Condotta MP, KL, NQ normale all' asse AQ, sia $AP=x$, $PM=y$, $NQ=z$, $KL=u$, sarà $AQ=AT(952)=\frac{z^2}{p}$, $AL=AS=\frac{u^2}{p}$. Dai triangoli simili TPM, TQN, ed SPM, SLK avremo le proporzioni I^a. $\frac{2z^2}{p}:z::\frac{z^2}{p}-x:y$; II^a. $\frac{2u^2}{p}:u::x-\frac{u^2}{p}:y$, che divise l' una per l' altra daranno $\frac{z^2}{u^2}:\frac{z}{u}::\frac{z^2-px}{px-u^2}:1$. Di quì facilmente $px=uz$. Ma dai triangoli parimente simili NQT, LKS si ha $NQ:QT::SL:LK$, cioè $z:\frac{2z^2}{p}::\frac{2u^2}{p}:u$, e quindi $uz=\frac{1}{4}p^2$, dunque $px=\frac{1}{4}p^2$, ed $x=\frac{1}{4}p$; dal che si ha che l' ascissa x della linea cercata è costante, e perciò l' ordinata y è una retta parallela all' asse Y (914), che sorgendo normalmente ad AT in distanza di $\frac{1}{4}p$ dall' origine A, si confonde dunque con la direttrice della parabola, la quale sarà perciò il luogo cercato. Quindi il vertice della squadra scorrerà continuamente lungo la direttrice. Tutto ciò è anche conforme a quanto vedemmo altrove (1001.XII).

F. 224

Si noti che se l' angolo NMK fosse obliquo, il vertice traccerebbe allora un' iperbola. Infatti posto $tang\,NMK=t$, e osservando che $NMK=NTQ+KSL$, e che $tang\,NTQ=\frac{p}{2z}$, $tang\,KSL=\frac{p}{2u}$, si troverebbe (789.40^a) $t=\frac{2p(u+z)}{4uz-p^2}$. Ma le proporzioni I^a, II^a. danno $z=y+\sqrt{(y^2+px)}$, $u=-y+\sqrt{(y^2+px)}$, d'onde $u+z=2\sqrt{(y^2+px)}$, e come sopra $uz=px$; si avrebbe dunque sostituendo, $t=\frac{4\sqrt{(y^2+px)}}{4x-p}$, d' onde $y^2-t^2x^2+px(\frac{1}{2}t^2+1)-\frac{1}{16}t^2p^2=0$ equazione all' iperbola (942).

VIII. Sia proposta la stessa ricerca per il caso che la squadra strisci sul perimetro d' un' ellisse, o d' un' iperbola.

Condotte, come sopra, sull' asse CT dell' ellisse le normali NQ, KL, MP, si ponga $CQ=z$, $CL=u$, $MP=y$, $CP=x$; avremo $PT=CT-CP=$ (968) $\frac{a^2}{z}-x$, $SP=x-\frac{a^2}{u}$, ed il triangolo SMT rettangolo in M darà (582.2°) $y^2=PT\times SP=\ldots\frac{(a^2-xz)(ux-a^2)}{uz}=\frac{a^2x}{uz}(u+z)-x^2-\frac{a^4}{uz}$. Ora dai triangoli simili NQT, MPT, KLS, MPS, si ha $NQ^2:QT^2::MP^2:PT^2$, $LK^2:LS^2::MP^2:PS^2$, cioè I^a. $\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2):\frac{(a^2-z^2)^2}{z^2}::y^2:\frac{(a^2-xz)^2}{z^2}$, II^a. $\frac{b^2}{a^2}(a^2-u^2):\frac{(a^2-u^2)^2}{u^2}::y^2:\frac{(ux-a^2)^2}{u^2}$; di cui la I^a., fatto per comodo $b^2x^2+a^2y^2=m$, $y^2-b^2=n$, dà $z=$

$\frac{a^2b^2x}{m}+\frac{a^2}{m}\sqrt{(mn+b^4x^2)}$, e la IIª. con le stesse sostituzioni, dà $u=\frac{a^2b^2x}{m}-\frac{a^2}{m}\sqrt{(mn+b4x^2)}$. Dunque $u+z=\frac{2a^2b^2x}{m}$; $uz=-\frac{a^4n}{m}$; valori che sostituiti in quello di y^2, daranno $y^2=-\frac{2b^2x^2}{n}-x^2+\frac{m}{n}$, ossia $n(y^2+x^2)=m-\ldots$ $2b^2x^2$, d' onde restituendo i valori di m, n, e riducendo, si avrà infine $x^2+y^2=a^2+b^2$, equazione al circolo del centro C e del raggio $\sqrt{(a^2+b^2)}$, luogo cercato. Operando nel modo stesso sull' iperbola si troverebbe un circolo del raggio $\sqrt{(a^2-b^2)}$. Quindi o la squadra strisci sopra un' ellisse, o sopra un' iperbola, il suo vertice descriverà sempre un circolo.

F. 225 IX. Fra i lati AC, CB dell' angolo qualunque ACB sia condotta comunque e dovunque l' obliqua FD; trovare il luogo geometrico dei punti M tali, che condotta da F la FM, e per M la GP parallela ad FD, si abbia FM=GP.

Pongasi CP=x, MP=y, FD=b, FC=a, cosDFC=c. Avremo FM^2=(843) $y^2+(x-a)^2-2cy(x-a)$=GP$^2=\frac{b^2x^2}{a^2}$: d' onde si dedurrà (942.939) che il luogo cercato è un' ellisse se fatto senDFC=s, sia $as>b$, un' iperbola se $as<b$, una parabola se $as=b$.

226 X. Sull' asse AP di una sezione conica, o sul di lui prolungamento AO, sia preso un punto qualunque O, e condotta da O la OQ a qualsivoglia punto Q della curva, si faccia passar per Q la PM normale all' asse. Determinare sopra PM il punto M tale che si abbia PM=OQ.

Fatta AO$=m$, OP$=x$, PM$=y$, AP $=z=x\pm m$, si troverà y^2=OQ$^2=x^2$ +PQ$^2=(z\mp m)^2$+PQ^2; quindi per la parabola, ove PQ$^2=pz$, avremo $y^2=z^2+z(p\mp 2m)+m^2$ equazione all'iperbola (942); per l'ellisse, ove PQ$^2=\frac{b^2}{a^2}(2az-z^2)$, avremo $y^2=\frac{z^2}{a^2}(a^2-b^2)+2z(\frac{b^2}{a}\mp m)+m^2$, e quindi un'iperbola se l'asse AP è il maggiore, un' ellisse se è il minore, ed una parabola se $a=b$, cioè se l' ellisse si cangi in un circolo. Infine per l' iperbola, ove PQ$^2=\frac{b^2}{a^2}(2az+z^2)$, avremo $y^2=\frac{z^2}{a^2}(a^2+b^2)+2z(\frac{b^2}{a^2}\mp m)+m^2$, il che darà in ogni caso un' iperbola.

Problemi determinati fino al quarto grado

1066. I luoghi di due equazioni indeterminate del secondo grado posson costruirsi sulla stessa retta dell' ascisse, con la stessa origine e nello stesso angolo delle coordinate. In tal caso le due curve si taglieranno in punti tali che l' ordinate corrispondenti a questi, saranno le radici dell' equazione determinata che si

avrebbe riunendo le due equazioni in una, che non contenesse altro che x o y. Reciprocamente se un'equazione determinata del terzo o quarto grado si divida in due che contengano x ed y, cosicchè eliminando x o y si ritrovi la data, è chiaro che costruendole come sopra, i punti d'intersezione delle due curve avranno per coordinate i valori dell'incognita: così se nell'equazione $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ si faccia $x^2=py$, sarà $p^2y^2+apxy+bpy+cx+d=0$, equazione a una sezione conica che costruita con la parabola dell'equazione $x^2=py$, taglierà questa curva in punti, le cui ascisse corrispondenti saranno i valori di x.

1067. I. Date due rette a, b, trovar tra esse due medie proporzionali x, y. Risolvemmo questo problema con la cissoide (1006); ma può risolversi più semplicemente con l'intersezione di due parabole. Poichè per ipotesi $a:x::x:y::y:b$, sarà $x^2=ay$ ed $y^2=bx$; onde costruite le parabole di queste equazioni e tali perciò che l'asse dell'ordinate nell'una sia asse dell'ascisse nell'altra, e reciprocamente, esse daranno con le loro intersezioni i valori cercati di x, y. Ma meglio è introdurre il circolo, curva tanto più comoda a descriversi. A tal effetto sommo le due equazioni $x^2-ay=0$, $y^2-bx=0$, ed ho $x^2+y^2-ay-bx=0$, equazione al circolo (912) del raggio $r=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}$, e il cui centro C è determinato dalle coordinate $AB=\frac{1}{2}b$, $BC=\frac{1}{2}a$ (*ivi*). Costruita dunque una parabola AM del parametro b sull'asse AP, essa sarà il luogo dell'equazione $y^2=bx$, e descritto il circolo del predetto centro C e raggio r, questo taglierà la parabola in un punto M tale, che condotta la perpendicolare PM, le coordinate AP, PM saranno le due medie proporzionali cercate. Fig 227

Si noti che da $x^2=ay$ si ha $x^4=a^2y^2=a^2bx$, d'onde $x^3=a^2b$. Quindi se $b=2a$, si avrebbe $x^3=2a^3$, cioè il cubo di AP sarebbe doppio del cubo a^3, ciò che risolve con poco il problema della duplicazione del cubo, sì famoso tra gli Antichi. Anzi può generalizzarsi il problema prendendo $b=\frac{ma}{n}$ per trovare un cubo $AP^3=\frac{ma^3}{n}$ che sia ad un dato cubo a^3 nella ragione di $m:n$.

1068. II. Dividere in tre parti eguali un arco di circolo FB.

Suppongo MF il terzo dell'arco BF, e oltre le normali BOG, MPm sul raggio AF, conduco Bm ed mR normale a BG. Poi fatto $AP=x$, $PM=y$, $AM=a$, $AO=d$, $BO=c$, i triangoli simili AMP, BmR daranno $x:y::c+y:x-d$, cioè $y^2-x^2+cy+dx=0$, equazione all'iperbola equilatera (943. 2.°), la quale, secondo la quantità che fra le sei a, b, α, β, p, q assumeremo per arbitraria (*App.* 943. 2.°) e secondo il valore che ad essa daremo, potrà variare in infiniti modi sia di dimensione, sia di posizione, ma il cui tragitto pel dato circolo avrà costantemente luogo nel punto M che noi cerchiamo. Si scelga frattanto per arbitraria p e si ponga $p=1$. Sarà $xx'=0$, cioè l'asse principale x della curva sarà parallelo ad AF. Inoltre poichè gli assi dell'equazione sono per costruzione ortogonali, sarà pure $yy'=0$ (943. 2.°), e quindi $q=0$; onde dovendo aversi $a=b$ non resteranno 228

Fig.228 a determinarsi che le incognite a, α, 6, al che suppliranno le tre equazioni $C=c$, $D=d$, $F=0$ (942), le quali, posti i valori corrispondenti a C, D, F, osservando che $q'=1$, $p'=0$ e rammentandoci che $a=b$, daranno $\alpha=-\frac{1}{2}d$, $6=\frac{1}{2}c$, $a=-\frac{1}{2}\sqrt{(d^2-c^2)}$. Quindi poichè α e 6 riferiscono l'origine delle coordinate della trasformata a quella della derivatrice (939), presa $AD=\frac{1}{2}c$, $DC=\frac{1}{2}d$, l'iperbola equilatera costruita col centro in C e col semiasse $CK=\frac{1}{2}\sqrt{(d^2-c^2)}$ attraverserà il circolo nel punto cercato M. Inoltre poichè presa $x=AO=d$ l'equazione dà $y^2+cy=0$, cioè $y=0$, $y=-c$, la curva adunque passerà per la metà O e per l'estremità G della corda BG, e quindi taglierà pure la circonferenza nel punto G e determinerà l'arco FG, di cui, comecchè eguale a BF, è parimente terza parte l'arco FM. L'iperbola opposta M'LM'' taglia il circolo in due punti M' ed M'' che, come è facile dimostrare, determinano gli archi F'M', F'M'' ed M''F, o anche BM', respettive terze parti degli archi BM'F', BM''F', BF'M''F ai quali spettano in comune la due coordinate AO, BO. Si noti 1.° che $y=0$ dà $x=d$, come si è veduto, ed $x=0$, cioè l'iperbola opposta passa col ramo superiore per il centro A del circolo; 2.° se $d=c$ sarà $a=0$, e l'equazione $y^2=x^2-a^2$ all'iperbola cercata, si convertirà in $y=\pm x$, cioè in luogo dell'iperbola avremo due rette che s'incroceranno nel centro A formando coll'asse X un angolo di 45° (914. 5.° e 6.°); 3.° se $c>d$ sarà a^2 negativo, l'equazione si cangerà nell'altra $x^2=y^2-a^2$ ad una nuova iperbola che avrà lo stesso centro della precedente, ma che avrà Y per asse dell'ascisse, X per asse dell'ordinate e che in conseguenza volgerà i suoi rami l'uno dall'alto al basso, l'altro dal basso all'alto. Può osservarsi che a questa iperbola ci saremmo condotti se in principio avessimo posto $p=0$, come d'altronde è manifesto.

230 1069. III. **Dividere lo spazio parabolico ACB con una retta CM in due settori eguali ACM, BCM.** Condotta MP normale ad AC, sia $AP=x$, $PM=y$, $AC=a$, $BC=b$, il parametro della parabola $=p$; avremo (1001. XLI.) $\frac{2}{3}xy+\frac{1}{2}y(a-x)=ACM=\frac{1}{2}ACB=\frac{1}{3}ab$, ovvero $xy+3ay=2ab$, equazione all'iperbola tra gli asintoti (943). Prolungata AP verso F, onde sia AF=3AC, e condotta FK perpendicolare ad FA, tra gli asintoti FK, FA si descriva un'iperbola equilatera della potenza $2ab$; essa sarà il luogo dell'equazione $xy+3ay=2ab$, e taglierà la parabola nel punto richiesto M.

Volendosi servir del circolo, poichè $b^2=ap$, ed $y^2=px$, sarà $x=\frac{y^2}{p}=\frac{ay^2}{b^2}$, valore che sostituito nell'equazione $xy+3ay=2ab$, la cangerà in $y^3+3b^2y-2b^3=0$: la moltiplico per y, e diviene $y^4+3b^2y^2-2b^3y=0$, da cui, sostituito $\frac{b^2x}{a}$ ad y^2, ricavo $x^2+3ax-\frac{2a^2}{b}y=0$: a questa aggiungo $y^2-px=0$, ed ho $y^2+x^2+(3a-p)x-\frac{2a^2y}{b}=0$, equazione al circolo. Alzata dal punto A normal-

mente ad AP una retta $AD=\frac{a^2}{b}$, si conduca ad AD dalla parte opposta al punto M una perpendicolare $DC'=\frac{1}{2}(3a-p)$ (quì si suppone $3a>p$), e col raggio C'A e centro C' si descriva un arco di circolo; quest' arco taglierà la parabola nel punto richiesto M; e sarà $PM=b(\sqrt[3]{(1+\sqrt{2})}-\sqrt[3]{(-1+\sqrt{2})})$. F. 230

1070. IV. Trovar le radici dell' equazione del quarto grado $x^4-p^2x^2+p^2qx+p^3r=0$ per mezzo d'un circolo e d'una parabola. Fatto al solito $x^2=py$, viene $y^2+qx-py+pr=0$; vi unisco $x^2-py=0$, e nasce l'equazione al circolo $x^2+y^2-2py+qx+pr=0$. Descritta dunque col parametro p la parabola M'AM''' che abbia AQ per asse perpendicolare ad AP, e presa $AD=p$, $DC=\frac{1}{2}q$ normale ad AD dalla parte in cui è nella figura (si prenderebbe dall' altra se fosse negativo), si troverà che un circolo del centro C e raggio $\sqrt{(CA^2-pr)}$ taglierà la parabola nei punti M, M', M'', M''', che determineranno le radici dell' equazione, due positive, cioè MQ, M'Q', l' altre negative. Se l' equazione da costruirsi fosse $x^4+p^2x^2-p^2qx+p^3r=0$, presa al solito $x^2=py$, si avrebbe $y^2+x^2-qx+pr=0$, equazione al circolo come nel caso passato, ma più facile a costruirsi. 231

Si cerchino ora le radici dell' equazione $x^4-pqx^2+p^2rx+p^2m^2=0$ per mezzo di un circolo e d' un' iperbola tra gli asintoti. Presa $xy=pm$, viene $x^4-pqx^2+p^2rx+x^2y^2=0=x^2+y^2-pq+\frac{p^2r}{x}=x^2+y^2-pq+\frac{pry}{m}$, equazione al circolo. Tra gli asintoti perpendicolari QAQ', P'''AP' descritte l' iperbole equilatere della potenza pm, prendo sotto AP la retta $AC=\frac{pr}{2m}$; il circolo del centro C, col raggio $\sqrt{(AC^2+pq)}$, taglierà l' iperbole opposte nei quattro punti M, M', M'', M''', i quali determineranno come sopra i quattro valori di x con le ascisse AP, AP', AP'', AP'''.

Geometria Analitica

1071. Nel Trattato che abbiamo adesso percorso, i punti, le rette e le curve sono stati sempre da noi supposti nel piano degli assi X, Y. Se sieno al di fuori di questo piano, e situati comunque *in mezzo*, come suol dirsi, *allo spazio*, i problemi correlativi divenendo allora assai più composti, non possono altrimenti risolversi coi soli dati fin quì posti in uso, ed esigono l' intervenzione d' una nuova e assai più estesa Teoria, di cui la precedente non forma che un semplice caso particolare. Noi ne daremo i soli primi principj; ritenendoci e la necessaria brevità, e la sublimità stessa delle materie dal più oltre avanzarci. E secondo il più moderno costume procederemo per via più che potremo analitica; motivo appunto per cui abbiamo apposta al trattato attuale la denominazione con cui vedesi intitolato, de-

nominazione che avremmo potuta estendere ed applicare anche al trattato antecedente, se trattenuti non ci avesse il riguardo di non troppo con ciò vincolarci, e perdere ogni diritto all' uso libero di quella sintesi che vi abbiamo sparsa, e che dannoso sarebbe stato ai nostri Alunni di non far loro opportunamente conoscere.

Equazioni del punto nello spazio

F. 232 1072. Sia B un punto preso non più sopra una data superficie piana, ma nello spazio assoluto, e se ne voglia la posizione rapporto al punto A, comun concorso degli assi AX, AY, che per maggior semplicità supporremo in principio fra loro ortogonali. Se da B si cali sul piano XAY la normale BC, e da C, che chiameremo *projezione del punto* B *sul piano delle* xy, si conduca su questo piano la CP normale ad AX, è chiaro che partendo da A e procedendo lungo AX fino a P, quindi volgendo lungo PC, e risalendo fino in C, e da C elevandoci per CB fino in B, verremo così ad incontrare necessariamente, ed esclusivamente da qualunque altro punto, il punto B. Dunque nel modo stesso che le due coordinate AP, PC, le quali conducono da A a C fissano la posizione di C relativamente ad A sul piano XAY (900), le tre AP, PC, CB che conducono in pari maniera a B, fisseranno la posizione di B nello spazio. E se chiamate x, y, z le tre coordinate, ne sieno m, n, p gli assoluti respettivi valori, $x=m$, $y=n$, $z=p$ saranno le cercate equazioni del punto qualunque B (899).

1073. Se sull'origine A normalmente al piano XAY si alzi l'indefinita AZ, questa sarà pure normale agli assi X, Y (693), e parallela alla nuova coordinata z. In forza di quest' ultima circostanza l' indefinita prende il nome d' *asse delle* z, e verrà da noi rappresentata con Z; come chiameremo piani delle xz, o delle yz i piani stesi per gli assi X,Z o per gli assi Y,Z. In forza poi dell'altra circostanza i tre piani saranno ortogonali fra loro, e quindi nel punto A del loro concorso comune formeranno un angolo solido composto di tre angoli piani, ciascuno dei quali sarà retto, ossia formeranno l' angolo d' un esaedro regolare (723.4°). Questi piani, che denomineremo pure *piani coordinati*, posson poi immaginarsi stesi come gli assi anche oltre il punto di concorso, nel qual caso questo punto sarà il comun vertice di otto angoli solidi, tutti tra loro eguali e dell' indicata qualità. Chiameremo angolo *positivo* quello di questi otto angoli che riman compreso fra le tre parti positive degli assi (899); *negativo* l'angolo opposto al vertice del precedente; *misto* qualunque dei sei rimanenti.

1074. Del resto invece di far uso delle tre coordinate x, y, z, può determinarsi la situazione del punto B rispetto ad A anche mediante la distanza diretta $AB=r$, e gli angoli $BAC=\theta$, $CAX=\omega$, fatti l' uno da AB con la retta AC, che partendo da A passa per il piede C della normale BC, e l'altro dalla retta AC con l' asse AX, o con l' asse AY. Infatti l' angolo CAX determina la direzione del piano normale che passa per B lungo la retta AB; l' angolo BAC determina su questo piano la direzione della retta AB lungo la quale trovasi il punto B, e la retta AB determina con

la sua lunghezza r il luogo occupato da B alla sua estremità. I due angoli θ ed ω Fig. 232 e la retta r prendono in questo caso il nome di *coordinate polari* (901); ed è poi facile averne il valore da quello delle coordinate ortogonali, o inversamente dedur questo dall'altro. Infatti i triangoli rettangoli ACB, ACP danno $AC = r\cos\theta$, $BC = z = r\,sen\theta$, $CP = y = AC\,sen\omega = r\cos\theta\,sen\omega$, $AP = x = AC\cos\omega = r\cos\theta\cos\omega$: d'onde assai agevolmente $r = \sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $sen\theta = \frac{z}{r}$, $tang\omega = \frac{y}{x}$.

1075. E qui gioverà dar luogo ad alcune belle conseguenze che immediatamente fluiscono da questi valori, e specialmente da quello di r, il quale può direttamente riguardarsi come l'espressione analitica di una retta stesa dall'origine fino al punto qualunque B, e quindi comunque diretta e comunque lunga; o sivvero come l'espressione analitica della diagonale d'un parallelepipedo rettangolo che abbia le tre coordinate x, y, z per lati (725). Primieramente si prenda sull'asse Y una porzione $AE = y$, e s'immaginino condotte da B le rette BP, BE. I piani triangolari BPC, BEC saranno normali a quello delle xy (703), e quindi respettivamente (704) anche alle rette AP, AE normali per natura alle intersezioni PC, EC del piano xy coi due piani triangolari. Dunque (693) BP sarà normale ad AP, e BE ad AE; e rappresentando con rx, ry, rz (903) gli angoli che la retta r fa con gli assi X, Y, Z, i triangoli rettangoli APB, AEB, ACB daranno $x = r\cos rx$, $y = r\cos ry$, $z = r\cos rz$, d'onde, quadrando e sommando, e introducendo il valore di r, avremo $\cos^2 rx + \cos^2 ry + \cos^2 rz = 1$; perciò *la somma dei quadrati dei coseni dei tre angoli, che una qualsivoglia retta condotta dall'origine nello spazio fa respettivamente con gli assi, è sempre costante, ed eguaglia il quadrato del raggio* 1. Due di questi angoli son perciò arbitrarj, il terzo dipende dall'uno e dall'altro. Può anche notarsi che trasformati i coseni in seni, si ha $sen^2 rx + sen^2 ry + sen^2 rz = 2$.

1076. In secondo luogo l'angolo $BAC = \theta$, per cui abbiam trovato $sen\theta = \frac{z}{r}$, rappresenta l'inclinazione della retta AB, o di qualunque sua parallela sul piano delle xy (695). Ora è chiaro che se la normale BC che si è condotta su questo piano, si fosse condotta piuttosto su quello delle xz, o delle yz, fatto per distinzione $BAC = \theta'$ nel primo caso e $BAC = \theta''$ nel secondo, avremmo trovato $sen\theta' = \frac{y}{r}$, $sen\theta'' = \frac{x}{r}$. Quindi quadrando e sommando, $sen^2\theta + sen^2\theta' + sen^2\theta'' = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = 1$, cioè *la somma dei quadrati dei seni degli angoli d'inclinazione di una retta sui tre piani ortogonali, è costante ed eguaglia il quadrato del raggio* 1. E qui pure ponendo in luogo dei seni il valore dato per i coseni, troveremo $\cos^2\theta + \cos^2\theta' + \cos^2\theta'' = 2$.

1077. In terzo luogo se si rappresenti con p la retta AC, che denomineremo *projezione di* AB *sul piano delle* xy, e con p', p'' si rappresentino le consimili

Fig.232 projezioni sugli altri due piani, siccome abbiamo p=AC=$r cos\theta$ (1074), così sarà $p'=r cos\theta'$, $p''=r cos\theta''$; d'onde $p^2+p'^2+p''^2=r^2(cos^2\theta+cos^2\theta'+cos^2\theta'')=2r^2$, cioè *il quadrato della retta eguaglia la semisomma dei quadrati delle tre sue projezioni.*

1078. In quarto luogo se condotta la BD normale sull'asse Z, si ponga avvertenza ai tre triangoli APB, AEB, ADB, facilmente scorgeremo che le tre coordinate x=AP, y=AE, z=AD posson riguardarsi come equivalenti alle projezioni della retta sugli assi, operate mediante i piani dei tre triangoli. Poichè dunque $r^2=x^2+y^2+z^2$ (1074), perciò *il quadrato della retta eguaglia altresì la somma dei quadrati delle sue projezioni sopra i tre assi*, il che, come vedremo in breve (1082), si verifica d'ogni altra retta, anche qualora non parta dall'origine A.

1079 Infine la distanza r appartenendo non tanto al punto B, quanto a qualunque punto della superficie di una sfera che abbia per centro A e per raggio r, così l'equazione $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ spetterà alla superficie di una sfera.

1080. Tornando adesso all'equazioni del punto (1072), rimane tuttavia da osservare 1° che considerati come positivi i tre assi, debbon considerarsi come negativi i loro prolungamenti al di là del punto di concorso (899); e perciò anche le coordinate x, y, z, o i loro valori m, n, p dovranno assumersi per negativi, allorchè il punto dato si troverà non dalla parte degli assi, ma da quella dei prolungamenti. Che se questo punto sia per rispetto ad un asse dalla parte positiva, e per rispetto ad un altro dalla parte negativa o del prolungamento, in tal caso risulterà positiva la coordinata corrispondente al primo asse, negativa quella corrispondente al secondo. In generale tutte le coordinate di un punto situato in uno degli otto angoli (1073) hanno segni contrarj a quelle di un punto situato nell'angolo di vertice opposto. Qualora non altro si avverta, supporremo il punto situato dalla parte positiva degli assi, e riguarderemo perciò come positive tutte le sue coordinate.

2° Le coordinate x, y, z, o i loro valori m, n, p equivalgono alle respettive distanze del punto dato ai tre piani. Quindi se il punto cada sopra uno dei piani, per esempio su quello delle xz, sarà nulla la distanza n, e la seconda equazione (1072) diverrà $y=0$. Se cada sopra uno degli assi, come per esempio su quello delle x, siccome in tal caso si trova insieme e sul piano delle xy e su quello delle xz, saranno nulle nel tempo stesso le due distanze n, p, e l'ultime due equazioni diverranno perciò $y=0$, $z=0$. Se infine coincidesse col punto di concorso degli assi, trovandosi allora in ciascuno dei tre piani, saranno nulle tutte le tre distanze, ed avremo per equazioni $x=0$, $y=0$, $z=0$.

233 1081. Si concepiscano adesso tre nuovi assi X', Y', Z' paralleli ai tre primi, e concorrenti in un punto A' comunque diverso da A. Avremo insieme tre nuovi piani ortogonali che saranno paralleli ai tre primi; e se si suppongano α, 6, $\varkappa$ le re-

spettive distanze degli uni e degli altri, ed x', y', z' quelle di ciascuno dei nuovi piani F. 233 al punto B, saranno $\alpha, \beta, \varkappa$ le coordinate che riferiscono il punto A al nuovo punto A', ed x', y', z' saranno o potranno considerarsi come quelle che vi riferiscono il punto B (1072). Ed è poi chiaro che qualora il punto A' sia nell' angolo negativo (1072) degli assi X, Y, Z, avremo $x'=\alpha+x$, $y'=\beta+y$, $z'=\varkappa+z$, e quindi $x=x'-\alpha$, $y=y'-\beta$, $z=z'-\varkappa$; mentre all' opposto se A' sia nell' angolo positivo, sarà $x=x'+\alpha$, $y=y'+\beta$, $z=z'+\varkappa$, ed $x'=x-\alpha$, $y'=y-\beta$, $z'=z-\varkappa$. Che se A' cadesse in uno qualunque degli angoli misti, i segni delle tre coordinate $\alpha, \beta, \varkappa$ varierebbero a tenore della regola che abbiamo superiormente accennata (1080).

1082. Ritenuta frattanto la prima ipotesi osserveremo, che introducendo i nuovi valori di x, y, z in $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, espressione della distanza del punto B al punto A (1074), si ha $r=\sqrt{((x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2+(z'-\varkappa)^2)}$. Ora B ed A posson considerarsi come due punti comunque situati nello spazio, e riferiti al punto A', l' uno con le coordinate x', y', z', l' altro con le coordinate $\alpha, \beta, \varkappa$. Se dunque per simmetria cambieremo in x'', y'', z'' le coordinate $\alpha, \beta, \varkappa$, ed r in d, avremo $d=\sqrt{((x'-x'')^2+(y'-y'')^2+(z'-z'')^2)}$, e sarà questa l' espressione analitica della distanza reciproca di due punti situati comunque nello spazio, che abbiano per coordinate l' uno x', y', z', l' altro x'', y'', z''. Chiamando poi r', r'' le distanze dirette di ciascuno dei due punti all' origine, avremo ancora $d=\sqrt{(r'^2+r''^2-2(x'x''+y'y''+z'z''))}$, a motivo di $r'^2=x'^2+y'^2+z'^2$, ed $r''^2=x''^2+y''^2+z''^2$. È poi ben chiaro 1°. che questa stessa espressione verrà egualmente a rappresentar la lunghezza di una retta interposta tra i due dati punti; 2°. che sarà l' equazione di una sfera che abbia per centro uno dei punti dati, e per raggio d; 3°. che $x'-x''$, $y'-y''$, $z'-z''$ corrisponderanno alle projezioni della retta data sopra ciascuno dei tre assi; onde anche nel caso che la retta non parta dall' origine si verificherà ciò che di sopra accennammo (1078).

1083. Ma sieno i tre nuovi assi X', Y', Z' non più paralleli, ma bensì in direzione comunque inclinata su quella dei primitivi, e di più obliqui fra loro, e vogliansi i valori delle coordinate primitive x, y, z, dati per le coordinate x', y', z', che riferiscono il punto B ai nuovi assi. Distingueremo due casi, cioè che i nuovi assi abbiano comune l' origine A coi primitivi, o che l' abbiano differente. Nel primo supposto, le coordinate x, y, z dovran dipendere dalle nuove per mezzo di relazioni lineari delle forme generiche seguenti: $x=ax'+a'y'+a''z'$, $y=bx'+b'y'+b''z'$, $z=cx'+c'y'+c''z'$. Infatti poichè facendo $x'=y'=z'=0$, cioè supponendo il punto B trasportato all' origine A, deve egualmente aversi $x=y=z=0$, è chiaro che nei valori di x, y, z non potranno esser contenuti termini costanti. Inoltre siccome al punto unico B non compete che una sola ordinata nel senso di ciascuno dei sei assi, così l' equazioni di rapporto dell' une coordinate con l' altre debbono esser tali, che per qualunque coordinata sieno risolute, non somministrino se non un solo valore; il che non potrebbe accadere qualora le coordinate vi si trovassero ad

un grado maggiore dell' unità, ossia l' equazioni non fossero lineari. Non altro dunque rimarrà che conoscere il valore delle costanti $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$.

1084. Or queste quantità, comecchè appunto costanti, hanno sempre uno stesso valore qualunque sia la posizione del punto B. Posto ciò si supponga che B cada in qualche punto M dell' asse X'. Avremo $y'=0$, $z'=0$, d' onde $x=ax'$, $y=bx'$, $z=cx'$. Ma $x'=$AM può considerarsi come una retta stesa dall' origine A al punto M, e perciò deve aversi (1075) $x=x'\cos x'x$, $y=y'\cos x'y$, $z=z'\cos x'z$; dunque per questa, e quindi per ogni altra situazione di B, saranno $a=\cos x'x$, $b=\cos x'y$, $c=\cos x'z$. Nel modo medesimo, supponendo B trasportato in un punto dell' asse Y', e poscia in un punto dell' asse Z', troveremo $a'=\cos y'x$, $b'=\cos y'y$, $c'=\cos y'z$, $a''=\cos z'x$, $b''=\cos z'y$, $c''=\cos z'z$; per il che le tre relazioni supposte diverranno

$$x=x'\cos x'x+y'\cos y'x+z'\cos z'x \qquad y=x'\cos x'y+y'\cos y'y+z'\cos z'y$$
$$z=x'\cos x'z+y'\cos y'z+z'\cos z'z.$$

1085. Se accada che uno dei nuovi assi, come per esempio Z', mantenga la situazione dell' asse Z, e i due X', Y' si conservino nel piano degli assi X, Y, in tal caso sarà $z'z=0$, $z'x=z'y=x'z=y'z=90^\circ$, ed $y'y=90^\circ-y'x$, d' onde $x=x'\cos x'x+y'\cos y'x$; $y=x'\cos x'y+y'\cos y'y=x'\cos x'y+y'\operatorname{sen} y'x$; $z=z'$.

1086. Questa trasformazione dell' uno nell' altro sistema di coordinate, data per mezzo degli angoli fatti dagli assi fra loro, non è sempre la più opportuna. Giova, nell' Astronomia specialmente, piuttosto averla per mezzo delle inclinazioni dei piani, e per gli angoli che le loro intersezioni fanno con gli assi. A tal effetto, supposti gli assi ortogonali, si osserverà che se col centro in A, comun concorso di tutti gli assi, s' immagini descritta una sfera di raggio qualunque, i piani delle coordinate si cangeranno in piani di circoli massimi (750), le loro inclinazioni in angoli sferici (859), le loro intersezioni e i loro assi in raggi. Sia dunque

F. 234

SPYZ la sfera, e i raggi AX, AY, AX', AY' rappresentino gli assi X, Y, X', Y'. Descritti gli archi X'X, Y'X, X'Y, Y'Y, YX, Y'X', prolungati i due ultimi fino al loro incontro in P, e condotto il raggio AP, è manifesto 1°. che l' arco X'X misura ed eguaglia l' angolo al centro XAX', fatto dagli assi X', X, onde si ha X'X$=x'x$; come per la stessa ragione si avrà Y'X$=y'x$, X'Y$=x'y$. 2°. Che gli archi YX, Y'X' contenendo l' angolo degli assi Y, X ed Y', X', saranno ambedue di 90°. 3°. Che i settori PAX, PAX' essendo nei piani degli assi Y, X, ed Y', X', il raggio AP rappresenterà l' intersezione di questi piani, e l' angolo XPX' la loro inclinazione. Si chiami frattanto θ quest' inclinazione, e ψ, φ gli angoli che gli assi X, X' fanno con l' intersezione AP: avremo XPX'$=\theta$, PX$=\psi$, PX'$=\varphi$, PY$=\psi+90^\circ$, PY'$=\varphi+90^\circ$; e i quattro triangoli PXX', PXY', PYX', PYY' daranno (870.IIª)

Iª. $\cos x'x=\cos\theta\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi+\cos\psi\cos\varphi$ IIª. $\cos y'x=\cos\theta\operatorname{sen}\psi\cos\varphi-\cos\psi\operatorname{sen}\varphi$

IIIª. $\cos x'y=\cos\theta\cos\psi\operatorname{sen}\varphi-\operatorname{sen}\psi\cos\varphi$ IVª. $\cos y'y=\cos\theta\cos\psi\cos\varphi+\operatorname{sen}\psi\operatorname{sen}\varphi$

235

Si rappresentino adesso coi raggi AZ, AZ' gli assi Z, Z', e si conducano gli archi X'Z, Y'Z, XZ', YZ', PZ, PZ'. Sarà quì pure evidentemente X'Z$=x'z$, Y'Z$=y'z$,

$Z'X=z'x$, $Z'Y=z'y$. Inoltre dovendo gli assi Z, Z' esser normali l'uno al piano XAY, l'altro al piano X'AY', e quindi alla loro intersezione AP (693), si avrà $PZ=90°=PZ'$, $XPZ=90°=X'PZ'$, e perciò $X'PZ=90°-\theta$, $XPZ'=90°+\theta$. Quindi ritenuti gli altri precedenti valori, i quattro triangoli X'PZ, Y'PZ, XPZ', YPZ' daranno V.ª $\cos x'z=\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi$; VI.ª $\cos y'z=\text{sen}\,\theta\cos\varphi$; VII.ª $\cos z'x=-\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi$; VIII.ª $\cos z'y=-\text{sen}\,\theta\cos\psi$. Fig.235

Infine l'angolo degli assi Z, Z' essendo eguale a quello dei loro circoli massimi (862), avremo IX.ª $\cos z'z=\cos\theta$. Or sostituendo questi nove valori nelle formule precedenti (1084), si otterranno espresse nel modo che si cercava le coordinate x, y, z del dato punto B, o le sue nuove equazioni.

1087. Applichiamole ad un caso semplicissimo e nel tempo stesso di rilevanza somma per cose che dovremo esporre in appresso; cioè che il nuovo asse X' sia nel piano delle xy, e il nuovo piano delle $x'y'$ passi per il dato punto B. In queste supposizioni avremo $z'=0$ (1080. 2.°), l'asse X' si confonderà con l'intersezione AP, e sarà per conseguenza $\varphi=0$; dunque (1084)

$$x=y'\cos\theta\,\text{sen}\,\psi+x'\cos\psi,\quad y=y'\cos\theta\cos\psi-x'\,\text{sen}\,\psi,\quad z=y'\,\text{sen}\,\theta.$$

1088. Rimarrebbe adesso da esaminare il caso in cui i nuovi assi X', Y', Z' diversificassero dai primitivi non solo nella direzione, ma ancor nell'origine (1083). A tale effetto, supposta la nuova origine in A' dentro l'angolo positivo degli assi X, Y, Z, s'immagini un terzo sistema d'assi X'', Y'', Z'' paralleli ai primitivi, e concorrenti in A' con gli assi X', Y', Z'; e si suppongano x'', y'', z'' le coordinate che riferiscono ad essi il punto B. È chiaro che nel caso attuale spetteranno a queste coordinate i valori che nel precedente spettavano alle coordinate x, y, z. Ma supposte α, β, $\varkappa$ le coordinate che riferiscono il punto A' al punto A, abbiamo (1081) $x=\alpha+x''$, $y=\beta+y''$, $z=\varkappa+z''$; dunque nell'ipotesi che alla diversità della direzione si aggiunga pei nuovi assi anche lo spostamento d'origine, non altro abbisognerà che respettivamente aumentare i superiori valori di x, y, z delle quantità α, β, $\varkappa$, prese coi segni che loro si competono a seconda della situazione che avrà il punto A' relativamente al punto A (1081).

1089. Riprendiamo, per darne un esempio, il caso di sopra (1087), e supponiamo l'origine dei nuovi assi in un punto dell'asse primitivo X; saranno visibilmente nulle β e $\varkappa$, onde delle tre formule non cangerà che la prima, per la quale avremo $x=\alpha+y'\cos\theta\,\text{sen}\,\psi+x'\text{ons}\,\psi$. E se infine si vuole che l'asse X' rimanendo sul piano delle xy sia parallelo all'asse X, saranno nulli φ, ψ e la coordinata $\varkappa$, ed avremo $x=\alpha+x'$, $y=\beta+y'\cos\theta$, $z=y'\,\text{sen}\,\theta$.

Equazioni della linea retta nello spazio

1090. Abbiasi non più un punto, ma una retta indefinita AB con l'origine in A, della quale si vogliano l'equazioni. S'immagini che sul piano XAY delle 232

Fig.232 xy scenda per AB un piano normale, a cui daremo il nome di *piano projettante*, e sia AC la comune intersezione di questi due piani. Se da un punto qualunque B di AB si conduca la BC normale ad AC, e quindi da C la CP normale ad AX, saranno AP, PC, BC le tre coordinate x, y, z del punto B. Chiamati frattanto ω, θ gli angoli PAC, CAB fatti dalla projezione AC con l'asse AX e con la retta proposta AB, i triangoli ACP, ACB daranno le due equazioni 1.ª $y = x\tang\omega$, 2.ª $z = x\sec\omega\tang\theta$. Or la prima spetta visibilmente alla projezione AC (914. 3.°), e dato ω stabilisce la posizione del piano projettante, che dovendo sorger normalmente al piano nella direzione di AC è obbligatamente determinato quando è determinata AC. La seconda, dati ω e θ, fissa sul piano projettante la posizione di AB; ed è dunque chiaro che ambedue prese insieme determinano la situazione della retta data, e ne son perciò l'equazioni.

1091. Se in luogo di sceglier per piano della projezione il piano delle xy si fosser prescelti quelli o delle xz, o delle yz, chiamati ω', ω'' gli angoli fatti dalle due nuove projezioni nel primo caso con l'asse Z, nel secondo con l'asse Y, e θ', θ'' quelli fatti con la retta data, avremmo avuto nell'uno dei casi $x = z\tang\omega'$, $y = z\sec\omega'\tang\theta'$, e nell'altro $z = y\tang\omega''$, $x = y\sec\omega''\tang\theta''$; due nuovi sistemi d'equazioni atti a rappresentare del pari che il precedente la retta data. Ma qui possiamo osservare di più che le prime equazioni di ciascuno dei tre predetti sistemi, cioè $y = x\tang\omega$, $x = z\tang\omega'$, $z = y\tang\omega''$ spettando alle projezioni di AB sopra ciascuno dei respettivi tre piani, determinano anche le posizioni dei tre piani projettanti, che tutti s'intersecano in AB. Quindi due qualunque di esse determinano AB; essendo chiaro che supposti dati di posizione due piani, deve aversi come data anche la loro intersezione comune. Perciò combinando insieme a due per due le riferite equazioni, potremo ottener tre altri sistemi, i quali comecchè più semplici dei tre precedenti, saranno anzi quelli di cui faremo più uso.

1092. Attenendoci dunque a questi, si supponga per maggior generalità che la retta data non passi per l'origine A. Preso un suo punto qualunque A' riferito al punto A dalle coordinate α, β, κ, vi si facciano passare tre nuovi assi X', Y', Z' paralleli ai tre primi. Fra le coordinate che riferiscono il punto B alla nuova origine A' sussisteranno manifestamente, come fra quelle che lo riferivano alla primitiva, l'equazioni $y' = x'\tang\omega$, $x' = z'\tang\omega'$, $z' = y'\tang\omega''$. Ma, supposta la nuova origine nell'angolo positivo degli assi primitivi, abbiamo (1081) $x' = x - \alpha$, $y' = y - \beta$, $z' = z - \kappa$; sostituendo dunque avremo $y = (x-\alpha)\tang\omega + \beta$, $x = (z-\kappa)\tang\omega' + \alpha$, $z = (y-\beta)\tang\omega'' + \kappa$, ove le coordinate x, y, z continueranno ad esser quelle che riferiscono il punto B alla origine primitiva. Or qui si osserverà 1.° che avendosi dalla 1.ª $\tang\omega = \frac{y-\beta}{x-\alpha}$, dalla 2.ª $\tang\omega' = \frac{x-\alpha}{z-\kappa}$, dalla 3.ª $\tang\omega'' = \frac{z-\kappa}{y-\beta}$, sarà $\tang\omega\tang\omega'\tang\omega'' = 1$,

condizione analitica che devo aver luogo ogni qualvolta le tre equazioni appartengono ad una medesima retta. 2°. Che se la retta sia parallela al piano delle xy, la sua projezione sul piano delle yz risulterà parallela all' asse delle y; d' onde $\omega''=0$, e quindi per una delle equazioni $z=\kappa$. Che se di più la retta coincida col piano, nel qual caso $\kappa=0$(1080.2°), la predetta equazione diverrà $z=0$. Nel modo stesso se sia parallela al piano delle xz, la sua projezione su quello delle xy sarà parallela all' asse delle x, il che darà $\omega=0$, e quindi $y=\beta$, e di più $y=0$, qualora la retta sia sul detto piano. Come pure si troverà $x=\alpha$, o $x=0$, quando la retta sia parallela al piano delle yz, o sia con esso coincidente. Quindi 3°. se la retta sia parallela ad uno degli assi, o normale ad uno dei piani, e per conseguenza parallela agli altri due, avremo per equazioni $x=\alpha$, $y=\beta$ nel caso che l' asse parallelo sia Z, $x=\alpha$, $z=\kappa$ nel caso che sia Y; $y=\beta$, $z=\kappa$ nel caso che sia X. 4°. Se il punto A della retta sia sopra uno qualunque degli assi, per esempio sull' asse Z, le sue distanze α, β dai piani delle xz, e delle yz (1080.2°) saranno nulle, e allora le tre equazioni si ridurranno ad $y=x\,tang\,\omega$, $x=(z-\kappa)tang\,\omega'$, $z=y\,tang\,\omega''+\kappa$.

1093. Si chiamino φ, φ', φ'' gli angoli che le diverse projezioni nei piani delle xy, delle xz, delle yz fanno con gli assi delle y, delle x, delle z. Sarà $\varphi=90°-\omega$, $\varphi'=90°-\omega'$, $\varphi''=90°-\omega''$, e quindi $\omega=90°-\varphi$, $\omega'=90°-\varphi'$, $\omega''=90°-\varphi''$, valori che introdotti nelle precedenti equazioni, daranno $x=(y-\beta)tang\,\varphi+\alpha$, $z=(x-\alpha)tang\,\varphi'+\kappa$, $y=(z-\kappa)tang\,\varphi''+\beta$. E come queste nuove equazioni non sono che le primitive sotto diverse forme, perciò anche due qualunque di esse combinate fra loro, o una qualunque di queste combinata con una qualunque delle prime (escluse l' identiche, ossia quelle fra le medesime coordinate), daranno luogo ad altrettanti sistemi d' equazioni, tutti in un modo medesimo atti a rappresentar la retta proposta.

1094. Concluderemo perciò in generale, 1°. che una retta AB è determinata da un sistema di due equazioni di primo grado, della forma $x=az+b$, $y=a'z+b'$, o dell' altra $x=az+b$, $x=a'y+b'$, ciascuna delle quali è fra due coordinate, l'una comune ad ambedue, l' altra in ambedue differente; 2°. che ognuna di esse rappresenta separatamente la projezione della retta data sopra uno dei piani ortogonali; 3°. che questo piano, a cui daremo il nome di *piano dell' equazione*, è denotato dalle due coordinate che sono in equazione fra loro; 4°. che i coefficienti a, a' equivalgono alle tangenti degli angoli fatti dalla projezione con l' asse corrispondente alla coordinata che ciascun di essi accompagna. Dipendon dunque soltanto dalla direzione della retta, e perciò 5°. sono eguali per tutte le rette parallele, o per la stessa retta allorchè passa da una in un' altra posizion parallela; 6°. son poi sempre nulli, allorchè la retta è normale al piano dell'equazione, nel qual caso, come abbiam veduto (1092.3°), la coordinata del secondo membro sparisce, e l' equazioni divengon determinate. Infine 7°. debbon considerarsi per noti, allorchè la direzione della retta sia data, per incogniti quando la direzione si cerca.

1095. Quanto alle costanti b, b', siccome stanno a rappresentare o l'una o l'altra delle tre espressioni (1092) $-\alpha tang\omega+6$, $-\varkappa tang\omega'+\alpha$, $-6tang\omega''+\varkappa$, perciò 1°. dipendono insieme e dalla posizione e dalla direzione della retta; 2°. son sempre nulle quando la retta passa per l'origine delle coordinate, il che non solo si rileva dalla natura delle equazioni che trovammo per questo caso (1091), ma anche dall' osservare che allora con $x=0$ deve aversi insieme $y=0$, $z=0$ (1080.2°); 3°. che se la retta passi semplicemente per uno degli assi, allora è nulla quella delle due costanti, che appartiene all' equazione, le cui coordinate corrispondono agli altri due. Così se l'asse di cui si parla è quello delle z, sarà nulla b' nell' ultima equazione del secondo sistema, dovendo in tal caso aversi $y=0$ con $x=0$. 4°. Generalmente i valori di b, b' equivalgono, come è chiaro, a quello che la coordinata del primo membro di ogni equazione ha nel punto, ove la coordinata del secondo si annulla, vale a dire in quel punto ove la retta proposta incontra il piano formato dalla coordinata del primo membro, e da quella che manca nell' equazione. 5°. Infine debbon questi valori assumersi come noti quando la retta sia data di posizione, come incogniti allorchè la posizion della retta si cerca.

1096. Del resto il metodo già dichiarato (1091), col quale possiam determinare la posizione di una retta per mezzo di due sue projezioni o delle loro equazioni, è visibilmente applicabile al perimetro di qualunque poligono, come pure alle curve, sussistendo evidentemente anche per questi due casi lo stesso principio sul quale noi lo fondammo (*ivi*). Stabiliremo perciò che *i perimetri dei poligoni e delle curve hanno per equazioni quelle di due qualunque delle loro projezioni*. Deve escludersi il caso che il piano della curva sia parallelo ad uno di quelli di projezione; poichè le projezioni sugli altri due piani degenerando allora in linee rette, le loro equazioni non sarebbero altrimenti idonee a specificar la qualità della curva, e potrebbe soltanto dedursene la situazione rapporto al piano parallelo. In tal caso dovrà farsi uso di una di queste, e di quella della projezione sul piano parallelo.

1097. Le superficie costituite dalle normali che dalla curva scendon sui piani di projezione si chiamano *superficie projettanti cilindriche*, attesa la loro analogia col cilindro, sia per parte della forma prismatica, sia per quella della base curvilinea, benchè non circolare. E come le normali costituenti queste superficie terminano in ciascuna di esse alla curva data, così la curva dovendo trovarsi in amendue, sarà dunque rappresentata dalla loro intersezione comune.

Equazione del piano

F. 236 1098. Abbiasi il piano indefinito CBD, e sia B il punto ove uno qualunque degli assi, per esempio quello delle z, lo incontra; BC, BD ne rappresentino *le tracce su i piani delle* xz, *e delle* yz, cioè le intersezioni con questi piani; infine sieno ω, ω' gli angoli dell' una traccia con l'asse delle x, dell' altra con quello del-

le y. Condotta per un punto qualunque E di BD la retta EF parallela all' altra traccia BC, e supposte y', z' le coordinate di BD, x, y, z quelle di EF, e fatta AB$=C$, avremo fra z' ed y' l' equazione $z'=y'tang\omega'+C$ (914.4°, 1095.3°), e fra z ed x l' altra equazione $z=xtang\omega+b$ (914.4°), ove b rappresenterà ciò che diviene z al punto E (1095.4°); ma in questo punto, comecchè comune ad EF e a BD, si ha $z=z'$, e di più $y'=y$; dunque $b=z'=y\,tang\omega'+C$; e quindi $z=xtang\omega+ytang\omega'+C$, equazione che essendo fra le tre coordinate x, y, z di qualsivoglia punto F della parallela qualunque EF, spetta perciò a qualunque punto del piano, ed è per conseguenza l' equazione del piano. Potremo rappresentarla con $z=Ax+By+C$, oppure con $y=Ax+Bz+C$, o ancora con $x=Az+By+C$, le quali due ultime forme nascono dalla prima, permutate fra loro le denominazioni delle coordinate, cosa, siccome è chiaro, quivi del tutto indifferente; e in tal caso 1°. A, B saranno le tangenti degli angoli che le tracce fanno con gli assi corrispondenti alle coordinate, alle quali A, B servono respettivamente di coefficienti, e C sarà il valor dovuto alla coordinata del primo membro, al punto ove le due del secondo si annullano, ossia dove il piano incontra l' asse corrispondente alla coordinata del primo. Quindi 2°. per un altro piano parallelo al dato i coefficienti A, B rimarranno gli stessi, e non varierà che la sola C. 3°. Se il piano passerà per l' origine, C sarà nullo. 4°. Se è parallelo all' asse X, sarà nullo il coefficiente di x, e l' equazione del piano diverrà $z=By+C$, oppure $y=Bz+C$; se è parallelo all' asse Y sarà nullo il coefficiente di y, ed avremo $z=Ax+C$, oppure $x=Az+C$; siccome avremo $x=By+C$, oppure $y=Ax+C$, se il piano sarà parallelo all' asse Z. 5°. Se è parallelo al piano delle xy, e per conseguenza ai due assi X, Y, saranno nulli insieme i coefficienti di x e di y, e l' equazione $z=Ax+By+C$ si cangerà in $z=C$; come si cangeranno in $x=C$, $y=C$ le altre due, se il piano sia parallelo a quello delle yz, o delle xz. 6°. Se è tutto steso sul piano delle xy, saranno nulle insieme A, B, C; onde $z=0$ sarà l' equazione del piano delle xy, come $x=0$, $y=0$ sarebbero quelle dei piani delle yz, e delle xz. 7°. I coefficienti A, B, C dovranno al solito riguardarsi come quantità note, quando il piano è dato, e come le incognite del problema, quando il piano si cerca.

1099. Le tracce sui piani coordinati offrono il modo il più naturale bensì, ma non l' unico per determinare la posizione di un piano. Essa rimane egualmente determinata mediante una retta di nota origine, di nota posizione, di nota lunghezza e normale al piano; il che è ben chiaro. L' equazione che allora se ne deduce diversifica molto dall' altra nel valore e nel significato dei suoi coefficienti. Per concluderla nel modo il più speditivo, supporremo che la normale abbia l' origine nel comun concorso A dei tre assi, e che ne sia r la lunghezza contata dall' origine fino all' incontro del piano. Immaginiamola prolungata altrettanto di là dal piano fino in B in modo che si abbia AB$=2r$; e sieno x', y', z' le coordinate dell' estremità B. Siccome il piano divide in mezzo la normale AB, è chiaro che ogni suo

F. 236

punto M sarà equidistante dalle due estremità A,B; e poichè chiamando x, y, z le coordinate di questo punto qualunque, si ha $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ per la distanza di M da A (1074), e $\sqrt{((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2)}$ per la distanza da B, dovrà esser dunque $\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}=\sqrt{((x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2)}$; d'onde $xx'+yy'+zz'=\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{2}$. Ma (1082) $x'^2+y'^2+z'^2=(2r)^2$, e (1075) $x'=2r\cos rx$, $y'=2r\cos ry$, $z'=2r\cos rz$, dunque $x\cos rx+y\cos ry+z\cos rz=r$, equazione cercata, nella quale per quanto appariscano quattro costanti, a differenza della precedente (1098) ove non erano che tre sole; pure sia perchè una può sempre togliersene col mezzo della divisione, sia perchè tra le tre prime esiste la relazione (1075) $\cos^2 rx+\cos^2 ry+\cos^2 rz=1$, che rende una di esse dipendente dall'altre due, esse non sono in sostanza che sole tre. Quest'equazione che nelle applicazioni si trova più opportuna della precedente, per quanto men semplice, si suole ordinariamente rappresentare con $Ax+By+Cz=D$, ove dunque D è la lunghezza della normale, o la distanza del piano dal punto d'origine, ed A, B, C sono i coseni delle inclinazioni della normale sopra i tre assi; e deve tra questi coefficienti sussistere la relazione $A^2+B^2+C^2=1$.

1100. Se l'equazione si divida per D, e si continui a rappresentarne il primo membro con $Ax+By+Cz$, avremo $Ax+By+Cz=1$. In tal caso sarà $A=\frac{\cos rx}{r}$, $B=\frac{\cos ry}{r}$, $C=\frac{\cos rz}{r}$, ed $A^2+B^2+C^2=\frac{1}{r^2}$. Di qui $r=\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$, $\cos rx=\frac{A}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$, $\cos ry=\frac{B}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$, $\cos rz=\frac{C}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}$, formule che danno la lunghezza e la posizione della normale, quando la posizione del piano sia conosciuta.

1101. Un piano resta altresì determinato quando se ne assegni la traccia e l'inclinazione sopra uno qualunque dei piani coordinati. Sia BC la traccia sul piano delle xy, ed abbia per equazione $x'=y'\tang\omega+b$ (1098); sarà AC$=b$ (1095.4°), ABC$=\omega$ (1098); e se da M, punto qualunque del piano, e di cui supporremo essere x, y, z le coordinate, si conducano l'ordinata MP$=z$ e la MQ normale a BC, da Q la QP, per P la DE parallela a BC, e infine da C la CN normale a DN, primieramente sarà MQP l'angolo d'inclinazione, che chiameremo θ, del piano dato con quello delle xy (701). Avremo poi $z=\mathrm{QP}\tang\theta=\mathrm{CN}\tang\theta=\mathrm{CE}\cos\omega\tang\theta$. Ma CE$=AR+RE-AC=x+y\tang\omega-b$; dunque $z=(x+y\tang\omega-b)\cos\omega\tang\theta$, ovvero $z-x\cos\omega\tang\theta=y\sen\omega\tang\theta-b\cos\omega\tang\theta$, equazione del piano, che potrà mettersi o sotto la forma $z+Ax+By=C$ della prima (1098), o sotto l'altra $Ax+By+Cz=D$ della seconda (1099), dopo averla in quest'ultimo caso moltiplicata o per $\cos\theta$, o per $\cot\theta$. Adottando il primo fattore, avremo $A=-\sen\theta\cos\omega$, $B=-\sen\theta\sen\omega$, $C=\cos\theta$, ed $A^2+B^2+C^2=1$ come nella seconda (1099).

F.237

1102. Infine si osserverà che tanto il punto, quanto la retta ed il piano, vengon

rappresentati da equazioni di primo grado. Ma il punto ne ha tre, la retta due, il piano una.

Equazioni della retta e del piano dipendenti da condizioni assegnate

1103. L' equazioni generali della retta e del piano, quali le abbiamo stabilite, han sempre luogo qualunque sia la posizione dell' una e dell' altro nello spazio. Che se la posizione sia determinata da condizioni date, l' equazioni non cambieranno di forma, ma le loro costanti o parametri prenderanno dei valori particolari, che diversificheranno secondo la varia natura delle supposte condizioni, conforme appunto si notò trattando dei parametri delle rette e delle curve stese in un piano dato (1053). Esporremo quì pure questa Teoria in foggia di quesiti, nei quali non faremo entrare se non quei soli casi che pongono in rapporto rette con rette, o piani con piani, o rette con piani, riserbandoci ad estendere in seguito le stesse ricerche alle rette ed ai piani tangenti e secanti, cioè che toccano dovunque, o comunque attraversano la superficie di un dato solido. E quanto alle tre diverse equazioni del piano, adotteremo la prima (1098) come più semplice. I risultamenti che se ne otterranno potran poi ridursi a quelli che ottenuti si sarebbero dall' altra e più comune $Ax+By+Cz=D$, sostituendo $-\frac{A}{C}$, $-\frac{B}{C}$, $\frac{D}{C}$ in luogo di A, B, C. Per comodo di discorso nomineremo i punti per mezzo delle loro coordinate, scrivendo per esempio $x'y'z'$ per denotare quel punto che ha le coordinate x', y', z'. Supporremo inoltre ortogonali gli assi coordinati.

1104. I°. Trovar l' equazioni di una retta che passa per un punto dato $x'y'z'$. Si suppongano $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni cercate (1094). Come riflettemmo in simil caso anche altrove (1054), è chiaro che se la retta deve passare per il punto dato, può dunque questo considerarsi come uno dei punti di quella, e debbon perciò fra le sue coordinate aver luogo le stesse equazioni di rapporto che sussistono fra quelle d'ogni altro punto della retta. Avremo dunque $x'=az'+b$, $y'=a'z'+b'$. Di quì i valori di b, b', che sostituiti nelle due precedenti supposte equazioni, daranno per l' equazioni cercate, e proprie del caso nostro $x=a(z-z')+x'$, $y=a'\times(z-z')+y'$; ove restando indeterminate a, ed a', ne risulta che la retta potrà avere un' infinità di direzioni (1094.4°), come è d' altronde evidente.

1105. II°. Trovar l' equazioni d' una retta che passa per due punti dati $x'y'z'$, $x''y''z''$.

Supposte come sopra $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni cercate, la doppia condizione darà $x'=az'+b$, $y'=a'z'+b'$, $x''=az''+b$, $y''=a'z''+b'$. Di quì i valori di a, b, a', b', che sostituiti nelle due equazioni, daranno per quelle della retta cercata $x(z'-z'')=z(x'-x'')+z'x''-x'z''$, $y(z'-z'')=z(y'-y'')+z'y''-y'z''$; ove non restando alcuna indeterminata, si conclude che la retta la quale passa per i due dati punti non può esser che unica.

1106. III°. Trovar l' equazioni di una retta parallela ad un' altra data, e che passi per un punto dato $x'y'z'$.

Sieno $x''=az''+b$, $y''=a'z''+b'$ l' equazioni della retta data, potranno supporsi $x=az+\beta$, $y=a'z+\beta'$ quelle della parallela (1094.5°), con le quali attesa l' altra condizione del problema, dovranno aver luogo le due $x'=az'+\beta$, $y'=a'z'+\beta'$. Di quì i valori di β, β' che daranno per le due equazioni cercate $x=a(z-z')+x'$, $y=a'(z-z')+y'$. Se la retta data è uno degli assi, per esempio l' asse Z, saranno nulle a, ed a' (1094), ed avremo $x=x'$, $y=y'$. Se il punto dato cade sull'asse X, saranno nulle y' e z', ed avremo $x=az+x'$, $y=a'z$.

1107. IV°. Trovare l' equazione di un piano che passa per un dato punto $x'y'z'$.

Si supponga $z=Ax+By+C$ l' equazione del piano; per ragioni eguali a quelle prodotte sopra (1104), dovrà aver luogo altresì l' equazione $z'=Ax'+By'+C$. Di quì il valor di C, che introdotto nell' equazione supposta darà per la cercata $z-z'=A(x-x')+B(y-y')$, ove restando le due indeterminate A,B, si comprende come per il punto dato può passare un' infinità di piani.

1108. V°. Trovare l' equazione di un piano che passa per due punti dati $x'y'z'$, $x''y''z''$.

Sia come sopra $z=Ax+By+C$ l' equazione cercata del piano. Dovrà aversi $z'=Ax'+By'+C$, $z''=Ax''+By''+C$, d' onde tratto il valore di C, e d'uno qualunque dei due coefficienti A, B, e l' uno e l' altro introdotti in quello di z, avremo l' equazione richiesta, nella quale resterà un' indeterminata soltanto.

1109. VI°. Trovar l' equazione di un piano che passa per tre punti dati $x'y'z'$, $x''y''z''$, $x'''y'''z'''$.

Supposta la solita equazione del piano, avremo le tre altre $z'=Ax'+By'+C$, $z''=Ax''+By''+C$, $z'''=Ax'''+By'''+C$, che serviranno a determinare i tre coefficienti A,B,C, e a darci quindi la richiesta equazione senza indeterminata veruna. E quì può notarsi che se i tre punti sieno sopra i tre assi, cioè il primo sull' asse X, il secondo sull' asse Y, il terzo sull' asse Z, saranno nulle per il primo y' e z' (1080.2°), per il secondo x'', z'', per il terzo x''', y'''. L' ultima equazione darà dunque immediatamente $C=z'''$, e quindi le prime due $A=-\frac{z'''}{x'}$, $B=-\frac{z'''}{y''}$; con che l' equazione del piano si cangerà in $zx'y''+xy''z'''+yx'z'''=x'y''z'''$. Che se inoltre i tre punti sieno equidistanti dall' origine, nel qual caso il piano è base d' una piramide tetraedra regolare, di cui x', y', z' sono gli spigoli eguali, avremo per equazione di questa base $x+y+z=x'$. Ora x, y, z sono in questo caso tre normali, che da un punto qualunque della base scendono sulle facce della piramide; si concluderà perciò che *se da un punto qualunque della base di una piramide tetraedra regolare si conducano tre normali sulle tre facce, la loro somma è costante, ed eguaglia la lunghezza d' uno degli spigoli o lati.*

1110. VII°. Dati di posizione due piani non paralleli, trovar l' equazioni della loro comune intersezione.

Sia $z=Ax+By+C$ l' equazione dell' uno dei dati piani, e $z=A'x+B'y+C'$ quella dell' altro; le quantità A, B, C, A', B', C' saranno tutte note, supponendosi nota la posizione dei piani (1098.7°). Inoltre poichè l' intersezione è una retta comune ad ambedue, spetteranno perciò a ciascun punto della medesima tanto la prima, che la seconda equazione; e rapporto unicamente a questa retta, le y, x, z dell' una saranno quantità in tutto identiche ed equivalenti a quelle dell' altra. Or se da queste equazioni riunite si elimini z, avremo $(A-A')x+(B-B')y+C-C'=0$; se si elimini y, avremo $(B'-B)z+(A'B-AB')x+BC'-B'C=0$, equazioni di cui la prima rappresenterà la projezione dell' intersezione cercata sul piano delle xy (1094.1°. e 2°), la seconda la rappresenterà sul piano delle xz; e quindi ambedue serviranno a dar la posizione della retta cercata (1094), o saranno le domandate equazioni.

1111. Se il secondo dei due piani fosse parallelo al piano coordinato delle xy, o a quello delle xz, o a quello delle yz, avrebbe per equazione nella prima ipotesi (1098.5°) $z=C'$, nella seconda $y=C'$, nella terza $x=C'$. L'equazioni dell'intersezione sarebber quindi nel primo caso $z=C'$, $Ax+By=C'-C$, nel secondo $y=C'$, $z=Ax+BC'+C$, nel terzo $x=C'$, $z=By+AC'+C$. E se di più sì l' uno che l' altro piano passassero per un punto noto $x'y'z'$, con le due equazioni corrispondenti al primo caso sussisterebbero l' altre due $z'=C'$, $Ax'+By'=C'-C$; con quelle corrispondenti al secondo sussisterebbero le due $y'=C'$, $z'=Ax'+BC'+C$; e con le corrispondenti al terzo le due $x'=C'$, $z'=By'+AC'+C$. La nuova condizione ridurrà dunque l' equazioni di cui trattiamo a $z=z'$, ed $A(x'-x)=B(y-y')$ se il piano sia parallelo a quello delle xy; ad $y=y'$, e $z-z'=A(x-x')$ se sia parallelo a quello delle xz, ed infine ad $x=x'$, e $z-z'=B(y-y')$ se sia parallelo a quello delle yz. Faremo in seguito buon uso di queste ricerche.

1112. VIII°. Trovar l' equazione di un piano che passi per un punto dato $x'y'z'$ parallelamente ad un piano dato.

Sia $z=Ax+By+C$ l' equazione del piano dato; sarà $z=Ax+By+C'$ quella del piano parallelo (1098.2°), ove non avremo d' incognite che la sola C'. Or poichè il punto dato deve per condizione trovarsi sul piano parallelo, dovrà dunque sussistere fra le sue coordinate l' equazione $z'=Ax'+By'+C'$; di quì il valor di C', che sostituito nell' equazione generale, darà $z=A(x-x')+B(y-y')+z'$, equazione cercata del piano parallelo. Se il piano dato è uno dei coordinati, per esempio quello delle xy, saranno nulli A, B (1098.5°), e l' equazione diverrà $z=z'$. E se il punto cade in uno degli assi, come sarebbe sull' asse X, saranno nulle y', z' (1080. 2°), ed avremo $z=A(x-x')+By$.

1113. IX°. Trovar l' equazioni del punto d' incontro o d' intersezione di due rette.

Sieno $x'=az'+b$, $y'=a'z'+b'$ l' equazioni d' una delle due rette, ed $x''=\alpha z''+6$, $y''=\alpha' z''+6'$ quelle dell' altra. Supposte x, y, z le tre coordinate del pun-

to d' incontro, siccome questo deve trovarsi in ciascuna delle due rette; dovremo aver dunque simultaneamente $x=az+b$, $y=a'z+b'$, $x=\alpha z+\beta$, $y=\alpha' z+\beta'$. Eliminando dalle quattro equazioni le tre coordinate, si ottiene $(a'-\alpha')(b-\beta)-(a-\alpha)(b'-\beta')=0$, equazione fra i soli coefficienti delle rette date, la quale rendendo uno di essi dipendente dai rimanenti, mostra, come già d' altronde è chiaro, che non tutte le rette comunque situate nello spazio posson tra loro incontrarsi, ma quelle sole che hanno l' una relativamente all' altra una determinata posizione, indicata appunto dal rapporto o *condizione analitica* tra i coefficienti, voluta dalla trovata equazione. Se questa condizione sussiste; dalle quattro equazioni superiori avremo $x=\frac{a\beta-\alpha b}{a-\alpha}$, $y=\frac{a'\beta'-b'\alpha'}{a'-\alpha'}$, $z=\frac{\beta-b}{a-\alpha}$, oppure $z=\frac{\beta'-b'}{a'-\alpha'}$, equazioni del punto d' incontro cercato.

Si noti che se le due rette fossero parallele, e si avesse perciò $\alpha=a$, $\alpha'=a'$ (1094.5°), l' equazione di condizione sussisterebbe, ma risultando allora $x=\infty$, $y=\infty$, $z=\infty$, l'incontro non può dunque in questo caso aver luogo. Ciò è anche mostrato dai superiori valori di x ed y, dai quali si avrebbe $\beta=b$, $\beta'=b'$, valori contradittorj, e che non possono aver luogo che qualora le due rette sieno coincidenti.

1114. X°. Trovar l' equazione del punto in cui una data retta incontra un dato piano.

Supposte al solito $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l'equazioni della retta, e $z'=Ax'+By'+C$ quella del piano, dovrà nel punto d' incontro aversi $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$ e quindi $z=Ax+By+C=A(az+b)+B(a'z+b')+C$. Di quì per una dell'equazioni del punto, $z=\frac{Ab+Bb'+C}{1-Aa-Ba'}$; sostituito poi questo valore in quelli di x e d' y, avremo le altre due.

1115. XI°. Trovar l'equazioni d'una retta stesa sopra un piano dato.

Poichè questa retta deve aver comuni col piano tutti i suoi punti, supposto che uno di essi abbia per coordinata z, dovrà aversi, come nel problema precedente, $z(1-Aa-Ba')=Ab+Bb'+C$; e supposto che un altro abbia per coordinata z', dovrà aversi del pari $z'(1-Aa-Ba')=Ab+Bb'+C$. Di quì $(z-z')(1-Aa-Ba')=0$; e poichè z e z' posson esser qualunque, nè perciò può ammettersi in generale $z-z'=0$, dovrà esser dunque $1-Aa-Ba'=0$, e quindi ancora $Ab+Bb'+C=0$. Da queste due equazioni, contenenti le condizioni analitiche di una retta stesa sopra d'un piano, si trarranno i valori di a, b da porsi nella prima delle due equazioni della retta. Nella seconda $y=a'z+b'$, i coefficienti a', b' rimarranno indeterminati, il che al solito palesa doppiamente infinite di numero le rette che possono stendersi sopra un dato piano.

Se in luogo dei coefficienti a, b spettanti alla retta, si traggano dalle due equazioni di condizione i valori di due dei coefficienti A, B, C spettanti al piano, avremo allora l' equazione del piano che passa lungo una retta data; e come uno dei tre

coefficienti rimane indeterminato, così resta chiaro che infiniti di numero sono i piani i quali posson condursi lungo una data retta.

1116. XII°. Trovar l'equazione di un piano che passa lungo due rette date.

Sieno $x=az+b, y=a'z+b'$, ed $x'=\alpha z'+\beta, y'=\alpha'z'+\beta'$ l'equazioni delle due rette; avremo (1115) $1-Aa-Ba'=0$, $Ab+Bb'+C=0$ per l' una, ed $1-A\alpha-B\alpha'=0$, $A\beta+B\beta'+C=0$ per l'altra. Frattanto se i valori di A, B, C avuti dalle tre prime equazioni si sostituiranno nella quarta, troveremo $(a-\alpha)(b'-\beta')-(a'-\alpha')\times(b-\beta)=0$, equazione affatto indipendente dai coefficienti del piano, e che coincide con la condizione analitica dell' incontro delle due rette (1113). Ciò mostra che il piano non potrà passare per le due rette, se queste non s' incontrano o non sieno parallele, il che è per se stesso chiaro. Ammessa questa condizione, tre qualunque delle quattro superiori equazioni daranno il valore dei coefficienti A, B, C per l' equazione di un piano che passa per le due rette, e che non potrà esser che unico.

1117. XIII°. Trovar l'equazioni di una retta che passa per un punto dato parallelamente ad un piano dato.

Oltre le due equazioni $x=a(z-z')+x'$, $y=a'(z-z')+y'$ dovute alla retta cercata in virtù della prima condizione (1104), le apparterrà anche l' altra $z=A(x-x')+B(y-y')+z'$, quella cioè del piano parallelo al dato, e che passa per il punto dato (1112). Posto in questa il valor di x preso dalla prima, e osservando che $y-y'=a'(z-z')$, avremo $1-Aa=Ba'$, equazione che non contenendo veruna coordinata del punto dato, appartien dunque in comune a tutte quante le rette parallele al piano, ossia contiene la condizione analitica, posta la quale una retta delle equazioni $x=az+b$, $y=a'z+b'$ è parallela ad un dato piano. Tratto da questa il valor di a', e sostituitolo nella seconda delle due equazioni primitive, avremo quelle della parallela cercata. Il valor di a restando indeterminato, mostra che il problema ha un numero indefinito di soluzioni. Infatti qualunque retta condotta sul piano p. r llelo e che passi per il punto dato, è atta a soddisfarvi.

1118. XIV°. Trovare l' equazioni della retta che da un punto dato $x'y'z'$ scende normalmente ad un piano dato. F. 236

La prescrizione del punto di partenza darà, come sopra (1104), per equazioni della retta $x=a(z-z')+x'$, $y=a'(z-z')+y'$, e resteranno da determinarsi a ed a'. Sia frattanto $z=Ax+By+C$ la solita equazione del piano dato. Dovendo questo esser normale alla retta, le sue tracce BC, BD sui piani delle xz ed yz (1098) saranno normali alle due projezioni della retta sopra i medesimi piani (706), e perciò, come è facile a vedersi, gli angoli che le due projezioni fanno con l' asse Z saranno respettivamente supplementi degli angoli che l' una delle tracce fa con l' asse X, l' altra con l' asse Y. Ma questi han per tangenti A, B (1098.1°), quelli a, a' (1094.1°); dunque $a=-A$, $a'=-B$, e quindi per l' equazioni richieste $x=-A(z-z')+x'$, $y=-B(z-z')+y'$.

1118. XV°. Poste le stesse cose trovar l' equazioni del punto, ove il piano è incontrato dalla normale.

Dovendo questo punto appartenere insieme alla retta ed al piano, avranno luogo contemporaneamente per esso e le due equazioni della retta, e quella del piano. Con queste, fatto $C-z'+Ax'+By'=L$, troveremo per le tre coordinate del punto cercato $z=\frac{L}{1+A^2+B^2}+z'$, $x=-\frac{AL}{1+A^2+B^2}+x'$, $y=-\frac{BL}{1+A^2+B^2}+y'$.

1119. XVI°. Trovar l' espressione della distanza di un punto ad un piano, o della normale condotta da quello su questo.

Le tre equazioni precedenti danno $z-z'=\frac{L}{1+A^2+B^2}$, $x-x'=-\frac{AL}{1+A^2+B^2}$, $y-y'=-\frac{BL}{1+A^2+B^2}$; dunque $\sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)}=\ldots\ldots\frac{L}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$, distanza cercata in quanto che il primo membro rappresenta quella del punto dato al punto d' incontro della normale col piano (1082), o delle due estremità della normale. Se il punto dato è all'origine, avremo $L=C$ (1080.2°), e posti $-\frac{A}{C}$, $-\frac{B}{C}$, in luogo di A, B, (1103), incontreremo l' espressione trovata altrove (1100).

1120. XVII. Trovare il valor dell' angolo rr' fatto da due rette date r,r'.

Supposte $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l'equazioni di una delle rette, ed $x'=\alpha z'+\beta$, $y'=\alpha' z'+\beta'$ quelle dell' altra, saranno 1ª. $x=az$, 2ª. $y=a'z$, 3ª. $x'=\alpha z'$, 4ª. $y'=\alpha' z'$ quelle di due rette ρ, ρ' condotte dal concorso degli assi parallelamente alle date (1094. 5°, 1095.1°), e l' angolo delle quali sarà per conseguenza equivalente al cercato rr'. Preso sull' una e sull' altra parallela un punto alla distanza 1 dall' origine, e chiamata δ la distanza dell' uno all' altro, avremo (1074) 5ª. $x^2+y^2+z^2=1$, 6ª. $x'^2+y'^2+z'^2=1$, 7ª. (1082) $\delta^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$, cioè, per la 5ª. e la 6ª., $\delta^2=2(1-xx'-yy'-zz')$. Ma altresì (845) $\delta^2=2-2\cos rr'$, dunque 1°. $\cos rr'=xx'+yy'+zz'$; ed introdotti i valori delle sei coordinate tratti dalle sei equazioni precedenti, sarà 2°. $\cos rr'=\frac{1+a\alpha+a'\alpha'}{\sqrt{(1+a^2+a'^2)}\sqrt{(1+\alpha^2+\alpha'^2)}}$.

1121. Quindi 1°. se l' una delle rette è normale all' altra avremo $\cos rr'=0$, ed $1+a\alpha+a'\alpha'=0$, equazione dalla quale si ha dunque il rapporto analitico che deve esistere fra i coefficienti a, a', α, α', ogni qual volta le due rette proposte sieno fra loro normali. 2°. Se r' è parallela all' asse X. ρ' coinciderà con quest' asse; avremo quindi $y'=0$, $z'=0$ (1092.3°.), e la 6ª. darà $x'=1$. Di qui $\cos rx=x=az$; ma la 1ª. 2ª. e 5ª. danno $z^2=\frac{1}{a^2+a'^2+1}$, dunque $\cos rx=\frac{a}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}$. Nel modo stesso si troverebbe $\cos ry=\frac{a'}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}$, $\cos rz=\frac{1}{\sqrt{(a^2+a'^2+1)}}$ nei casi che r' fosse parallela all' asse Y, o all' asse Z.

1122. Queste tre formule daranno dunque i coseni degli angoli che la retta qualunque r fa con gli assi. Si osserverà di passaggio, che quadrate e sommate ren-

dono la relazione già nota (1075) $\cos^2 rx+\cos^2 ry+\cos^2 rz=1$. Permutandovi poi a ed a' in α ed α', si avranno parimente i coseni degli angoli $r'x, r'y, r'z$ che fa con gli assi l' altra retta qualunque r'. Moltiplicando quindi ciascuno dei primi per il corrispondente fra i secondi, e sommando i prodotti, incontreremo il primo dei valori di $\cos rr'$ (1120.1°). Dunque $\cos rr'=\cos rx \cos r'x+\cos ry \cos r'y+\cos rz \cos r'z$ nuova ed importante espressione del coseno dell'angolo delle due rette; rapporto alla quale noteremo 1°. che se le due rette son normali, dovrà aversi $\cos rx \cos r'x+\cos ry \cos r'y+\cos rz \cos r'z=0$; 2°. che se con le due rette si rappresentino due qualunque degli assi obliqui X', Y', Z', nei quali si permutarono gli assi ortogonali X, Y, Z (1083), la nuova espressione darà

$$\cos x'y'=\cos x'x \cos y'x+\cos x'y \cos y'y+\cos x'z \cos y'z$$
$$\cos x'z'=\cos x'x \cos z'x+\cos x'y \cos z'y+\cos x'z \cos z'z$$
$$\cos y'z'=\cos y'x \cos z'x+\cos y'y \cos z'y+\cos y'z \cos z'z.$$

relazioni che unite alle tre altre $\cos^2 x'x+\cos^2 x'y+\cos^2 x'z=1$, $\cos^2 y'x+\ldots$ $\cos^2 y'y+\cos^2 y'z=1$, $\cos^2 z'x+\cos^2 z'y+\cos^2 z'z=1$ formano tutte le condizioni relative agli assi obliqui.

1123. XVIII°. Trovar l' angolo θ fatto da due dati piani.

Sieno al solito $z=Ax+By+C$, $z'=A'x'+B'y'+C'$ l' equazioni dei due piani. Condotte dall' origine due rette r, r', respettivamente normali ai due piani, sarà per l' una (1118) $a=-A$, $a'=-B$, e per l' altra $\alpha=-A'$, $\alpha'=-B'$, e il loro angolo rr' eguaglierà uno dei due che fa l' uno dei piani cadendo sull' altro. Dunque $\cos\theta=\cos rr'=$ (1120.2°) $\dfrac{1+AA'+BB'}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}\sqrt{(1+A'^2+B'^2)}}$; onde se i piani sono ad angolo retto, sarà $1+AA'+BB'=0$.

1124. Che se uno dei due piani, per esempio il secondo, sia parallelo ad uno dei piani coordinati, si cangi θ in θ', oppure in θ'', o in θ''', secondo che il parallelismo avrà luogo rapporto ai piani delle yz, o delle xz, o delle xy, sarà $\theta'=rx$, $\theta''=ry$, $\theta'''=rz$, ed avremo visibilmente (1121. 2°) $\cos\theta'=\cos rx=\dfrac{A}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$ $\cos\theta''=\cos ry=\dfrac{B}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$, $\cos\theta'''=\cos rz=\dfrac{1}{\sqrt{(1+A^2+B^2)}}$, valori che quadrati e sommati danno $\cos^2\theta'+\cos^2\theta''+\cos^2\theta'''=\cos^2 rx+\cos^2 ry+\cos^2 rz=$ (1075) 1; d' onde si ha che *la somma dei quadrati dei coseni degli angoli d' inclinazione d' un piano sopra i tre piani coordinati è costante, ed eguale al quadrato del raggio.*

1125. Questo Teorema ci fa strada ad altri non meno eleganti, relativi alle projezioni delle figure piane, dei quali eccone due scelti tra i principali. Sia a l' area di una figura qualunque segnata sul piano dato, e p', p'', p''' quelle delle sue tre projezioni sui piani coordinati. Se facciamo attraversar la figura da un piano parallelo a quello delle xy, si comprenderà senza pena che l' angolo d' inclinazione e la

projezione della figura su questo piano saranno in tutto equivalenti all' inclinazione θ' della projezione p' sul piano delle xy; e che presa per asse comune delle ascisse della figura e della sua projezione l' intersezione della figura col nuovo piano, e chiamate u, u' le coordinate che nella figura e nella projezione corrispondono ad una stessa ascissa t, avremo $u' = u\cos\theta'$. Dunque altresì poichè le due aree a, p' posson riguardarsi come la somma di tutte le ordinate della figura e della projezione, sarà manifestamente $p' = a\cos\theta'$; cioè, *l' area della projezione è eguale a quella della figura moltiplicata per il coseno della sua inclinazione sul piano.* Sarà dunque del pari $p'' = a\cos\theta''$, $p''' = a\cos\theta'''$, e quindi quadrando e sommando $p'^2 + p''^2 + p'''^2 = a^2(\cos\theta'^2 + \cos\theta''^2 + \cos\theta'''^2) = a^2$; d'onde si ha che *il quadrato dell' area di una figura qualunque eguaglia la somma dei quadrati delle sue projezioni sopra i tre piani coordinati.* Tutto ciò è conforme a quanto già rilevammo rapporto alle projezioni delle rette (1076).

1126. Immaginiamo adesso che l' area a sia quella del triangolo formato dalle tre tracce del piano. È chiaro che questo triangolo verrà ad esser la base di una piramide triangolare, col vertice al concorso degli assi e rettangolare; come è chiaro altresì che ciascuna delle tre facce laterali corrisponderà precisamente alla projezione del triangolo sopra i tre piani ortogonali. Potremo dunque concludere in generale l'altro bel Teorema, che *in ogni piramide tetraedra e col vertice rettangolare, il quadrato dell' area della base eguaglia la somma dei quadrati dell' aree di ciascuna delle tre facce.*

1127. Tutte le formule precedenti suppongono ortogonali gli assi coordinati, siccome annunziammo in principio (1103). Per dare almeno una qualche idea sul modo di trasformarle, qualora gli assi si cangino in obliquangoli, proporremo di ricercare qual diverrebbe in questo caso l' espressione r della distanza di un punto qualunque B preso nello spazio dall' origine A (1082), indagine quanto semplice nel suo soggetto, altrettanto importante per le numerose sue applicazioni.

Poichè per gli assi ortogonali abbiamo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, se in luogo di x, y, z si pongano i loro valori dati per le coordinate x', y', z' che riferiscono il punto B agli assi obliqui (1084), e tutto si sommi, e si avverta al noto teorema (1075), troveremo.

$$\begin{aligned} r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 &+ 2x'y'(\cos x'x \cos y'x + \cos x'y \cos y'y + \cos x'z \cos y'z) \\ &+ 2x'z'(\cos x'x \cos z'x + \cos x'y \cos z'y + \cos x'z \cos z'z) \\ &+ 2y'z'(\cos y'x \cos z'x + \cos y'y \cos z'y + \cos y'z \cos z'z) \end{aligned}$$

Ora è chiaro che siccome gli assi nuovi s' incontrano nell' origine A, considerati a due a due potranno riguardarsi come le due rette r, r' di cui abbiamo ragionato di sopra (1120), e per le quali si è trovato

$$\cos rr' = \cos rx \cos r'x + \cos ry \cos r'y + \cos rz \cos r'z$$

Di qui è facile concludere che nell' ottenuta espressione di r^2, tutto intero il coeffi-

ciente di $2x'y'$ equivarrà a $\cos x'y'$, quello di $2x'z'$ a $\cos x'z'$, quello di $2y'z'$ a $\cos y'z'$; d' onde infine

$$r^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2(x'y'\cos x'y' + x'z'\cos x'z' + y'z'\cos y'z').$$

1128. È osservabile che la distanza r equivale alla diagonale d' un parallelepipedo obliquo costruito sopra i tre assi obliquangoli e coi lati o spigoli x', y', z'. Dunque *nel parallelepipedo obliquo il quadrato della diagonale eguaglia la somma dei quadrati dei lati, più i doppj prodotti binarj dei lati moltiplicati per i coseni degli angoli da essi compresi.* Che se il parallelepipedo sia rettangolo, allora il quadrato della diagonale eguaglierà la somma dei quadrati dei lati.

Equazioni generali delle superficie cilindriche, coniche e di rivoluzione

1129. Abbiasi una superficie cilindrica, e per maggior generalità supponiamo che non una circonferenza, ma una curva qualunque data ne sia la base (753). Potremo dunque riguardarla come generata da una retta che scorra parallelamente a sè stessa lungo la data curva, e chiameremo quella *generatrice*, questa *direttrice*. Sieno frattanto $x=az+b$, $y=a'z+b'$ l' equazioni della generatrice allorchè giunge ad un punto qualunque F della direttrice. Si sa (1095) che b, b' varieranno di valore col punto F; mentre a, a' saran costanti, giacchè la retta generatrice si mantiene in ipotesi sempre parallela a se stessa (1094. 5°). Frattanto siccome il punto F appartiene insieme e alla generatrice e alla direttrice, spettano dunque ad esso tanto le due equazioni precedenti, quanto le due della curva direttrice (1096). Abbiamo dunque per rapporto a questo punto quattro equazioni, tutte coesistenti, e tali perciò che le x, y, z dell' una sono le stesse che quelle dell' altra, comecchè tutte relative ad un punto medesimo. Potremo dunque col mezzo di dette quattro equazioni eliminare queste tre coordinate, d' onde risulterà un' equazione fra le sole variabili b, b', nella quale sostituito il valor di $b=x-az$, e di $b'=y-a'z$, si avrà una nuova equazione fra le sole x, y, z indipendente affatto da b, b', e spettante perciò a ciascun punto della generatrice in qualunque delle sue situazioni, che è quanto dire a ciascun punto della superficie proposta, e che in conseguenza sarà l' equazione di questa superficie. Si supponga per esempio che la base del cilindro sia un circolo del raggio r, col centro all' origine delle coordinate, e situato sul piano delle xy. Avremo per ogni punto della sua circonferenza (1092. 2°.) $z=0$, $x^2+y^2=r^2$. Fatta la prescritta eliminazione risulterà $b^2+b'^2=r^2$, e quindi per l'equazione richiesta $(x-az)^2+(y-a'z)^2=r^2$. Che se il cilindro sia normale al piano delle xy, avremo (1094. 6°.) $a=0$, $a'=0$, e l' equazione diverrà $x^2+y^2=r^2$, cioè sarà la stessa che quella della sua base, il che deve egualmente accadere, siccome è chiaro, qualora pure la base non sia circolare.

1130. Debba cercarsi adesso l' equazione alla superficie conica, per la quale intenderemo (754) quella qualunque superficie, che può venir generata da una retta

la quale tenendosi con uno dei punti ferma ad un centro fisso, sia fatta scorrere lungo una curva data, che sarà dunque in tal caso la direttrice del cono. Suppo-ste α, β, γ le coordinate del punto fisso, potremo esprimer con $x=a(z-\gamma)+\alpha$, $y=a'(z-\gamma)+\beta$ (1092) le due equazioni della retta generatrice allorchè toccherà la direttrice in un punto qualunque F. Saranno α, β, γ costanti, ed a, a' varieranno col punto F, poichè cangiando continuamente l'obliquità della generatrice sui piani, varia dunque altresì l'angolo delle projezioni con gli assi, dal quale a ed a' dipendono (1094.4°). Or se quì si ragioni come per rapporto al cilindro, concluderemo che queste equazioni spettando a tutta la retta generatrice, spettano anche al punto F, al quale d'altronde appartengono pure le due equazioni della direttrice (1096). Dovranno dunque a, a' esser tali che i valori x, y, z delle due prime equazioni soddisfacciano anche alle seconde; ed avremo perciò quattro equazioni coesistenti, dalle quali eliminate x, y, z, ne nascerà una quinta fra le variabili a, a', e quindi fra i loro valori $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}$, la quale essendo indipendente da a, a', apparterrà a tutta la generatrice in ogni posizione della medesima, e quindi alla superficie cercata. Si supponga per esempio che la direttrice sia un circolo del raggio r, steso sul piano delle xy, e col centro all' origine delle coordinate. L'equazioni della base o direttrice saranno $z=0$, $x^2+y^2=r^2$. L'eliminazione darà $(\alpha-a\gamma)^2+(\beta-a'\gamma)^2=r^2$, cioè posti i valori di a, a', $(\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha))^2+(\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta))^2=r^2(z-\gamma)^2$, equazione cercata. Se il cono è retto avremo $\alpha=0$, $\beta=0$ (1092.4°), e quindi $x^2+y^2=\frac{r^2}{\gamma^2}(z-\gamma)^2$, ove $\frac{r}{\gamma}$ è la tangente dell'angolo al vertice fatto dalla generatrice o apotema con l'asse.

1131. Vogliasi cercare infine l'equazione ad una superficie di rivoluzione; e per maggior semplicità si supponga l'asse di rivoluzione coincidente con l'asse delle z. Immaginata una qualunque sezione fatta normalmente all'asse, ad una distanza z dal piano delle xy, e suppostone ρ il raggio, la natura circolare della sezione darà $x^2+y^2=\rho^2$. Ma il raggio ρ è un'ordinata alla curva generatrice, e può quindi aversene il valore dato per z; sostituito dunque questo valore, avremo un'equazione fra x, y, z, che sarà la cercata. Così se la superficie sia quella di una sfera del raggio r, col centro in A concorso degli assi, avremo $\rho^2=r^2-z^2$, e per l'equazione della sfera $x^2+y^2+z^2=r^2$, come trovammo altrove (1079). Se sia un'ellissoide degli assi a, b, e col centro al medesimo punto, avremo $\rho^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-z^2)$, ed $x^2+y^2+\frac{b^2z^2}{a^2}=b^2$. Se sia una paraboloide del parametro p, e col vertice parimente in A, avremo $\rho^2=pz$, ed $x^2+y^2=pz$.

Dei modi di riconoscer la superficie corrispondente ad una data equazione, e di assegnarne la specie e la forma

1132. I punti della superficie di un solido non potendo trovarsi tutti in un piano, la sua equazione dovrà necessariamente contenere le tre coordinate, e sarà dunque rappresentata in generale da $F(x,y,z)=0$, oppure da $z=\varphi(x,y)$, e se l'equazione sia del grado m rapporto a z, e si dieno ad x, y dei valori qualunque, per ogni coppia di questi ne avremo m di z, tra i quali quelli che risulteranno reali porteranno a determinare altrettanti punti della superficie, che con tal via potrà esser descritta per punti discreti (917).

1133. Questo metodo, che in pratica non è affatto fuor d'uso, non sarebbe per altro valevole a dare in astratto, e prima della completa esecuzione, l'idea della forma che assumerà la superficie cercata. Assai più facilmente ne comprenderemo il corso, l'estensione ed anche le più rimarchevoli proprietà, se in luogo di tener dietro a quella moltitudine di punti fra loro disciolti, immagineremo decomposta la superficie in sezioni piane e parallele, e assegneremo la qualità e specie delle curve che ne sono i perimetri, e la legge con cui van desse succedendosi le une all'altre. Così ravviseremo esser una superficie prismatica quella nella quale troveremo che tutte le sezioni parallele son fra loro perfettamente eguali; essere una superficie conica quella nella quale troveremo che tutte le sezioni parallele son curve simili, e i cui parametri crescono o decrescono in una ragione costante; e infine esser superficie di rivoluzione quella nella quale troveremo un sistema di sezioni parallele tutte circolari, e coi centri disposti in una retta normale ai piani delle medesime.

1134. Chiameremo frattanto *sezioni primarie* quelle formate sulla superficie del solido da ciascuno dei tre piani coordinati; *sezioni secondarie* quelle formate da piani paralleli ai coordinati; *sezioni oblique* quelle formate da piani obliqui, di direzione qualunque. Ed è chiaro che se nell' equazione proposta $F(x,y,z)=0$ si porrà $z=0$, l'equazione $F(x,y)=0$ che ne risulta fra le coordinate x,y, rappresenterà la curva della sezione primaria fatta dal piano delle xy. Infatti tutti i punti a cui in tal caso si riferiscono le due coordinate x,y sono necessariamente su quel piano (1080. 2°), mentre non cessano di appartenere alla superficie a cui si riferisce l'equazione primitiva. Spettano dunque in comune alla superficie ed al piano, e quindi all' intersezione dell' una con l' altro. Nel modo stesso, se porremo $y=0$, ovvero $x=0$, avremo le sezioni primarie formate dai piani delle xz, o delle yz. Avremo poi una sezione secondaria parallela al piano delle xy, se daremo a z un valor qualunque κ, con che l' equazione della superficie si ridurrà di nuovo ad essere tra le due coordinate x, y; ma tutti i punti a cui si riferirà si troveranno in un piano parallelo a quello delle xy, e distante da esso dell' altezza κ; l' equazione rappresenterà dunque allora l' intersezione di questo nuovo piano con la superficie, e quindi una sezione secondaria. Variando poi successivamente il valor di

z, aver potremo qualunque delle rimanenti. Nel modo stesso ponendo $y=\beta$, $x=\alpha$, si avranno le sezioni secondarie parallele ai piani delle xz e delle yz. Quanto poi alle sezioni oblique, supposta $z=Ax+By+C$ l' equazione del piano secante, e come sopra $F(x,y,z)=0$ quella della superficie, ambedue riferite alla stessa origine ed ai medesimi assi, è chiaro che preso dall' una e posto nell' altra il valor di z, risulterebbe un' equazione tra le coordinate x,y, la quale apparterrebbe alla projezione della curva della sezione sul piano delle xy; nel modo stesso prendendo dall' una e ponendo nell' altra il valore di y o quello di x, si avrebbero l' equazioni delle projezioni sugli altri due piani; e quindi col mezzo di due qualunque di quelle tre equazioni saremmo in stato di conoscere la curva della sezione (1096).

1135. Ma volendola conoscer direttamente, e qual' è nel suo proprio piano, sarà indispensabile di riferirla a nuovi assi presi sul piano secante, su cui appunto si trova la curva. Si scelga frattanto per nuovo asse delle ascisse la traccia del piano secante sul piano delle xy (1098), e per origine l'intersezione di questa traccia con l' asse X. Sia θ l' inclinazione del piano secante o del piano della sezione su quello delle xy, ω l' angolo della traccia con l'asse X, e si chiamino x', y' le coordinate che sul piano secante riferiscono alla nuova origine ciascun punto della sezione. Sussisteranno manifestamente tra le tre coordinate x,y,z, e le due x',y', le relazioni date al par. 1087; essendo chiaro che quì, come precisamente si suppose in quel luogo, i punti della sezione a cui in generale, come a tutti gli altri della superficie, si riferiscono le prime, sono tutti nel piano determinato dalle seconde. Cangiato pertanto ψ in ω, avremo $x=\alpha+x'\cos\omega+y'\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\omega$, $y=-x'\mathrm{sen}\,\omega+y'\times\cos\theta\cos\omega$, $z=y'\mathrm{sen}\,\theta$, valori che sostituiti nell'equazione della superficie, ne daranno una nuova fra le coordinate x', y', che sarà quella della sezione. Per maggior semplicità, o supporremo il piano secante normale a quello delle xy, nel qual caso sarà $\theta=90°$ e quindi $x=\alpha+x'\cos\omega$, $y=-x'\mathrm{sen}\,\omega$, $z=y'$, o supporremo la traccia normale all' asse X, nel qual caso avremo $\omega=90°$, e quindi $x=\alpha+y'\cos\theta$, $y=-x'$, $z=y'\mathrm{sen}\,\theta$. Queste supposizioni non alterano la generalità del metodo, che potremo, qualor si voglia, applicare senza varietà alcuna ai casi d' ω e θ qualunque, nè altro avremo di più, che una complicazione di calcolo molto maggiore.

1136. Le superficie si dicono *continue*, qualora formano un tutto senza interruzione di parte alcuna; all' opposto si chiamano *discontinue* o *interrotte*, quando son composte di parti fra loro separate, il che, come possa accadere, meglio si comprenderà quando ne avremo veduto un esempio. Molti però usano di chiamare superficie *ad una falda* le prime, superficie *a due* o *più falde* le seconde. Ma per quanto questi modi di dire sembrino esser ormai quasi consacrati dall'uso, pur troppo son disdicevoli ed improprj, ed hanno un significato troppo contrario a quello che vorrebbesi loro attribuire, perchè non debba farsi di tutto onde eliminarli, se pure è più possibile, dalla scienza.

1137. Le superficie, come le curve (932) si dividono in ordini; e l' ordine si desume dalla più alta dimensione delle coordinate dell' equazione. E del pari che

nelle curve, si chiama *corda* ogni retta condotta da un punto ad un altro nell' interno della superficie; *diametro* quella retta che divide in mezzo un sistema di corde parallele; *centro* quel punto, se vi è, nel quale tutti i diametri s' incontrano e si dividono per metà. Si chiama poi *piano diametrale* quello che divide la superficie in due parti eguali; *piano principale* quello che passando per il centro incontra ad angolo retto un sistema intero di corde parallele. Per determinare se una superficie abbia o no diametri o centro, valgono presso a poco i medesimi criterj impiegati per la stessa ricerca relativamente alle curve (1034. e *segg.*). Così perchè una superficie di second' ordine sia dotata di centro, dovrà mancare di tutti i termini con le coordinate ad una sola dimensione.

1138. Illustriamo adesso con qualche esempio queste poche dottrine, e proponiamoci in primo luogo di trovar la superficie dell' equazione $z^2=ax^2+by^2+c$; e per maggior semplicità limitiamoci in principio a considerarla nel caso che le tre coordinate siend ortogonali. Primieramente è chiaro che questa superficie sarà dotata di centro. In secondo luogo, poichè l' equazione non cangia permutandovi z in $-z$, alla porzione di superficie che rimarrà al di sopra del piano delle xy, ne corrisponderà una in tutto eguale al di sotto di questo piano, il quale la dividerà dunque in due parti eguali. Altrettanto poi accaderà, e per la ragione medesima, relativamente agli altri due piani. In terzo luogo i segni che nel secondo membro accompagnano le costanti a,b,c non potranno esser tutti insieme negativi, altrimenti z risulterebbe immaginaria. Potranno bensì esser tutti positivi, o due positivi e il terzo negativo, o due negativi e il terzo positivo. Esamineremo a parte l' equazione proposta in ciascuno di questi casi, cominciando dal primo.

1139. Fatte successivamente $z=0, y=0, x=0$, avremo per le tre respettive sezioni primarie (1134) l' equazioni $ax^2+by^2+c=0$, $z^2-ax^2-c=0$, $z^2-by^2-c=0$. La prima è contradittoria e insussistente, poichè per qualunque valore si dia ad x e ad y, tutti i termini del primo membro rimangon sempre positivi, nè la loro somma può dunque esser mai zero. Ciò mostra che la superficie cercata non scenderà fino al piano delle xy, nè questo potrà intersecarla. Le rimanenti danno due iperbole (942); e se si riducano alle forme ordinarie (980) $x^2=\frac{1}{a}(z^2-c)$; $y^2=\frac{1}{b}(z^2-c)$, facilmente scorgeremo che le due curve hanno comune il centro al concorso dei piani coordinati, comune il vertice all' altezza $\sqrt{c}$ dal piano delle xy in un punto dell' asse Z, ove dunque s'incroceranno, comune per conseguenza ed eguale a $\sqrt{c}$ il semiasse trasverso sull' asse Z; e per semiasse conjugato l'una $\sqrt{\frac{c}{a}}$, l' altra $\sqrt{\frac{c}{b}}$. Si noti che inferiormente al piano delle xy, o nei prolungamenti di quelli delle xz e delle yz, avranno luogo le iperbole opposte.

1140. Quanto alle sezioni secondarie (1134), da $z=\alpha$ avremo per le sezioni

parallele al piano xy, 1ª. $ax^2+by^2+c-\varkappa^2=0$, da $y=6$ avremo per quelle parallele al piano xz, 2ª. $z^2-ax^2-b6^2-c=0$, e infine da $x=\alpha$, avremo per quelle parallele al piano yz, 3ª. $z^2-by^2-a\alpha^2-c=0$. La 1ª. è insussistente, e non dà dunque intersezione finchè sia $\varkappa<\sqrt{c}$; dà un punto sull' asse Z quando $\varkappa=\sqrt{c}$, nel qual caso si riduce ad $ax^2+by^2=0$, nè può esser soddisfatta che da $x=0$, $y=0$, equazioni che con l' altra $z=\varkappa=\sqrt{c}$, appartengono esclusivamente a quel punto dell' asse Z (1080.2°) che si trova alla distanza $\sqrt{c}$ dall' origine. Si noterà che questo punto coincide con quello ove s' incrociano le due iperbole corrispondenti alle due sezioni primarie 2ª. e 3ª. Infine con $\varkappa>\sqrt{c}$, l' equazione $ax^2+by^2+c-\varkappa^2=0$, ridotta alla forma $y^2=\frac{a}{b}\left(\frac{\varkappa^2-c}{a}-x^2\right)$, mostra che sempre e con qualunque valor di $\varkappa$ avremo un' ellisse col centro in un punto dell' asse Z, e coi semiassi $\sqrt{\frac{\varkappa^2-c}{a}}$, $\sqrt{\frac{\varkappa^2-c}{b}}$, diretti l' uno nel senso dell' asse X, l' altro in quello dell' asse Y. E ben si scorge che l' ellissi anderanno sempre crescendo con $\varkappa$, a misura cioè che le sezioni si scosteranno dal piano delle xy, e che i loro semiassi conserveranno sempre la costante ragione di $\sqrt{b}:\sqrt{a}$, e saranno perciò tutte simili trà di loro (1032). Di più è da osservarsi come sì l' uno che l' altro semiasse respettivamente coincidono e nel valore e nella posizione con le ordinate x, y delle iperbole primarie corrispondenti all' ascisse $z=\varkappa$; d' onde si ha che nell' alzarsi e nel crescere dell' ellissi secondarie, i loro quattro vertici seguiranno la traccia segnata dai rami delle due iperbole primarie.

1141. L' equazioni 2ª. e 3ª. mostrano che le sezioni secondarie nel senso degli altri due piani sono iperbole (942) come le sezioni primarie corrispondenti. Ridotte poi alla forma $x^2=\frac{1}{a}(z^2-(b6^2+c))$, $y^2=\frac{1}{b}(z^2-(a\alpha^2+c))$ fan chiaramente conoscere che ogni iperbola proveniente dalle sezioni parallele al piano delle xz avrà il centro sull' asse Y, il semiasse trasverso dato da $\sqrt{(b6^2+c)}$, e diretto nel senso dell' asse Z, e $\sqrt{\frac{b6^2+c}{a}}$ per semiasse coniugato; mentre ogni iperbola proveniente dalle sezioni parallele all' altro piano avrà il centro sull' asse X, $\sqrt{(a\alpha^2+c)}$ per semiasse trasverso, che sarà parimente diretto nel senso delle z, e $\sqrt{\frac{a\alpha^2+c}{b}}$ per semiasse coniugato. Tutte queste iperbole saranno dunque respettivamente simili, i loro vertici anderanno sempre più scostandosi dal piano delle x, y, e i semiassi sempre crescendo.

1142. Infine quanto alle sezioni oblique, dai piani secanti normali a quello delle xy, coi valori già stabiliti (1135) avremo, omessi gli apici, $y^2=x^2(a\cos^2\omega+b\,\mathrm{sen}^2\omega)+2a\alpha x\cos\omega+a\alpha^2+c$, equazione che per qualunque valor di ω dà sempre delle iperbole, le quali nel caso di $\alpha=0$, o che il piano secante passi per l' asse Z, avranno tutte $\sqrt{c}$ per semiasse trasverso come le iperbole primarie, e

$\sqrt{\frac{c}{a\cos^2\omega+b\,sen^2\omega}}$ per semiasse coniugato; mentre dai piani secanti obliqui a quello delle xy, e normali a quello delle xz, avremo (1135) $y^2(sen^2\theta-a\cos^2\theta)=a\alpha^2+2a\alpha y\cos\theta+bx^2+c$, equazione che darà un' iperbola, una parabola o un' ellisse, secondo che $tang\theta$ sarà o $>$, o $=$, o $<$ di $\sqrt{a}$ (942).

1143. Da tutto ciò apparisce 1.° che la superficie cercata non è rientrante, e si estende indefinitamente nello spazio, al di sopra e al di sotto del piano delle xy, come pure alla destra e alla sinistra degli altri due; 2.° che di più è discontinua, rimanendo interrotta da $z=\sqrt{c}$, ove ha principio la parte superiore al piano delle xy, fino a $z=-\sqrt{c}$, ove lo ha l' inferiore; 3.° che può riguardarsi come generata dal movimento parallelo di un'ellisse, la quale nel variar di posizione, varj altresì di grandezza in modo che i suoi quattro vertici striscino sempre sui rami di due differenti iperbole incrociate ad angolo retto fra loro; nel qual caso avverrà che del pari tutte le doppie ordinate strisceranno esse pure con le loro estremità sopra iperbole secondarie, parallele e simili alle primarie. Questo solido è conosciuto col nome d'*iperboloide ellittica* od anche *a due falde*, in quanto che è discontinuo (1136). Si noti che se nella proposta sia $b=a$, le sezioni ellittiche avranno assi eguali, e diverranno circolari; il solido sarà dunque di rivoluzione (1133). Se $a=b=1$ tutte le iperbole generate dalle sezioni primarie e secondarie diverranno equilatere. Se $c=0$, la sezione primaria sul piano delle xy (1139) cesserà d'essere immaginaria, e si confonderà col punto d' origine. Quelle sugli altri due piani si risolveranno in due sistemi di rette dell' equazioni $x=\pm z\sqrt{\frac{1}{a}}$, $y=\pm z\sqrt{\frac{1}{b}}$, che s' incroceranno parimente all' origine; ma tutte le secondarie (1140) conserveranno le loro respettive qualità o di ellissi o d' iperbole. Di più le sezioni normali al piano delle xy, oblique all'asse X e che passano per l'origine, si risolveranno come le primarie in altrettanti sistemi di rette: dal che tutto bene apparisce che il solido prenderà la forma di due opposti coni a base ellittica col vertice comune all'origine; d'onde la sua denominazione di *conoide ellittica*. Nè deve in fine omettersi d'osservare che in ciascuna di queste ipotesi l'angolo dell'asse trasverso con gli asintoti di tutte le iperbole parallele è invariabile, ed ha per tangente $\sqrt{\frac{1}{a}}$, o $\sqrt{\frac{1}{b}}$ (988), secondo che le iperbole son parallele al piano delle xz, o a quello delle yz. E siccome tutti gli asintoti hanno origine al centro di ciascuna delle iperbole, e in conseguenza sull'asse Y o sull'asse X, così queste rette da una parte e dall'altra dei piani coordinati verranno a formare un piano continuato.

1144. Sieno adesso nella proposta (1138) a, b positive, e c negativa. L'equazione si cangerà in $z^2=ax^2+by^2-c$, la quale per sezione primaria sul piano delle xy dà un'ellisse dei semiassi $\sqrt{c:b}$, $\sqrt{c:a}$ uno sull'asse Y, l'altro sull'asse X

e col centro all' origine; e per quelle sugli altri due piani dà due iperbole col centro parimente all'origine dei piani coordinati, col semiasse trasverso l'una sull'asse delle x ed eguale a $\sqrt{\frac{c}{a}}$, pari al semiasse conjugato dell'ellisse della sezione primaria, con cui quest' iperbola si troverà dunque in contatto; l'altra sull'asse delle y ed eguale a $\sqrt{\frac{c}{b}}$, pari a quello dell'ellisse con la quale essa pure si toccherà; e l' una e l' altra con $\sqrt{c}$ per semiasse minore che si confonderà coll' asse Z.

1145. In egual modo troveremo che le sezioni secondarie parallele al piano delle xy sono ellissi tutte tra loro simili, col centro sull'asse Z e coi semiassi $\sqrt{\frac{\varkappa^2+c}{b}}$, $\sqrt{\frac{\varkappa^2+c}{a}}$, reali per qualunque valore di $\varkappa$, e sempre crescenti con $\varkappa$; e potrà qui pure osservarsi, che tanto gli uni che gli altri semiassi hanno respettivamente i valori dell' ascisse y, x delle due iperbole primarie corrispondenti all' ordinata $z=\varkappa$; dal che facilmente si conclude che tutte queste ellissi avranno i loro quattro vertici appoggiati alla parte convessa delle due iperbole. Rapporto poi alle secondarie parallele ai piani delle xz e delle yz, troveremo essere iperbole dirette nel senso delle primarie, coi centri sugli stessi assi Y, X, coi semiassi trasversi $\sqrt{\frac{c-b\beta^2}{a}}$ per l'una, $\sqrt{\frac{c-a\alpha^2}{b}}$ per l' altra, e coi coniugati $\sqrt{(c-b\beta^2)}$ per quella, $\sqrt{(c-a\alpha^2)}$ per questa. Questi semiassi diminuiscono quindi a misura che le sezioni vanno scostandosi dai piani coordinati paralleli. Quando $\beta=\sqrt{\frac{c}{b}}$, o quando $\alpha=\sqrt{\frac{c}{a}}$, cioè per le sezioni che cadono sull'estremità degli assi dell'ellisse primaria (1144), i semiassi spariscono, e l'iperbole a quel punto si confondono coi loro asintoti. Continuando poi le sezioni a discostarsi, le iperole ricompariscono, ma diversamente dirette, cioè cogli assi trasversi paralleli all' asse Z, e coi coniugati paralleli all' asse X per le une, all'asse Y per le altre. Per le sezioni oblique avremo iperbole, parabole, ed ellissi nei casi che sopra (1142). Questa superficie conserva il nome d' *iperboloide* come la precedente, ma poichè non soffre interruzioni, così vien distinta con l'aggiunto di *continua* o *ad una falda*. Se $a=b$, le sezioni ellittiche si cangeranno in circolari, ed il solido sarà di rivoluzione, generato dal ravvolgimento di un' iperbola intorno all'asse trasverso.

1146. A questa medesima superficie, ma di posizione differente, porta il supposto di b, o di a negativa; poichè ponendo $z^2=ax^2-by^2+c$, si hanno per sezioni primarie $by^2-ax^2-c=0$, $z^2-ax^2-c=0$, $z^2+by^2-c=0$, la prima e la seconda delle quali sono iperbole, come nel caso precedente erano la secon-

da e terza, e l' ultima un' ellisse come allora era la prima. Ed altrettanto accade rapporto alle sezioni secondarie. Passeremo dunque immediatamente all'esame del caso di a, b ambedue negative, o dell' equazione $z^2+ax^2+by^2=c$. Ora è chiaro che questa darà sempre un' ellisse o si eguagli a zero una qualunque delle sue coordinate, o si ponga $z=\varkappa$, oppure $y=\beta$, o $x=\alpha$. E poichè per la prima delle tre sezioni primarie si trovano i semiassi $\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{\frac{c}{b}}$, e per le sue parallele $\sqrt{\frac{c-\varkappa^2}{a}}$ e $\sqrt{\frac{c-\varkappa^2}{b}}$; per la seconda $\sqrt{\frac{c}{a}}$ e $\sqrt{c}$, e per le sue parallele $\sqrt{\frac{c-b\beta^2}{a}}$ e $\sqrt{(c-b\beta^2)}$; per la terza $\sqrt{\frac{c}{b}}$ e $\sqrt{c}$, e per le sue parallele $\sqrt{\frac{c-a\alpha^2}{b}}$ e $\sqrt{(c-a\alpha^2)}$, così concluderemo 1°. che ciascun sistema di sezioni si compone d' ellissi simili; 2°. che l' ellissi secondarie vanno diminuendo in dimensione, a misura che le sezioni si scostano dai piani coordinati; 3°. che si riducono ad un punto, quando $\varkappa$ nel primo sistema, β nel secondo, α nel terzo giungono respettivamente ad eguagliare $\sqrt{c}$, $\sqrt{\frac{c}{b}}$, $\sqrt{\frac{c}{a}}$, al di là dei quali limiti divengono immaginarie, e manca quindi affatto la superficie. Rapporto alle sezioni oblique avranno manifestamente luogo l' equazioni trovate di sopra (1142) permutate a in $-a$, e b in $-b$; ed è chiaro che qualunque sieno θ ed ω, apparterranno sempre ad ellissi. Questa superficie, a cui si dà il nome d' *ellissoide*, è dunque limitata in tutti i sensi. Se $a=b$ la prima sezione primaria e le sue parallele divengon circolari, le altre due sezioni primarie si eguagliano tra di loro, e si ha un solido di rivoluzione generato dal ravvolgimento di una qualunque delle sue ellissi primarie intorno all' asse Z. Se $a=1$, o $b=1$, divengon circolari le sezioni del secondo, o del terzo sistema, eguali come sopra le sezioni primarie del primo e terzo, o del primo e secondo, e nasce di nuovo un' ellissoide di rivoluzione, prodotta dal ravvolgimento di una di queste ultime sezioni intorno all' asse Y nel primo caso, o intorno all' asse X nel secondo.

1147. Sia adesso l' equazione $z=ax^2+by^2+c$. La superficie corrispondente non avrà centro. Per giunger più facilmente a conoscerla, poniamo $z-c=z'$, con che l' equazione si cangerà in $z'=ax^2+by^2$; e potremo anche omettere l' indice della z, purchè si avverta che al piano delle xy deve allora supporsi sostituito il suo parallelo preso all' altezza $z'=c$. Sieno frattanto a, b ambedue positive, e si continui a supporre fra loro ortogonali le tre coordinate (1138). La sezione primaria sul nuovo piano data da $z=0$, avrà per equazione $ax^2+by^2=0$, e quindi non potrà esser che un punto (1140), il quale si confonderà col concorso del nuovo piano e degli altri due primitivi. Le secondarie corrispondenti saranno ellissi dei semiassi $\sqrt{\frac{\varkappa}{a}}$, $\sqrt{\frac{\varkappa}{b}}$, e quindi tutte simili e crescenti con $\varkappa$. Le sezioni primarie sugli altri due piani saranno parabole dei parametri $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, e col vertice alla nuova ori-

gine; e parabole altresì degli stessi respettivi parametri saranno le secondarie, se non che l' une avranno il vertice all' altezza $z=b\beta^2$ al di sopra del nuovo piano, l' altre all' altezza $z=a\alpha^2$; e sì queste che quelle anderanno dunque sempre più elevandosi a misura che si scosteranno dai piani coordinati.

Per le sezioni oblique nei due casi di $\theta=90^\circ$, $\omega=90^\circ$ (1135), avremo le due equazioni $y=a(\alpha+x\cos\omega)^2+bx^2 sen^2\omega$, $y\, sen\theta=a(\alpha+y\cos\theta)^2+bx^2$, di cui la prima darà in ogni caso una parabola, la seconda un' ellisse.

1148. Questa superficie porta il nome di *paraboloide ellittica*, e a somiglianza dell' iperboloide (1143) può concepirsi generata dal movimento parallelo di un' ellisse di dimensioni variabili, obbligata a strisciare coi suoi quattro vertici sulle parabole delle due sezioni primarie. È poi chiaro che non potendo aver luogo nella nuova equazione il cangiamento di z in $-z$, perchè il secondo membro della proposta è sempre positivo, la superficie o il solido contenuto non passerà al di sotto del nuovo piano, nè subirà interruzione alcuna; sarà dunque della specie di quelle che abbiamo chiamate *continue*, o come voglion dire *ad una sola falda* (1136). Se $a=b$, le ellissi saranno circoli, le parabole primarie saranno eguali, e la paraboloide diverrà di rivoluzione.

1149. Passiamo adesso a suppor negativo il coefficiente b, e quindi $z=ax^2-by^2$. La sezione primaria sul nuovo piano si risolverà in due rette date dall' equazione $y=\pm x\sqrt{\frac{a}{b}}$, che s' incroceranno tra loro alla nuova origine. Le sezioni secondarie parallele al di sopra del nuovo piano, avranno per equazione $z=ax^2-by^2$, ovvero $y^2=\frac{a}{b}(x^2-\frac{z}{a})$, e quindi saranno iperbole coi rami stesi nel senso dell' asse X, ossia concave verso quest' asse, col centro in un punto dell' asse Z, e coi semiassi $\sqrt{\frac{z}{a}}$, $\sqrt{\frac{z}{b}}$, e quindi tutte simili e crescenti con z. Quelle al di sotto del nuovo piano, per le quali z e quindi z son negative, verranno date dall' equazione $z=by^2-ax^2$, ovvero $x^2=\frac{b}{a}(y^2-\frac{z}{b})$; e saranno esse pure iperbole come le precedenti e col centro sull'asse Z, ma coi rami stesi nel senso dell'asse Y, e coi semiassi permutati, cioè con $\sqrt{\frac{z}{b}}$ per semiasse trasverso, e $\sqrt{\frac{z}{a}}$ per semiasse coniugato, e tutte tra loro simili, e crescenti esse pure indefinitamente con z. Le altre due sezioni primarie avranno per equazioni $ax^2=z$, $by^2=-z$, cioè saranno due parabole l'una del parametro $\frac{1}{a}$, l'altra del parametro $\frac{1}{b}$, che avranno Z per asse principale, e per vertice comune la nuova origine dei piani coordinati, ma rivolte in opposto senso; mentre la prima, per la quale z non può esser negativa, sarà tutta al di sopra del nuovo piano, e stenderà i suoi rami dal basso

all' alto sul piano delle xz, e la seconda per la quale z non può esser positiva, sarà tutta al di sotto, e scenderà coi suoi rami dall' alto al basso sul piano delle yz. E parabole saranno altresì degli stessi parametri, e rivolte nei medesimi sensi le sezioni secondarie respettivamente parallele ai piani delle xz, e delle yz. Le prime infatti hanno per equazione $x^2 = \frac{1}{a}(b\beta^2 + z)$, e le seconde $y^2 = \frac{1}{b}(a\alpha^2 - z)$. Quelle hanno dunque il vertice al di sotto del nuovo piano, queste al di sopra; l' une alla distanza $z = -b\beta^2$, l' altre alla distanza $z = a\alpha^2$. E poichè le prime son sempre reali con z positiva, e immaginarie con z negativa e $> b\beta^2$; e le seconde all' opposto son reali con z negativa, e immaginarie con z positiva e $> a\alpha^2$, è dunque chiaro che quelle volger debbono i loro rami dal basso all' alto, queste dall' alto al basso.

1150. Le medesime varietà s' incontrerebbero se in luogo di b si supponnesse negativa a. Riguardo poi alle sezioni oblique, l' equazioni già stabilite di sopra (1147), e che col cangiamento di b in $-b$ divengono l'una $y = a(\alpha + x\cos\omega)^2 - bx^2 \operatorname{sen}^2\omega$, l' altra $y \operatorname{sen}\theta = a(\alpha + y\cos\theta)^2 - bx^2$, mostrano che, nel caso di $\theta = 90°$, qualunque sezione fatta normalmente al piano delle xy, darà una parabola, come darà un' iperbola nel caso di $\omega = 90°$. Il solido a cui appartiene la superficie della proposta equazione si chiama *paraboloide iperbolica*. E come anche supponendo $a = b$ niuno dei tre sistemi di sezioni divien circolare, così questo solido non può mai appartenere alla classe di quelli di rivoluzione.

1151. Del rimanente alla massima parte delle conclusioni alle quali ci siamo condotti supponendo ortogonali le coordinate (1138), si sarebbe egualmente pervenuti supponendole oblique, come facilmente ci convinceremo, se riassumiamo con quest' ipotesi tutti i precedenti ragionamenti; se non che in questo caso apparterrà ai semidiametri coniugati tutto ciò che abbiamo detto dei semiassi. Solo è da avvertirsi che niuna dell' equazioni potrà allora rappresentare superficie di rivoluzione, perchè l' eguaglianza dei coefficienti a, b nelle sezioni ellittiche potrà bensì riferire ai semidiametri eguali dell' ellissi (974) l' equazioni corrispondenti, ma non mai a circoli, attesa l' obliquità delle coordinate. È da osservarsi in oltre che se supposte di nuovo ortogonali le coordinate x, y, z, si sostituiscano nelle equazioni proposte (1138.1147) i loro valori dati per x', y', z' (1084), nascerà, omessi gl' indici, una nuova equazione a coordinate obliquangole, della forma generica

$$z^2 + Ay^2 + A'x^2 + Bzy + B'zx + B''xy + Cz + C'y + C''x + D = 0$$

che spetterà come le due proposte alle medesime superficie. Il modo poi di rimontare da questa alle primitive, e l' esame dei casi in cui ciò resta possibile, offrono materia a troppo lunghe discussioni, perchè qui possiamo occuparcene.

Equazioni dei piani e dei coni tangenti ad una superficie, e delle rette ad essa normali

1152. Vogliasi l'equazione di un piano tangente in un punto dato $x'y'z'$ ad una data superficie. Poichè il piano deve necessariamente passare per il punto dato, avrà per equazione (1107) $z-z'=A(x-x')+B(y-y')$, nella quale dovranno determinarsi A,B. Supposta frattanto $z=\varphi(x,y)$ l'equazione della data superficie (1132), si faccian passare per il punto dato, attraverso la superficie ed il piano tangente, due piani tra loro normali, l'uno parallelo a quello delle xz, l'altro a quello delle yz. Le due intersezioni con la superficie daranno luogo a due sezioni secondarie (1134) delle respettive equazioni $z=\varphi(x)$, $z=\varphi(y)$ (*ivi*); mentre le due intersezioni col piano tangente saranno due rette che avranno per equazioni l'una $y=y'$, $z-z'=A\times(x-x')$, l'altra $x=x'$, $z-z'=B(y-y')$ (1111); e le quali, come comuni al piano tangente, saranno tangenti in generale alla superficie nel punto $x'y'z'$, e come comuni ai piani secanti, saranno in particolare tangenti alle curve delle due sezioni nel punto $x'y'z'$. Or quest'ultima circostanza dà (1061) $A=\varphi_1(x')$, $B=\varphi_1(y')$; dunque per la cercata equazione del piano tangente avremo $z-z'=\varphi_1(x')\times(x-x')+\varphi_1(y')(y-y')$, nè altro rimarrà che calcolare e sostituire i valori delle due derivate $\varphi_1(x')$, $\varphi_1(y')$, valori che si otterranno calcolando con le regole note, o più speditamente con quelle del calcolo differenziale, le derivate prime delle due equazioni $z=\varphi(x)$, $z=\varphi(y)$, e ponendovi x', y', z' in luogo di x,y,z, poichè il contatto non è quì ad un punto qualunque, ma a quello che nelle curve delle due sezioni ha per coordinate x', y', z'.

1153. Abbiasi per esempio la superficie dell'equazione di second'ordine $z^2=ax^2+by^2+c$ (1138). Per la prima sezione secondaria, fatto $by'^2+c=g$, avremo $z=\sqrt{(ax^2+g)}$; d'onde $\varphi_1(x)=\dfrac{ax}{\sqrt{(ax^2+g)}}=\dfrac{ax}{z}$, e quindi $\varphi_1(x')=\dfrac{ax'}{z'}$; per l'altra, fatto $ax'^2+c=h$, avremo $z=\sqrt{(by^2+h)}$, $\varphi_1(y)=\dfrac{by}{z}$, e $\varphi_1(y')=\dfrac{by'}{z'}$, e quindi per l'equazione del piano tangente $z-z'=\dfrac{ax'}{z'}(x-x')+\dfrac{by'}{z'}(y-y')$, ovvero, osservando che l'equazione della superficie dà $z'^2=ax'^2+by'^2+c$, e riducendo, $zz'=axx'+byy'+c$. Così per la sfera ove $a=b=-1$, e $c=r^2$ (1079), sarà $zz'+yy'+xx'=r^2$.

1154. Sia l'altra equazione $z=ax^2+by^2+c$ (1146); avremo per la prima sezione secondaria $z=ax^2+g$, e quindi $\varphi_1(x)=2ax$, $\varphi_1(x')=2ax'$, e per la seconda $z=by^2+h$, $\varphi_1(y)=2by$, $\varphi_1(y')=2by'$. Dunque $z-z'=2ax'(x-x')+2by'\times(y-y')$; e poichè si ha $z'=ax'^2+by'^2+c$, l'equazione del piano tangente sarà perciò $z+z'=2(axx'+byy'+c)$.

1155. Voglia adesso condursi un piano tangente per un punto $x'y'z'$ esterno

alla superficie. La qualità di tangente, e la condizione del passaggio pel punto $x'y'z'$ daranno come sopra per l'equazione del piano $z-z'=(x-x')\varphi_1(x)+(y-y')\varphi_1(y)$. Riferiamo le tre coordinate x, y, z al punto di contatto. Dovrà allora sussister tra loro anche l'altra relazione $F(x,y,z)=0$ che esiste in generale fra le coordinate della superficie; e se col mezzo di questa elimineremo dall'altra una qualunque delle tre coordinate, risulterà un'equazione tra le due rimanenti, che essendo indeterminata, mostrerà come infiniti possono essere i punti successivi nei quali il piano passando per il dato punto esterno, potrà toccar la superficie, e infinite per conseguenza le posizioni che potrà prendere. Frattanto è manifesto che se la proposta eliminazione si farà cadere sulla coordinata z, l'equazione risultante tra x ed y corrisponderà alla projezione della curva dei contatti sul piano delle xy; e se si farà in seguito cadere sulla coordinata y, la risultante darà la projezione della curva sul piano delle xz. Conosciute così le due projezioni, sarà nota altresì la qualità della curva (1096).

1156. Determinata in tal guisa la curva dei contatti, se da ciascun punto della medesima immaginiamo condotta al punto esterno una retta, verremo a formare ciò che chiamasi *cono tangente*, che avrà dunque per base la curva trovata e di cui potremo sempre coi noti metodi trovar l'equazione (1130). Può osservarsi che se il punto esterno dato sia luminoso, la curva dei contatti segnerà in tal caso sulla superficie il confine tra la parte illuminata e la tenebrosa. È dunque visibile il rapporto di queste dottrine con la Teoria generale dell'ombre.

1157. Resta a parlarsi delle normali alle superficie. Una retta è normale ad una superficie, quando incontra perpendicolarmente il piano che tocca la superficie nel punto ove questa è attraversata dalla retta. Più particolarmente però si chiama normale quella sola porzione della medesima, intercetta tra la superficie ed uno dei piani coordinati, che ordinariamente è quello delle xy. Volendone l'equazioni, osserveremo che per una retta perpendicolare in un punto $x'y'z'$ ad un piano dell'equazione $z=Ax+By+C$, si hanno l'equazioni $x=-A(z-z')+x'$, $y=-B(z-z')+y'$ (1118); dunque essendo per noi $A=\varphi_1(x')$, $B=\varphi_1(y')$ (1152), l'equazioni della normale saranno $x-x'=\varphi_1(x')(z'-z)$, $y-y'=\varphi_1(y')(z'-z)$. Così se la superficie sia di second'ordine, e dell'equazione $z^2=ax^2+by^2+c$, avremo (1153) $\varphi_1(x')=\frac{ax'}{z'}$, $\varphi_1(y')=\frac{by'}{z'}$, e per equazioni della normale $(x-x')z'=ax'(z'-z)$, $(y-y')z'=by'(z'-z)$, dalle quali si deduce l'altra $by'(x-x')=ax'(y-y')$. E potrà di passaggio notarsi che se $b=a$, e in conseguenza il solido sia di rivoluzione (1143), l'ultima darà $xy'=x'y$, equazione che appartenendo alla projezione della normale sul piano delle xy (1094), e mancando della costante, mostra che questa projezione passa per l'origine (1095 2°), e quindi la normale per l'asse Z di rotazione.

1158. Volendo poi determinare la lunghezza n della normale presa dentro i limiti già dichiarati, si chiamino x'', y'', z'' le coordinate del suo punto d'incontro col piano delle xy. Sostituendole in luogo di x, y, z nelle precedenti equazioni, e

osservando che $z''=0$ (1080.2°), avremo $x''-x'=z'\varphi_1(x')$, $y''-y'=z'\varphi_1(y')$. Ma la normale si stende dal punto $x'y'z'$ al punto $x''y''z''$, e perciò (1082) $n^2=\ldots$ $(x'-x'')^2+(y'-y'')^2+z'^2$, dunque $n=z'\sqrt{((\varphi_1 x)^2+(\varphi_1 y)^2+1)}$.

Intersezione delle superficie, e curve a doppia curvatura

1159. Allorchè una superficie curva qualunque è intersecata da un piano, la curva della sezione dovendo trovarsi tutta stesa sul piano secante, è necessariamente una *curva piana*. Ma se una superficie curva è intersecata da un' altra superficie curva, come sarebbe se una sfera fosse intersecata da un cono il cui asse non passasse per il centro della sfera, non avrà luogo nei più dei casi la precedente conclusione, e la sezione presenterà una curva di nuovo genere, tutti i di cui punti si troveranno successivamente in piani diversi, e che essendo curva in due sensi, si chiama perciò *curva a doppia curvatura*. Potremo formarci un' idea di queste curve, se immagineremo avvolto ad un cilindro retto un segmento parabolico. È chiaro che il perimetro di questo segmento sarà allora curvo e nel senso della parabola, e in quello del cilindro a cui è avvolto, e formerà dunque una curva a doppia curvatura.

1160. Allorchè queste curve si considerano come provenienti dalle intersezioni delle superficie, potranno esser sempre rappresentate come le curve piane (1096) per mezzo delle loro projezioni sui piani coordinati. Per conoscer queste projezioni, supposte $F(x,y,z)=0$, $f(x,y,z)=0$ l'equazioni delle due superficie, basterà che si prenda successivamente dall'una, e si sostituisca nell'altra il valore di una delle tre coordinate, dato per l' altre due. Risulteranno così tre equazioni, una fra x ed y, l'altra fra x e z, la terza fra y e z, che saranno visibilmente quelle delle tre projezioni sui piani corrispondenti. Dall' indole e qualità delle curve di projezione dovremo poi desumer quella della curva della sezione. Così se troveremo che una delle projezioni è immaginaria, come sarebbe nel caso che s' incontrasse l' equazione $x^2+y^2+a^2=0$, concluderemo che le due superficie non s' intersecano. Se troveremo che una delle projezioni si riduca ad un punto, come qualora per quella sul piano delle xy si trovassero le due equazioni determinate $x=m$, $y=n$ (899), concluderemo che semplicemente si toccano.

1161. Ma la più importante delle ricerche che posson farsi su questo proposito è quella di trovare se, e in quali casi l' intersezione può essere una curva piana, o di semplice curvatura. A tale effetto si prenda l' equazione generale del piano $Ax+By+Cz=D$ (1099), e si sostituisca il valor di z in una delle due equazioni delle superficie. Otterremo una nuova equazione tra x,y, che rappresenterà la projezione dell' intersezione della superficie e del piano su quella delle xy, e che sarà funzione dei coefficienti A,B,C,D dell' equazione del piano.

1162. Si confronti adesso questa con l' altra che rappresenta la projezione del-

l' intersezione delle due superficie sul medesimo piano delle xy. È evidente che se avranno luogo, e potranno in qualunque modo trovarsi per A, B, C, D tali valori da rendere identiche le due equazioni, l' intersezione delle due superficie tra loro si confonderà con quella dell' una di esse col piano, e quindi sarà una curva piana. In caso diverso non potrà essere che una curva a doppia curvatura.

1163. Abbiansi per esempio due sfere dell' equazioni $x^2+y^2+z^2=r^2$, $(b+x)^2+(c+y)^2+(e+z)^2=r'^2$. Eliminando z e ponendo per comodo $p^2=r'^2-r^2-b^2-c^2-e^2$, avremo per la projezione della sezione sul piano delle xy, $4x^2(e^2+b^2)+4y^2(e^2+c^2)+8bcxy-4bp^2x-4cp^2y+p^4-4r^2e^2=0$. Or si ponga in $x^2+y^2+z^2=r^2$ il valor di z preso dalla supposta equazione del piano $Ax+By+Cz=D$; troveremo $(A^2+C^2)x^2+(B^2+C^2)y^2+2ABxy-2ADx-2BDy+D^2-C^2r^2=0$. Ora è chiaro che questa equazione potrà sempre rendersi identica alla precedente, ponendo $A=2b$, $B=2c$, $C=2e$, $D=p^2$; dunque la sezione è una curva piana, e del tutto conforme a quella che farebbe o con l' una o con l' altra superficie un piano, che avesse per equazione $2bx+2cy+2ez=p^2$, e perciò circolare (750).

1164. All' opposto, cercate coi noti modi, e confrontate fra loro le due equazioni corrispondenti alla projezione della intersezione di un cilindro retto con un cono retto e con un piano, non si troverebbe per A, B, C, D alcun valore che rendesse la seconda eguale alla prima. Quindi la curva dell' intersezione delle due nominate superficie curve sarebbe in questo caso a doppia curvatura.

Geometria Descrittiva

1165. Il metodo delle projezioni non solo risolve analiticamente i problemi, nei quali entrano punti o linee situate in piani diversi, ma dà anche mezzi assai facili per la loro costruzione geometrica (682), ed insegna ad operare sulle grandezze considerate nello spazio con la stessa facilità e con lo stesso rigore, che si ottiene dalla Geometria piana rapporto alle grandezze situate in un piano. Il metodo prende allora il nome di *Geometria descrittiva*, scienza di grandissima utilità per le arti, specialmente per quelle d' intaglio, di prospettiva e architettoniche, nelle quali le questioni del genere di cui si parla, sono infinite, e si ha bisogno di soluzioni reali, effettive ed esatte, e non già astratte o semplicemente rappresentate da una figura descritta in un piano, a cui col soccorso dell' ombre si sia data una qualche apparenza di rilievo. Non potendo impegnarci in un pieno trattato di questo interessante e vastissimo soggetto, ci limiteremo a darne le nozioni più elementari, che applicheremo alle costruzioni dei problemi relativi alla linea retta, al piano, alle curve piane e alle sfere. I Giovani che volendosi dedicare alle arti avesser perciò bisogno d' istruzione maggiore, potranno consultare le opere classiche di *Monge*, *La-Croix* e *Vallée*.

1166. Di due soli piani di projezione si fa generalmente uso nella Geometria

descrittiva, l' uno chiamato *orizzontale*, l' altro *verticale*, in quanto che gli oggetti che occorrono in pratica son per lo più collocati in questi due sensi. Abbiasi per- F.238 tanto un punto P situato nell'angolo di questi piani, e sieno A, B le di lui projezioni sull' uno e sull' altro. È manifesto che queste projezioni, o le loro distanze AT, BT dall' intersezione MN dei due piani, determinano completamente la posizione del punto P. Ora s' immagini che il piano verticale OM rivolgendosi intorno all'intersezione MN, si ripieghi sul prolungamento MU del piano orizzontale MR, e sia A' il luogo che in questa nuova situazione del piano prenderà il punto B. È evidente che sarà A'T normale ad NM (693), e di più eguale a BT; in conseguenza la retta A'T rappresenterà come BT la distanza di B a T, o l' altezza di P al di sopra del piano orizzontale: potrà dunque sostituirsi a BT per rappresentare con AT la posizione di P.

1167. Col medesimo raziocinio si proverebbe che se CD, EF sieno le projezioni di una retta (1090), o le tracce di un piano (1098) sopra quelli di projezione, e sia C'D' la situazione che prende EF, allorchè il verticale è ripiegato sul prolungamento del piano orizzontale, potremo sostituire D'C' in luogo di EF per rappresentare insieme con CD la posizione della retta o del piano. Or questo semplicissimo principio può riguardarsi come il fondamento della Geometria descrittiva. Col mezzo di esso ogni imbarazzo proveniente dalla necessità di operare sopra due piani diversi, vien tolto; e tutte le costruzioni si riducono ad un solo e medesimo piano.

1168. Prima però di passare ad applicarlo alle costruzioni che ci siamo proposte (1165), premetteremo come proposizioni evidenti, o facili a dedursi dalle cose già dette, 1°. che unite le due projezioni A, A' del punto P, la retta AA' passerà per T e sarà normale ad MN (506.3°); onde le due projezioni di un punto son sempre in una stessa retta normale all' intersezione MN; e perciò data una delle projezioni, l' altra dovrà trovarsi nel prolungamento della normale condotta da quella sopra MN. 2°. Se il punto o la linea data sia sopra uno dei piani ortogonali, la loro projezione sull' altro dovrà cadere sull' intersezione MN. 3°. I punti o le linee situate in uno dei piani si confonderanno con le loro projezioni in quel piano. 4°. La *traccia* di una retta sopra di un piano, o il luogo ove essa l'attraversa o lo incontra, è necessariamente in un punto della projezione della retta in quel piano. 5°. Se una retta sia parallela ad uno dei piani, non potendo incontrarlo giammai non presenterà che la sola traccia sull' altro; e reciprocamente se d' una retta non si abbia o non possa assegnarsi che una sola traccia, la retta sarà parallela al piano su cui non comparisce la traccia. Mancheranno poi amendue le tracce, se la retta sia parallela all' intersezione MN, e di nuovo non ne avremo che una se passi per MN. 6°. Allorchè le due tracce di un piano son convergenti, il loro incontro succederà in qualche punto di MN: deve infatti esser comune alle due tracce, per conseguenza anche ai due piani, e trovarsi perciò nella loro intersezione. 7°. Infine se un piano sia pa-

rallelo ad uno di quelli di projezione, non avremo che l'unica sua traccia sull'altro, la quale sarà parallela ad MN; e se sia parallelo ad MN, ambedue le tracce saranno parallele ad MN. Non avremo del pari che una sola traccia, che sarà la stessa MN, se il piano sia disteso lungo MN. F.238

1169. Per quanto il piano verticale si supponga ripiegato sul prolungamento dell'orizzontale, gli conserveremo la denominazione di verticale. Impiegheremo per rappresentarlo quella parte delle figure, che resta al di sopra della retta MN esprimente l'intersezione o divisione dei due piani; riserbando l'altra parte inferiore per rappresentare l'altro piano. Ambedue si supporranno di dimensioni indefinite, come del pari supporremo generalmente indefinite le rette e le dimensioni dei piani, che entrano come elementi o come oggetti di ricerche nei nostri problemi.

1170. Per facilità e brevità di discorso contrassegneremo con un apice le lettere indicanti i punti o linee che abbian luogo nel piano verticale, a distinzione di quelle dell'orizzontale che segneremo senz'apice alcuno. I punti che cadono nell'intersezione MN, e che perciò spettano insieme ai due piani, saranno indicati o con l'apice o senza, secondo che occorrerà di considerarli o nel piano verticale o nell'orizzontale. Allorchè poi tratteremo di un punto, di una linea o di un piano situato nello spazio, noteremo il punto e la linea con le lettere spettanti alle loro projezioni, chiudendole dentro parentesi; ed in pari modo noteremo il piano e le curve con le lettere delle loro tracce. Così (A A') indicherà un punto, le cui projezioni orizzontale e verticale cadano in A, A'. Del pari (AB, A'B') significherà una retta o un piano che abbiano l'una per projezioni, l'altro per tracce (1098) orizzontale e verticale le rette AB, A'B'. Qualora però l'incontro delle tracce AB, A'B' abbia luogo nei limiti della figura, e sia notato per esempio con C, l'indicazione del piano sarà semplicemente (ACA').

1171. Intenderemo al solito esser dati o trovati un punto o una linea, allorchè ne son date o trovate le projezioni: ed esser dato o trovato un piano, quando ne son date o trovate le tracce. Infine segneremo nelle figure con linee andanti o *piene* tutte quelle che vengono o date, o cercate e trovate nel problema; con linee *tratteggiate* quelle che sono introdotte ausiliarmente nelle costruzioni; con linee *punteggiate* quella porzione dell'une e dell'altre che passa o al di là del piano verticale, o al di sotto dell'orizzontale. Tutto questo premesso, passiamo ai problemi, che disporremo secondo l'ordine di dipendenza che l'uno ha dall'altro.

1172. I. Date le projezioni C,C' e D,D' dei due punti (CC'), (DD'), costruir la retta che li congiunge, o che ne determina la distanza. 239

Si uniscano C, C' e D, D'. Da C, D' si conducano CR normale a DC e D'O' normale a CC'. Sopra CR si prenda CO=C'O'; unita D con O, la retta DO equivarrà alla cercata. Infatti si concepisce facilmente che questa retta deve corrispondere all'ipotenusa di un triangolo rettangolo, che abbia per un dei cateti la distanza delle projezioni orizzontali dei due dati punti, e per l'altro la differenza delle

F. 239 loro elevazioni al di sopra del piano orizzontale. Ma queste elevazioni son rappresentate da $D'd$, $C'c$ (1166), e la lor differenza da $C'O'=CO$; dunque la retta cercata è visibilmente eguale all' ipotenusa DO.

1173. II. Data la retta (AB, A'B'), costruir gli angoli formati dalla medesima coi due piani di projezione.

Presi nella retta data due punti qualunque (CC'),(DD'), si eseguisca sopra i medesimi la costruzione del problema precedente; l' angolo CDO del triangolo finale OCD rappresenterà quello della data retta col piano orizzontale. Infatti gli angoli della retta coi piani son quelli della retta con le sue medesime projezioni. Or si concepisca il triangolo COD elevato verticalmente sul cateto DC. È chiaro che la retta data e l' ipotenusa DO si troveranno allora nello stesso piano projettante, e di più diverranno parallele, atteso che la distanza del punto O al punto (CC') sarà $C'c-CO=C'c-C'O'=cO'=D'd$, distanza del punto D a (DD'). Dunque l' angolo CDO che la projezione orizzontale fa con DO, eguaglia quello che fa con la retta data, o che questa fa col piano orizzontale. Così se ne troverebbe l' altro col verticale.

1174. III. Data la retta (PQ, P'Q'), trovarne le due tracce (1168.4°) orizzontale e verticale.

Dai punti A',B ove le due projezioni P'Q', PQ passano per l' intersezione MN, si alzino normalmente ad MN le rette AA', BB'. I punti A, B' d' incontro fra le due projezioni e le due normali determineranno le tracce cercate. Infatti la traccia orizzontale, come punto della retta data, deve aver la sua projezione verticale lungo P'Q', e come punto situato sul piano orizzontale deve averla lungo MN (1168.2°) l'avrà dunque visibilmente in A'. Dovrà perciò questa traccia trovarsi in qualche punto della normale A'A (1168.1°); ma deve trovarsi anche in PQ (1168.4°): sarà dunque in A. Il raziocinio medesimo vale anche per l' altra traccia.

1175. IV. Date le tracce A,B' della retta, si cercano le projezioni.

Condotte ad MN le normali AA', BB', le rette AB, A'B' saranno le projezioni cercate. Ciò è chiaro per l' antecedente problema.

Se non si avesse che la sola traccia B', la retta sarebbe parallela al piano orizzontale (1168.5°), nè potrebbe aversi che la sola projezione verticale, la quale si otterrebbe conducendo per B' una parallela ad MN. Altrettanto si dica se non si avesse che la traccia A.

1176. V. Trovare il punto d' intersezione di due rette date.

La projezione orizzontale del punto cercato sarà nel comune incontro delle projezioni orizzontali delle due rette date; la verticale in quello delle verticali. Infatti dovendo questo punto appartenere alle due rette date, anche le sue projezioni dovranno appartenere a ciascuna projezione delle medesime.

240 1177. VI. Dati i piani (ABC'), (ADC') trovarne l' intersezione.

Dai punti A, C' ove le tracce orizzontali e verticali dei due piani si tagliano respettivamente fra loro, conducansi sopra MN le normali AE', C'F: e quindi si unisca A con F, C' con E': saranno AF, C'E' le projezioni cercate. Infatti i due punti

A, C' appartengono all'intersezione voluta e ne sono le tracce (1168. 4.°) Dunque FA, C'E' ne sono le proiezioni (1175). Fig. 240

Se uno dei piani dati fosse parallelo ad uno di quelli di projezione, per esempio al piano verticale, e quindi non si avesse del medesimo che la sola traccia orizzontale DA parallela ad MN (1168. 7.°), la costruzione precedente non potrebbe aver luogo. In tal caso si conduca medesimamente da A sopra MN la normale AE', e da E' la E'G' parallela a BC'; sarà (AE', E'G') l'intersezione cercata. Infatti il piano parallelo al verticale, essendo normale al piano orizzontale, si confonde col piano projettante verticale della sua intersezione con l'altro piano dato; dunque la sua traccia DA è nel tempo stesso projezione orizzontale dell'intersezione. Inoltre il punto A è, come nel caso precedente, traccia orizzontale dell'intersezione. Il punto E' apparterrà dunque alla di lei projezione verticale (1168. 2.°). E poichè l'intersezione è parallela alla traccia verticale dell'altro piano dato (710), a questa traccia dovrà esser parallela anche la sua projezione verticale (*ivi*), la quale dunque non potrà essere che E'G'. 241

1178. VII. Per un punto (CC') condurre una parallela ad una retta (PQ, P'Q'). 242

Le projezioni della retta cercata, e quelle della data, debbono esser parallele fra loro (710). Se dunque per C, C' si conducano AB, A'B' l'una parallela a PQ, l'altra a P'Q', sarà (AB, A'B') la retta che si domanda.

Per più facile intelligenza di ciò che segue si noterà, che se in luogo di (PQ, P'Q') sia data sul piano orizzontale la retta PQ, poichè questa ha una projezione in PQ, l'altra in MN (1168. 2.°) perciò una delle projezioni della parallela cercata dovrà esser parallela alla data, l'altra ad MN.

1179. VIII. Per un punto (CC') condurre un piano parallelo ad un piano (EFG'). 243

Si conducano CH parallela alla traccia FE, ed HH', C'H' l'una normale, l'altra parallela ad MN. La retta (CH, C'H') sarà parallela alla traccia FE (probl. prec.), e per conseguenza al piano (EFG'). Dunque apparterrà interamente al piano cercato; e poichè ha per traccia verticale H' (1174), perciò H' sarà un punto dell'intersezione del piano cercato col verticale, o della sua traccia verticale, la quale dovendo esser di sua natura parallela alla traccia verticale del piano dato, si avrà perciò conducendo per H' parallelamente ad FG' la retta I'K'. Quanto alla traccia orizzontale è chiaro che si avrà conducendo da I' la I'B parallela ad FE.

Che se il piano dato fosse uno dei piani di projezione, per esempio il verticale, non si potrebbe assegnare che la sola traccia orizzontale del piano cercato (1168.7.°), la quale visibilmente si avrebbe conducendo per C una parallela ad MN. E nel modo stesso dovrebbe operarsi, se il piano dato fosse parallelo al piano orizzontale. Qualora poi fosse semplicemente parallelo ad MN, e quindi avesse le sue due tracce parallele ad MN (1168. 7.°), tali dovranno esser pure quelle del piano cercato. Presi due punti ad arbitrio l'uno sull'una, l'altro sull'altra traccia del piano dato, si costruisca la retta che li congiunge (1172); a questa per il punto dato si conduca una parallela (1178), della quale si determinino le tracce (1174): le due rette condotte per queste parallelamente ad MN saranno visibilmente le tracce del piano cercato. General-

mente tutti i casi contemplati sotto i num. 5.° e 7.° del paragrafo 1168 esigono costruzioni particolari, spessissimo più semplici delle generali, e che potendo quindi assai facilmente trovarsi, noi perciò ci dispenseremo dal farne ulteriore parola.

1180. IX. Condurre un piano per tre punti dati, o per due delle tre rette che li congiungono.

Ciascuna di queste tre rette appartiene per condizione al piano cercato. Dunque le loro tracce sono altresì punti delle tracce del piano. Perciò trovate quelle (1174), avremo le direzioni di queste, e quindi il piano.

Fig.244 1181. X. Da un punto dato (AA') abbassare una perpendicolare sopra un piano dato (BCD'), e determinare il punto d' incontro della normale col piano.

Quanto alla prima parte del quesito è manifesto che le projezioni della retta cercata dovranno esser perpendicolari alle tracce del piano (706), e si avranno perciò conducendo AE, A'G' normalmente a BC, CD'. Quanto all'altra parte si alzi EE' normalmente ad MN. Il piano (AEE') si confonderà col piano projettante verticale della normale trovata (AE, A'G'). Conterrà perciò tutta la normale, e quindi anche il punto cercato. Ma questo deve esser pure nel piano dato (BCD'), dunque caderà nella loro intersezione (EF, E'F')(1177); e poichè deve trovarsi del pari nella normale (AE, A'G'), dunque la di lui projezione verticale sarà in H' intersezione delle due projezioni verticali E'F', A'G' (1176), e l'orizzontale in H incontro di AE, projezione orizzontale della normale, con HH' normale ad MN (1168. 1.°).

245 1182. XI. Per un dato punto (AA') condurre un piano perpendicolare ad una retta data (BC, B'C').

Si conducano A'D', AD, DD', normali l'una a C'B', l'altra ad AA', la terza ad MN. Quindi da D la DE normale a CB, e da E la EF' normale a C'B'. Saranno DE, EF' le tracce del piano cercato. Infatti se questo deve esser per condizione normale alla retta data, le sue tracce e le projezioni della retta saranno respettivamente normali fra loro (1181). Dunque A'D' sarà parallela alla traccia verticale, e lo sarà perciò anche la retta (A'D', AD)(1178). Ma questa ha comune col piano il punto (AA'), se dunque è di più parallela ad una delle tracce, deve necessariamente esser tutta in quel piano. Quindi la sua traccia orizzontale D (1168. 4.°) sarà altresì un punto della traccia orizzontale del piano, la quale dovendo esser inoltre normale a CB, sarà perciò nella direzione di DE, come egualmente la traccia verticale, che deve partirsi da E (1168. 6.°) ed esser normale a C'B', sarà nella direzione di EF'.

1183. XII. Condurre un piano perpendicolare ad un piano dato, e che passi per una retta parimente data.

Da un punto qualunque della data retta si condurrà una perpendicolare sul piano dato (1181): quindi si farà passare un piano per questa e per la retta data (1180), che sarà visibilmente il cercato (703).

1184. XIII. Da un punto dato abbassare una perpendicolare ad una retta data.

Si comincerà dal condurre per il punto dato un piano perpendicolare alla retta data (1182); si determinerà il punto del loro incontro (1181); si congiungeran-

no con rette le due projezioni orizzontali e le verticali di questo e del punto dato, e avremo così quelle di una retta che passerà per il punto dato, e sarà normale alla retta data, e che sarà perciò la cercata.

1185. XIV. Date le rette (AB, A'B'), (BC, B'C') che s'incontrino nel punto (B,B'), trovarne l'angolo. F. 246

Si cerchino le tracce orizzontali delle due rette (1174), e supposta l'una in A, l'altra in C, si conduca BD normale ad AC, si prenda bd=BD, si congiunga B' con d, e prolungata DB in G, finchè sia DG=B'd, si formi il triangolo AGC. È manifesto che AC e le due rette date formeranno un triangolo, che avrà per base la stessa AC, per vertice il punto dato (B,B'), per angolo al vertice l'angolo cercato, e per altezza l'ipotenusa di un secondo triangolo, i cui cateti sono BD, B'b, altezza che sarà quindi eguale a B'd, e per conseguenza a DG. Perciò il triangolo fatto da AC con le due rette date, e il triangolo AGC che hanno altezze eguali, e base e segmenti della base comuni, sono eguali; e l'angolo AGC del secondo è dunque eguale all'angolo opposto ad AC nel primo, e per conseguenza al cercato.

1186. XV. Data una retta ed un piano, determinar l'angolo di quella su questo.

L'angolo che qui si cerca è complemento di quello che la retta farebbe con la normale abbassata da qualunque suo punto sul piano. Condotta dunque questa normale (1181), e determinato l'angolo che fa con la retta (1185), avremo quello della retta col piano.

1187. XVI. Dati due piani inclinati l'uno sull'altro, trovarne l'angolo.

Trovata l'intersezione dei due piani (1177), da un punto qualunque di MN si conducano sulle projezioni della medesima due normali, che rappresenteranno le tracce di un piano normale all'intersezione (1182). Determinate le intersezioni di questo piano coi piani dati (1177), l'angolo che faranno (701) sarà il cercato.

1188. XVII. Date due rette situate in piani diversi e non parallele, trovar la più piccola distanza dell'una all'altra.

Per un punto qualunque preso sopra la prima delle due rette si condurrà una parallela alla seconda (1178). Per questa parallela, e per la medesima prima retta si condurrà un piano (1180), che sarà dunque parallelo alla seconda. Ad esso piano per la seconda retta si condurrà un piano normale (1183); si determinerà l'intersezione dei due piani (1177), e il punto ove questa taglia la prima delle due rette (1176); e da questo punto si abbasserà una normale sulla seconda (1181). È chiaro che questa sarà normale anche alla prima, e perciò determinerà la distanza cercata.

1189. XVIII. Dato il piano (ABC'), trovarne gli angoli d'inclinazione sui piani orizzontale e verticale. 247

Da un punto qualunque D di MN si conducano AD, DC' l'una normale ad MN, l'altra alla traccia BC'. Quindi si prenda DE=DC', e si unisca AE. Il piano (ADC') sarà perpendicolare al piano verticale (703), e alla traccia C'B (704). Dunque immaginando uniti A, C', anche AC' sarà normale a C'B (693). Inoltre essendo retto l'angolo ADC', i triangoli ADC', ADE saranno eguali (540. 1°), e

F 217 quindi eguali anche gli angoli AC'D, AED. Ma il primo misura l'inclinazione del piano dato sul verticale (701), dunque anche il secondo, che sarà perciò uno dei due cercati. Nel modo stesso costruiremo anche l'altro.

248 **1190. XIX. Data la curva (ABC, A'B'C'), condurre una tangente ad un suo punto qualunque (BB').**

La soluzione di questo problema e dei seguenti relativi alle curve, suppone che si sappia risolver l'altro quesito più semplice, e indipendente dal metodo delle projezioni e della Geometria descrittiva, cioè condurre in un piano dato una tangente ad un punto qualunque di una curva situata nel medesimo piano, quesito che abbiamo già insegnato a risolvere (1041). Ciò premesso, e condotte ai punti B,B' delle curve ABC, A'B'C' le tangenti BM, B'M', è manifesto che l'una sarà la projezione orizzontale, l'altra la verticale della tangente cercata, che sarà perciò rappresentata da (BM, B'M').

1191. XX. Trovare le inclinazioni di una curva data sui piani di projezione.

Si conduca ad un punto qualunque della curva una tangente (1190), e se ne determinino l'inclinazioni sui piani (1173); è manifesto che queste saranno le cercate, poichè la tangente e la curva sono in un medesimo piano.

249 **1192. XXI. Dato un punto (PP') fuori della curva (ACB,A'C'B'), condur da quello su questa una tangente.**

Si soddisfarebbe evidentemente a questa ricerca conducendo dalle projezioni del punto su quelle della curva due tangenti che sarebbero le projezioni della tangente cercata. E per condurre quelle due tangenti applicar si potrebbero i metodi che dalla Geometria e dall' Analisi abbiamo appresi in addietro. Ma quando o non si voglia, o non si possa far caso di questi metodi, eccone uno puramente grafico, ma che per gli usi della Geometria descrittiva è sufficiente.

Si prenda sulla projezione orizzontale ACB della curva data una serie di punti a, a', a'', ec.; si conducano ai medesimi le respettive tangenti; sulle tangenti le normali ab, $a'b'$, $a''b''$, ec., e su di queste da P le normali Pb, Pb',Pb'', ec. Per i punti b,b',b'', ec. si faccia passare la curva $bb'b''$ec. (1013), e al punto C, ove questa taglia l'altra, si conduca da P la retta PC. Questa come tutte le altre condotte da P sulla curva $bb'b''$ec. sarà ad angolo retto con la normale al punto C della curva ACB, quindi sarà tangente in C (934), e C sarà la projezione orizzontale del punto di contatto cercato. Quanto alla verticale si sa che deve trovarsi in un punto di CC' normale ad MN (1168.1°), e nel tempo stesso in un punto della curva A'C'B'; sarà dunque nel comune incontro C', e P'C' darà la projezione verticale della tangente richiesta, come PC dà l'orizzontale. Alla curva $bb'b''$ec. si dà il nome di *curva degli errori*, ossia curva delle false posizioni (469) in quanto che le rette Pb, Pb',Pb'', ec. sono come altrettante situazioni che in certo modo falsamente si attribuiscono alla retta cercata, e che col mezzo indicato portano poi a trovarne la vera.

250 **1193. XXII. Sopra una curva (ACB, A'C'B'), condurre una tangente parallela ad una retta (PQ, P'Q') data nel piano della curva.**

Ai punti a, a', a'', ec. presi lungo la curva ACB si conducano le tangenti ab, $a'b'$, $a''b''$, ec. tutte eguali fra loro, e dirette in un medesimo senso. Da b, b', b'', ec. si abbassino le bd, $b'd'$, $b''d''$, ec. parallele alla projezione PQ della retta data e parimente eguali fra loro. Si descriva la curva che passa per i punti d, d', d'', ec.; e dal punto C, ove questa taglia l' altra, si conduca CT parallela a PQ. È chiaro che la projezione orizzontale della tangente cercata dovrà trovarsi fra le parallele bd, $b'd'$, $b''d''$, ec. Ma non può trovarsi fra quelle che cadono sul ramo interiore $Cd'''d^{\text{IV}}$ della nuova curva, perchè queste son visibilmente secanti della curva ACB; non fra quelle che cadono nell' altro ramo esteriore; perchè queste non incontrano in verun luogo la curva ABC; dunque sarà quella che cade in C, cioè la TC. Avuta così la projezione orizzontale della tangente cercata, avremo la verticale, elevando al solito normalmente ad MN la CC' fino all' incontro in C' con la curva A'C'B', e conducendo da C' una parallela a P'Q'. F.250

1194. XXIII. Data la curva (ABC, A'B'C') e il piano (DEF'), trovar la loro comune intersezione. 251

Da un punto qualunque G di ABC si conduca GK parallela alla traccia orizzontale DE, e GG' normale ad MN. Inoltre da K e K' si conducano KK', K'G' l' una normale, l' altra parallela ad MN. Sarà (GKK') un piano verticale che intersecherà lungo la retta (KG, K'G') il piano dato (DEF') (1177), e conterrà di più la normale (G, G'g) elevata sul punto G del piano orizzontale. Or questa si trova altresì nella superficie projettante verticale della curva data (1097): dunque (GG') è un punto d' incontro fra il piano dato e la detta superficie projettante, e G' ne è la projezione verticale, come G l' orizzontale. Nel modo stesso potremo aver tutti gli altri punti dell' intersezione del piano colla superficie projettante, e le loro projezioni verticali, che formeranno sul piano verticale una curva, la quale supporremo rappresentata da D'G'L'. Sarà dunque (ABC, D'G'L') la curva prodotta dalla suddetta intersezione del piano colla superficie projettante, o la curva dei punti comuni alla superficie ed al piano. Ma questa superficie contiene altresì i punti della curva data (1097), e perciò anche i punti cercati, e questi debbon di lor natura esser comuni anche al piano, e perciò alla curva (ABC, D'G'L'); resteranno dunque determinati dall' intersezione della curva data con la curva (ABC, G'D'L'), o da quelle delle loro projezioni.

1195. XXIV. Per un punto dato condurre un piano normale ad una curva data.

Presa sulla curva data una serie di punti, e da ciascun di essi condotta una tangente, si faranno passare per il punto dato dei piani normali ad esse tangenti (1182), e si determineranno le intersezioni (1181). Ne risulterà una curva; e quelli tra i piani normali che passeranno per i punti ove essa taglia la data, soddisfaranno evidentemente alla condizione richiesta.

1196. XXV. Data una sfera ed un piano secante, determinare il circolo della sezione.

Le projezioni orizzontali e verticali della sfera sono le basi di due cilindri

circoscritti, che han per centri le projezioni del centro della sfera. Determinati dunque quei centri (536), avremo quello della sfera (1166). Da questo si condurrà una perpendicolare sul piano secante (1181), e si determinerà il punto ove essa lo incontra (*ivi*), che sarà il centro del circolo cercato (696). Costruito in seguito un triangolo rettangolo che abbia il raggio della sfera per ipotenusa, e per uno dei cateti la predetta normale, l'altro cateto sarà il raggio della sezione. Se poi occorresse averne le projezioni effettive, si cercheranno le inclinazioni θ, θ' del piano secante coi piani orizzontale e verticale (1189); e supposto r il raggio della sezione, trovata come si è detto, si costruiranno l'ellissi delle equazioni $y^2=cos^2\theta(2rx-x^2)$, $y^2=cos^2\theta'(2rx-x^2)$ (1065.IV°), assumendo per centri le projezioni già trovate del centro del circolo cercato, e dirigendo gli assi delle ascisse parallelamente alle tracce del piano secante. Queste curve così descritte saranno le projezioni cercate.

1197. XXVI. Trovare il centro e il raggio di una sfera che passa per quattro punti noti.

Si uniranno con rette il primo punto col secondo, il secondo col terzo, il terzo col quarto (1172). Sulla metà di ciascuna di queste tre rette si alzerà un piano normale (1182), si determinerà l'intersezione del primo di questi col secondo, e del secondo col terzo (1177): il punto ove queste due intersezioni concorreranno, sarà il centro cercato. Infatti le rette che uniscono i punti dati son corde della sfera; dunque i piani alzati normalmente sulle loro metà contengono i raggi normali alle medesime (522); passano perciò tutti per il centro, che essendo quindi comune ai tre piani deve combinarsi nel concorso di due delle loro intersezioni. Trovato il centro, si unirà con uno dei punti dati (1172), e si avrà il raggio.

1198. XXVII. Trovar l'intersezione di due sfere date.

Sappiamo (1163) che questa sezione dovrà essere un circolo, il cui piano sarà normale alla linea dei centri (696), il raggio corrisponderà alla perpendicolare calata dal vertice del triangolo, che ha per base la linea dei centri e per lati i raggi delle due sfere, ed il centro cadrà sull'incontro della perpendicolare con la base.

F. 252 Sia ACB questo triangolo, CD la perpendicolare, ed AD, DB i due segmenti. Sieno inoltre θ, θ' le inclinazioni della linea dei centri coi due piani di projezione (1173). Saranno $90^\circ-\theta$, $90^\circ-\theta'$ quelle dei piani medesimi col piano della sezione. Avremo dunque le projezioni di questa sezione costruendo l'ellissi delle equazioni $y^2=sen^2\theta(2x\times CD-x^2)$, $y^2=sen^2\theta'(2x\times CD-x^2)$, dirigendone l'asse maggiore normalmente alle projezioni di AB (1182), e fissandone il centro lungo queste projezioni ad una distanza da quelle del centro A, corrispondente ad $AD cos\theta$ per l'una, ed $AD cos\theta'$ per l'altra (846).

1199. XXVIII. Trovare i punti comuni a tre sfere, che s'intersecano fra di loro.

Costruite nel modo precedente le sezioni della prima con la seconda, della seconda con la terza; i punti comuni a queste sezioni saranno i cercati.

1200. XXIX. Condurre un piano tangente ad una sfera in un punto dato.

Si condurrà un raggio al punto dato (1172); all'estremità del raggio si alzerà un piano normale (1182), che sarà il piano richiesto.

1201. XXX. Data una sfera ed una retta fuori di essa, condurre per la retta un piano tangente alla sfera.

Per il centro della sfera si farà passare un piano normale alla retta data (1182), si descriverà la sezione della sfera e del piano (1196), si determinerà l'incontro del piano con la retta (1181), e da questo si condurrà una tangente sulla sezione (1192). Per questa tangente e per la retta data si farà passare un piano (1180), che sarà tangente alla sfera.

1202. XXXI. Condurre un piano tangente a tre sfere date di raggi ineguali. F. 253

Per semplicizzare questo problema prenderemo per piano orizzontale quello che passa per i centri delle tre sfere. Sieno frattanto FHO, KLM, IGP i tre circoli massimi, sezioni respettive delle tre sfere e del piano. Si conducano HS, OQ tangenti comuni l'una alla prima e seconda sezione (777.II), l'altra alla prima e alla terza: l'una e l'altra si prolunghino fino ai loro incontri in S, Q coi prolungamenti delle linee dei centri AB, AC. Su queste linee dai contatti H, O si abbassino le normali HI, OR, che prolungate si suppongano concorrere in T. È visibile 1°. che se si faccian girare i triangoli HIS, ORQ intorno ai lati IS, RQ nasceranno due coni retti (762) circoscritti, e quindi tangenti alle sfere; 2°. che questi coni avranno per basi i circoli descritti dalle ordinate HI, OR; 3°. che i piani di queste basi saranno normali al piano orizzontale, ed avranno per tracce orizzontali le rette HT, OT; 4°. che il punto T comune alle due tracce sarà la projezione orizzontale del punto comune alle circonferenze delle due basi; 5°. che l'altezza della projezione verticale di questo punto al di sopra del piano orizzontale, sarà l'ordinata corrispondente all'ascissa AT. Col mezzo di queste due projezioni avremo dunque il punto d'intersezione delle due basi dei coni, ed unito questo punto con S, Q (1172) avremo due rette, l'una delle quali appartenendo ad un cono, l'altra all'altro, saranno tangenti quella alla prima e seconda sfera, questa alla prima e terza, e fatto passare un piano per ambedue (1180), questo sarà tangente alle tre sfere.

1203. La posizione assegnata ad arbitrio nell'ultimo problema al piano orizzontale, e che ha contribuito a dar la maggior possibile semplicità alla soluzione del medesimo, avrebbe egualmente rese più semplici quelle di molti altri dei problemi passati. Or questo arbitrio è quasi sempre lecito in pratica, e si rende poi indispensabile quando si tratti di superficie di un genere più elevato, rapporto alle quali le costruzioni riescirebber complicatissime, quando non fosse libera la scelta della posizione dei piani di projezione. Conforme alla protesta già fatta (1165), noi non c'inoltreremo in queste ricerche, che ci porterebbero ad oltrepassar di troppo i limiti prescritti dalla natura e dall'oggetto di questi elementi. Non possiamo però dispensarci dal dare almeno un accenno della maniera, con la quale si può rappresentare col metodo delle projezioni una superficie o conoidale, o cilindrica, o di rivoluzione, formata dal movimento di una linea generatrice costante o va-

riabile lungo una direttrice (1129). È chiaro che questa superficie è data, tostochè data è la direttrice, data la legge del movimento della linea generatrice, e data la forma di questa linea, e di più le condizioni di variabilità di essa forma, quando si supponga variabile. Quindi per rappresentarla convenientemente sui piani di projezione basterà 1°. descrivervi le curve di projezione della direttrice; 2°. ad ogni punto o pel maggior numero possibile di punti di queste curve segnar le corrispondenti projezioni della generatrice, secondo le posizioni e forme che in quei punti corrisponderanno alle leggi del suo movimento e delle sue variazioni. È facile comprendere come in tal modo si avranno quanti punti si vorrà della superficie da rappresentarsi, e che le projezioni delle diverse posizioni della generatrice avranno forme particolari, le quali manifesteranno assai chiaramente quella della superficie generata. I Giovani che vorran più oltre avanzarsi in questo importante ramo di scienza, avran luogo di ben conoscere come questo sistema si adatta a tutte le operazioni possibili, e gode egualmente che i precedenti del prezioso vantaggio di porger l' imagine di ciò che vuolsi rappresentare.

INFINITI E INFINITESIMI

1204. Intendiamo per quantità *infinite* e per quantità *infinitesime* quelle la cui grandezza o piccolezza eccede qualunque valore che lor si volesse o si potesse assegnare. Esse sono quell' estremo limite a cui le quantità ognor crescenti o decrescenti tendono continuamente, senza poter mai raggiungerlo e molto meno oltrepassarlo. Così sarebbe infinito l' ultimo termine della serie crescente 1,2,3,4, ec., ed infinitesimo l' ultimo della decrescente 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec. In generale è infinitesimo un rotto che abbia un denominatore infinito, poichè diminuendo il valor del rotto a misura che cresce quello del denominatore (50), quando questo ecceda qualunque grandezza assegnabile e divenga infinito, l' altro dovrà trovarsi inferiore a qualunque piccolezza assegnabile e divenire infinitesimo. Per l' opposta ragione sarà infinito un rotto che abbia un denominatore infinitesimo, molto più poi se lo avrà nullo.

1205. Son del pari infiniti di numero i punti che distinti di luogo gli uni dagli altri posson segnarsi sopra una linea o retta o curva, la quale perciò o piccola o grande che sia, potrà riguardarsi come l' aggregato di un numero infinito di punti. Sono infinite di numero le linee che l' une consecutivamente all'

altre posson segnarsi sopra una superficie, la quale perciò sarà come l'aggregato di un numero infinito di linee. Sono infinite le sezioni parallele, che posson praticarsi in un solido, che sarà dunque come l'aggregato totale delle superficie di tutte le sezioni. Quindi il punto sarà l'infinitesima parte della linea, la linea l'infinitesima parte della superficie, e questa l'infinitesima parte del solido.

1206. Per esprimere o rappresentare l'infinito si usa il segno o il carattere ∞. In rigore però questo segno non rappresenta che l'*infinito assoluto*, o l'*infinito unità*, limite superiore della serie dei numeri 1, 2, 3, ec; essendo chiaro che quello della serie m, $2m$, $3m$, ec. dovrà rappresentarsi con ∞m, espressione equivalente all'infinito unità preso un numero m di volte, o moltiplicato per m. Medesimamente il segno $\frac{1}{\infty}$ esprime l'*infinitesimo assoluto* o l'*infinitesimo unità*, limite inferiore della serie 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ec; mentre quello della serie m, $\frac{1}{2}m$, $\frac{1}{3}m$, ec., sarà espresso da $\frac{m}{\infty}$, cioè dal prodotto di $\frac{1}{\infty}$ per m. In generale il limite, sia infinito sia infinitesimo, di due serie differenti non può esser lo stesso; come all'opposto, per dirlo qui di passaggio, una stessa serie non può aver due differenti limiti, poichè per raggiungere il maggiore dovrebbe oltrepassare il minore, il quale non ne sarebbe adunque più il limite, conforme non lo sarebbe il maggiore, se la serie dovesse arrestarsi, come a suo limite, al minore. Perciò se due serie sono eguali, eguali dovranno esser pure i loro limiti.

1207. Come l'espressione ∞m significa l'infinito preso m volte, o il prodotto dell'infinito per m, così ∞^2, ∞^3, ∞^m significano i prodotti di due, di tre, di m infiniti, o i limiti respettivi delle serie 1^2, 2^2, 3^2, ec., 1^3, 2^3, 3^3, ec., 1^m, 2^m, 3^m, ec., e secondo la qualità del loro esponente si chiamano infiniti del *secondo*, del *terzo*, dell'*m**simo ordine*. Del pari $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$, $\frac{1}{\infty^m}$ sono infinitesimi del *secondo*, del *terzo*, dell'*m*simo *ordine*, o i prodotti di due, di tre, di m infinitesimi. Questi ordini, tanto dell'un genere quanto dell'altro, sono infiniti di numero; perciò

lo zero non è il vero limite inferiore delle quantità finite, mentre tra quello e queste esistono un' infinità d' ordini infinitesimi.

1208. Frattanto è chiaro che vi vuole un' infinità d' infiniti d' un ordine inferiore per formare un infinito d' ordine immediatamente superiore, come vi vuole un' infinità d' infinitesimi d' ordine superiore per formare un infinitesimo d' ordine immediatamente inferiore. Infatti $\infty^{n+1} = \infty^n \times \infty$, e $\frac{1}{\infty^n} = \frac{1}{\infty^{n+1}} \times \infty$. Quindi le quantità infinite d' un ordine qualunque sono infinitamente più grandi di quelle dell' ordine precedente, e infinitamente più piccole di quelle dell' ordine susseguente, rapporto alle quali son dunque infinitesime. All' opposto le quantità infinitesime d' un ordine qualunque sono infinitamente più piccole di quelle dell' ordine precedente, e infinitamente più grandi del susseguente, rapporto alle quali sono infinite. Così le quantità finite sono infinitesime relativamente alle infinite di prim' ordine, e infinite relativamente alle infinitesime pur di prim' ordine. Peraltro sì gl' infiniti che gl' infinitesimi d' un ordine stesso hanno fra loro dei rapporti finiti al pari delle quantità finite; infatti $\infty^n : a\infty^n :: 1 : a$; ed $\frac{1}{\infty^n} : \frac{b}{\infty^n} :: 1 : b$.

1209. Le quantità poste in calcolo dall' Algebra ordinaria, essendo supposte sempre finite, e perciò sostanzialmente differenti dalle infinite e infinitesime, ne segue che i principj ammessi per quelle saranno, almeno in qualche parte, insufficienti per queste, e l' intervento degl' infiniti o degl' infinitesimi in una equazione esigerà nuovi canoni, senza i quali non saremo certi di giungere a risultamenti esatti e rigorosi. Il che quanto sia vero chiaramente apparirà dagli esempj seguenti.

I. Sia la progressione geometrica decrescente $\frac{3}{10}, \frac{3}{10^2}, \frac{3}{10^3}$, ec. continuata fino all' infinito, e voglia tutta sommarsi Avremo (372) $a = \frac{3}{10}$, $q = \frac{1}{10}$, $n = \infty$, ed $s = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{10^\infty}\right)$, mentre, come è già noto (90), dovrebbe aversi $s = \frac{1}{3}$.

II. Posti a, b due archi qualunque, abbiamo dalla trigonometria (800. 110°) $\frac{sen(a+b)}{sen(a-b)} = \frac{tang\, a + tang\, b}{tang\, a - tang\, b}$. Sia frattanto $a = 90^\circ$,

avremo (792 5o.°) $sen(a+b)=cos b$, $sen(a-b)=cos b$, $tang a=\infty$ (781.4°); d'onde $1=\frac{\infty+tang b}{\infty-tang b}=1+\frac{2 tang b}{\infty-tang b}$, in luogo di $1=1$.

III. Dal vertice A dell'iperbola AMQ si conduca AS normale all'asse AN, prolungandola fino all'incontro in S con la tangente TM. I triangoli TAS, TPM daranno TP : AT :: PM : AS, ossia (986) $\frac{x^2-a^2}{x}:\frac{ax-a^2}{x}::\frac{b}{a}\sqrt{(x^2-a^2)}:\text{AS}=b\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}$. Se si supponga x infinita, e che per conseguenza la tangente MT si converta nell'asintoto CR (988), avremo $\text{AS}=b\sqrt{\frac{\infty-a}{\infty+a}}$, mentre sappiamo che deve aversi semplicemente $\text{AS}=b$ (*ivi*). F. 169

IV. Nell'istessa iperbola abbiamo $\text{AT}=a-\frac{a^2}{x}$ (986). Supposta $x=\infty$, si sa che deve risultarne $\text{AT}=\text{AC}=a$ (988), e frattanto l'equazione darebbe $\text{AT}=a-\frac{a^2}{\infty}$.

1210. Or questi esempj, come moltissimi altri che potremmo nel modo stesso esibire, inducono a concludere 1°. che i risultamenti ottenuti con le regole ordinarie dell'Algebra, e nei quali si trovano termini di valore finito congiunti a termini di valore infinito o infinitesimo, sono erronei; 2°. che per ridurli al loro giusto valore *bisogna eliminare tutti gli infinitesimi che si trovano di seguito alle quantità finite, e le finite che si trovano di seguito alle infinite*: o in altro modo, *conviene istituire delle particolari equazioni tra le quantità finite nel primo caso, e tra le infinite nel secondo*. Applicando infatti questo principio agli addotti esempj, tutti i risultamenti divengon subito esatti.

1211. Stabiliremo perciò in generale che se si abbia l'equazione $a+\alpha=b$, nella quale a, b sieno quantità finite ed α infinitesima, dovrà supporsi $a=b$; lo stesso si dica se a, b sieno quantità infinite ed α finita, o se quelle fossero infinite di un ordine superiore, questa di un inferiore, o se quelle fossero infinitesime di un ordine inferiore, questa di un superiore; poichè in ciascuno di questi casi α sarebbe sempre infinitesima rapporto ad a, b (1208). Si avverta però che la soppressione delle quantità finite di faccia alle infinite non deve aver luogo quando

sì l'une che l'altre faccian parte di un esponente: così $q^{\infty+1}$ non può ridursi a q^{∞}; perchè in tal caso l'unità aggiunta all'infinito non indica somma, ma prodotto, e si ha $q^{\infty+1}=q^{\infty}\times q$, espression ben differente da q^{∞} (1206).

1212. Questa celebre regola è conosciuta tra gli Analisti col nome di *principio infinitesimale*. La sua verità ed inconcussa sussistenza non è per vero dire quì dimostrata col più completo rigore; essendochè dati non le abbiamo in appoggio che esempj e fatti particolari, i quali comunque numerosi e di una forza, quasi diremo, irresistibile, atti non sono a indur nell'animo un pieno ed intero convincimento. Invano però se ne cercherebbe una prova regolare e diretta; ed inutili sono stati finquì, e forse sempre saranno gli sforzi tutti dei Geometri a questo riguardo. Molti han creduto che l'immensa sproporzione che passa fra le quantità finite, e l'infinitesime dia un sufficiente diritto di riguardar queste come nulle in confronto di quelle; ma tale antigeometrica opinione, che tenderebbe a confondere l'una con l'altra le due nozioni inconciliabili dell'approssimazione comunque somma, e dell'assoluto rigore, è con ogni ragione oggimai riprovata. Procederemo per altro sempre sul sicuro, se nell'attuale stato della scienza, ci limiteremo a riguardare il principio infinitesimale non altrimenti, che come un prezioso compenso spontaneamente indicato da una folla di fatti analitici, mediante il quale le leggi esclusivamente stabilite per il calcolo delle quantità finite potranno senza errore applicarsi anche ai casi, che con quelle miste si trovino in una stessa equazione quantità infinitesime. A toglier poi ogni ragionevole dubbio che il principio sia in se medesimo irrefragabile, o che almeno tenga luogo e faccia misteriosamente le veci di qualche altro principio più rigoroso, ma non ancor disvelato, giovi sapere, che severissime e sommamente moltiplicate prove ne hanno finora in mille e mille guise tentata e sperimentata la bontà, ed a tutte ha sempre in modo mirabile corrisposto. Quanto e la Sintesi antica, e la moderna Analisi hanno in sè di più certo, tutto mirabilmente concorda con ciò che si ottiene applicando alle ricerche il principio infinitesimale; con la diffe-

renza che questo con incredibile speditezza e semplicità conduce alle soluzioni stesse, a cui gli altri metodi non guidano che per vie scabrose ed intrigatissime; e al punto ove questi, esaurita ogni lor possa, si arrestano, quello vigorosamente si avanza, varcati tutti i confini che per l'addietro neppur si osava sperare potersi raggiunger giammai. Quindi è che appena accettato e introdotto, le Matematiche immensamente estesero il loro dominio, e in breve tempo giunsero a quell'auge maravigliosa, di cui oggi giorno tanto meritatamente si gloriano.

Leibnizio, che il primo arricchì l'Analisi del principio del quale parliamo, lo riguardò come assioma, sembrandogli troppo evidente che due quantità debbano prendersi per eguali, allorchè la lor differenza è minore di qualunque quantità immaginabile ed assegnabile; e poco o niente curando le speciose obiezioni che gli venivano opposte, non pensò che a trar partito dalla prodigiosa fecondità del suo fortunato concetto, ed entrar coraggioso nel vasto campo di scoperte, a cui mediante il medesimo si era aperta la più facile strada. *Eulero* che volle poscia ridurlo a teorema non fu molto felice nei suoi tentativi; ed anzi che diminuire, piuttosto contribuì ad accrescere le querele degli oppositori: talchè i più insigni fra i susseguenti Analisti giudicaron miglior partito di abbandonare il principio infinitesimale, e supplire con altri, che fossero maggiormente al coperto dagli attacchi di tutte le metafisiche sottigliezze. Il metodo dei *limiti* e quello delle *derivazioni*, a questo proposito immaginati, l'uno da *D'Alembert*, l'altro da *La Grange*, riescirono applauditissimi, e lor si applaude tuttora: ma poichè quanto questi superavano l'antico principio per parte dell'evidenza geometrica, altrettanto gli cedevano nella semplicità e nella facilità delle applicazioni, il canone Leibniziano fu perciò di nuovo proposto e raccomandato da quei medesimi che più faticato avevano per farlo abbandonare. Ciò per altro essi non fecero senza una qualche apparenza di riserva, poichè accordarono l'uso libero del principio infinitesimale nelle Matematiche applicate alla Fisica, ove la natura delle ricerche comporta l'omissione delle quantità sommamente piccole, non che delle infinitesime; concessero poi che si adoprasse nelle Matematiche astratte, ma come semplice strumento atto a semplicizzare le operazioni; premurosamente avvertendo di non tenerlo, quale infatti non è, come principio abbastanza ancor dimostrato; d'onde troppo chiaro si scorge che internamente lo avevano essi stessi per vero, che ne sentivano tutto il bisogno, e che in modo alcuno piegar si sapevano a denotare come pericoloso e contrario al vero spirito della scienza un canone, a cui la scienza stessa va interamente debitrice dei suoi portentosi progressi, e dell'attuale sua gloria.

Ciò valse intanto a richiamare alcun poco in onore ed in uso il principio degl' infinitesimi, che poco avanti si teneva dai più come irremissibilmente pro-

scritto; quantunque per altro anche i suoi più caldi oppugnatori, costretti dalla necessità, non si astenessero essi pure dal prevalersene; di che non mancherebbero molti esempj da addurre. Ed a questa sua reintegrazione non poco contribuirono i clamori che già da più parti sorgevano, e contro il fondo del metodo dei limiti, e contro la somma difficoltà di applicare ai casi pratici quello delle derivazioni. Generalmente però non vuolsi ancora riguardare questo sì controverso principio come privo d'erroneità; si tiene bensì che l'errore non scenda in modo alcuno fino agli ultimi risultamenti. Divise son poi le opinioni circa il modo di conciliare una sì patente incongruenza. Alcuni considerano il fatto come conseguenza di un'occulta compensazione d'errori; altri ritrovano negl'infinitesimi quantità d'indole estranea alla questione, che il calcolo ammette in forma di semplici ausiliarie, e come tali debbon dunque escludersi dalla soluzione, onde questa si riduca ai suoi veri termini, ed alla sua rigorosa esattezza. Altri osservano che l'effettiva e pratica espulsione degli infinitesimi non ha poi luogo se non nella ricerca di quei rapporti che possono in egual modo esser dati dalle sole quantità residuali, come dalle funzioni intatte e complete. Altri infine si avvisano che la diversità dei canoni Leibniziano e Lagrangiano non derivi se non dalle viziose definizioni, rettificate le quali i due principj si affratellano, e non ne fanno che un solo. Presso che tutti però mancano di generalità nelle prove dei loro assunti, e inviluppano i raziocinj in una Metafisica anche più oscura ed inintelligibile del mistero stesso che prendono a decifrare. Quindi non è maraviglia se la disputa rimane tuttora indecisa, e se anzi ogni dì si rinnova; o se per dir meglio, ogni dì più si rinnovano gli sforzi diretti a portare, se è possibile, in piena evidenza, e a far trionfare una regola che a verun patto nè vuolsi, nè devesi abbandonare.

Frattanto i più moderni compilatori di Elementi, facendosi, come giusto è, il più severo e scrupoloso dovere di escluderne tutto ciò che seco non ha l'impronta di verità rigorosamente conclusa, han dovuto invertire l'esposizione del Calcolo differenziale. Vi s'introducono preponendo la teoria dei limiti, o l'altra delle derivazioni, e da queste unicamente traggono non solo i dogmi principali, ma le frasi ancora e il linguaggio che impiegano negli enunciati. Non fanno poi che poche e brevi parole del principio infinitesimale, ed in forma soltanto come di storica appendice; senza però mancare di esaltarne la semplicità, e dargli quindi sugli altri negli usi ordinarj, e molto più nei casi maggiormente complicati, la preferenza. Noi non abbiam creduto dovere in tutto uniformarci a questo partito; sembrandoci più a proposito che il Giovane, anzi che ad un frasario e a dei modi che appena appresi dovrà poi abbandonare, si abitui di buon ora e sul bel principio a quelli, dei quali in seguito dovrà perpetuamente far uso, e che usati troverà da tutti i Classici insigni.

ELEMENTI

DEL CALCOLO DIFFERENZIALE ED INTEGRALE

Fondamenti di questi Calcoli

1213. Le quantità si dividono in *costanti* ed in *variabili*: le costanti, che sogliono indicarsi con le prime lettere a, b, c, ec. non crescono nè scemano; le variabili, che si esprimono con l'ultime x, y, z, ec., crescono o scemano continuamente. Così il diametro del circolo, gli assi, i parametri delle curve sono quantità costanti, mentre le ascisse, le ordinate, le tangenti sono quantità variabili. La porzione di cui una variabile x o y cresce o scema, si esprime con $\pm\partial x$, $\pm\partial y$ se è finita, con $\pm dx$ $\pm dy$ se è infinitesima, e si chiama nel 1°. caso *differenza finita*, nel 2°. *differenza infinitesima*, o semplicemente *differenziale*; avendo luogo il $+$ se la variabile cresce, il $-$ se scema. Dunque ∂ o d non sono quantità, ma semplicemente segni con cui s'indica il cangiamento finito o infinitesimo della variabile. E generalmente $\partial\varphi(x)$, $\partial f(x,y)$, $d\varphi(x)$, $df(x,y)$, ec. rappresentano, secondo il segno ∂ o d, la differenza finita o infinitesima di una funzione φ di x, o di una funzione f di x e di y, ec.; intendendosi per funzione di x, o di x e di y, ec. un'espressione comunque composta di queste variabili e di costanti (145).

1214. Sia la curva CMH dell'equazione $y=\varphi(x)$, e con le coordinate $AB=x$, $AD=x'$, $AF=x''$, ec., $BC=y$, $DE=y'$, $FG=y''$, ec.; sarà $BD=\partial x$, $DF=\partial x'$, ec., $Ea=\partial y$, $Gb=\partial y'$, ec. Avremo dunque $AD=x'=x+\partial x$, $DE=y'=y+\partial y$, ec., e di qui $\partial x=x'-x$, $\partial y=y'-y$, ec., onde 1°. *sottraendo dalla variabile cangiata il suo valore primitivo, ne risulta quello della sua differenza*, principio ben chiaro. F. 217

1215. Sarà inoltre $y'=\varphi(x')$, cioè $y+\partial y=\varphi(x+\partial x)$. Ma $y=\varphi(x)$, $\partial y=\partial\varphi(x)$, dunque $\partial\varphi(x)=\varphi(x+\partial x)-\varphi(x)$; perciò

2°. *per avere la differenza d' una funzione ad una sola variabile* x, *basta sostituirvi* $x+\partial x$ *in luogo di* x, *e toglierne in seguito la funzione primitiva.*

1216. Che se la funzione sia di più variabili, e si abbia $y=\varphi(u, x, z, \text{ec.})$, quantunque il cangiamento d' una sola variabile ne produca sempre uno nella funzione, il cangiamento totale della funzione, o il suo passaggio da y ad y', dovrà necessariamente dipendere da quello di tutte le variabili insieme; avremo in conseguenza $y'=\varphi(u', x', z', \text{ec})$, cioè $y+\partial y=\varphi(u, x, z, \text{ec.})+\partial\varphi(u, x, z, \text{ec.})=\varphi(u+\partial u, x+\partial x, z+\partial z, \text{ec.})$, e $\partial\varphi(u, x, z, \text{ec.})=\varphi(u+\partial u, x+\partial x, z+\partial z, \text{ec.})-\varphi(u, x, z, \text{ec.})$; di qui 3°. *la differenza totale di una funzione a più variabili si ottiene aumentando ciascuna di esse della sua differenza particolare, e sottraendo in seguito la funzione primitiva*

1217. Dunque $\partial(y+y'+y''+\text{ec.})=y+\partial y+y'+\partial y'+\ldots y''+\partial y''+\text{ec.}-(y+y'+y''+\text{ec.})=\partial y+\partial y'+\partial y''+\text{ec.}$; cioè 4°. *la differenza della somma di più funzioni, o termini variabili eguaglia la somma delle lor differenze.* Si noti che se sia $y=a$ costante, ne sarà nulla di sua natura la differenza. Avremo quindi $\partial y=0$, e $\partial(a+y'+y''+\text{ec.})=\partial y'+\partial y''+\text{ec.}$; d' onde si deduce, che *se alla somma di più termini o funzioni variabili vada unito qualche termine costante, di questo non resterà traccia alcuna nella differenza totale*, osservazione di gran rilevanza.

Frattanto poichè $x'=x+\partial x$, $y'=y+\partial y$, sarà $\partial x'=\ldots\ldots$ $\partial(x+\partial x)=\partial x+\partial\partial x$, e $\partial y'=\partial(y+\partial y)=\partial y+\partial\partial y$. Or l' espressioni $\partial\partial x$, $\partial\partial y$, che sogliono ancora scriversi $\partial^2 x$, $\partial^2 y$, si chiamano *differenze seconde*: $\partial^3 x$, $\partial^3 y$ sarebbero le *terze*, ec.; ove si osservi, che $\partial^2 x$ è molto diverso da ∂x^2, perchè $\partial^2 x$ è la seconda differenza di x, mentre ∂x^2 è il quadrato della prima ∂x. Ordinariamente, quando $y=\varphi(x)$, una delle diff renze prime ∂x, ∂y si riguarda come costante, supponendo per esempio BD= F 217. ∂x=DF=FI; ma non potranno mai farsi costanti ambedue, poichè allora sarebbe il triangolo CaE=EbG, e la curva CG si convertirebbe in una retta.

1218. Infine sia IH=y, FG=$'y$, DE=$''y$, BC=$'''y$, ec.,

premettendo l' accento per indicare il regresso delle ordinate al- F.217.
l' indietro: avremo $Hc=\partial' y$, $Gb=\partial'' y$, $Ea=\partial''' y$, ec., onde $y-\partial' y = 'y$, $'y-\partial'' y = '' y$, $'' y-\partial''' y = ''' y$, ec., e perciò $y=\partial' y + ' y = \partial' y + \partial'' y + '' y = \partial' y + \partial'' y + \partial''' y + ''' y +$ ec. $= \partial(' y + '' y + ''' y +$ ec.$) + {}^{(n)} y$ (1217); dal che si rileva 5°. che *supponendo* ${}^{(n)} y = 0$, *cioè nullo il primo termine della serie costituita dai differenti valori di* y, *ciascun termine di questa serie, o in generale una funzione qualunque di* y, *è sempre la differenza della somma dei termini che la precedono.* Dunque lo spazio Hi, l' arco Hh, ec. tutte funzioni di y, come vedremo, son la differenza della somma degli spazj GI, EF, ec., o degli archi GH, EG, ec., ovvero di uno spazio qualunque CI, o di qualunque arco CH, ec.

1219. Di questi teoremi che tutti egualmente si avverano delle differenze finite e dell' infinitesime, il 3°. e 4°. formano il principal fondamento del *Calcolo differenziale*, che ha per oggetto di determinare nei diversi casi particolari il valore assoluto della differenza di una funzione, se si tratti di differenze finite; o il rapporto della differenza della funzione a quella della variabile, se si tratti di differenze infinitesime: il 5°. può dirsi la base del *Calcolo integrale*, in cui cercasi o la funzione, d' onde deriva una differenza data, o il rapporto della funzione alla variabile, quando è dato quello delle lor differenze. Nel seguito s' intenderanno meglio queste definizioni. Intanto nel dar le regole dei due Calcoli supporremo le variabili sempre crescenti, e quindi positive le differenze (1213), quando altro non si avverta in contrario.

Prime regole dei due Calcoli

1220. Ripresa la formula $y=\varphi(x)$ (1214), e cangiatavi x in $x+\partial x$ (1215), si sviluppi $\varphi(x+\partial x)$ in serie ordinata per le potenze di ∂x, ponendo col solito metodo (421) $\varphi(x+\partial x) = P + A\partial x + B\partial x^2 + C\partial x^3 +$ ec. I coefficienti P, A, B, C, ec dovranno esser funzioni della sola x, senza contener ∂x, da cui saran perciò indipendenti (*ivi* 2°). Inoltre sarà $P=\varphi(x)$ (436.3°).

ed in conseguenza $\varphi(x+\delta x)-\varphi(x)=(1215)\delta\varphi(x)=A\delta x+\ldots$ $B\delta x^2+C\delta x^3+$ec., d' onde, conosciuti che si abbiano i coefficienti A, B, C, ec., avremo dunque la differenza finita della funzione $\varphi(x)$ (1213), o l' aumento o variazione che subisce questa funzione, quando x vi si cangi in $x+\delta x$. Dividendo per δx avremo $\frac{\delta\varphi(x)}{\delta x}=A+B\delta x+C\delta x^2+$ec., rapporto dell' aumento della funzione a quello della variabile. Or qui è da osservarsi che quanto più impiccolisce δx, tanto meno il secondo membro differisce dal suo primo termine A. Dunque A è il limite a cui continuamente tende il rapporto $\frac{\delta\varphi(x)}{\delta x}$, a misura che δx va impiccolendo, e al quale finalmente perverrebbe, quando δx, e in conseguenza $\delta\varphi(x)$ che ne dipende, giunte fossero al massimo possibile decremento, ossia quando divenissero infinitesime (1204), e l' una si cangiasse in dx l' altra in $d\varphi(x)$ (1213). Quindi tanto $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, quanto A son limiti del rapporto $\frac{\delta\varphi(x)}{\delta x}$, o della serie che ne risulterebbe, dandovi successivamente a δx dei valori sempre di più in più piccoli in infinito. Ma due limiti di una stessa serie non possono esser differenti fra loro (1206); potremo dunque stabilire con pieno rigore $\frac{d\varphi(x)}{dx}=A$. Si noti che a questa medesima equazione ci avrebbe pure condotti il principio infinitesimale; poichè quando δx si considera infinitesima, e si cangia il rapporto $\frac{\delta\varphi(x)}{\delta x}$ in $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, tutto ciò che nel secondo membro consegue A, riducendosi ad una quantità infinitesima, comecchè moltiplicata per l' infinitesimo dx, deve esser tolto (1210); il che dà immediatamente $\frac{d\varphi(x)}{dx}=A$.

1221. Or poichè, siccome avvertimmo (1219), oggetto unico del Calcolo differenziale è quello di trovare il valore del rapporto $\frac{d\varphi(x)}{dx}$, tutte le regole che adesso siamo per dare di questo Calcolo saranno esclusivamente rivolte alla ricerca del valore di A. Ma prima di passare ad esporle, noteremo 1°. che da $\frac{d\varphi(x)}{dx}=A$, traendosi $d\varphi(x)=Adx$, sarà dunque Adx l' espres-

sione generica del *differenziale* di $\varphi(x)$ (1213), funzione qualunque di x; 2°. che essendo il coefficiente A una funzione di x (1220), diversa però da $\varphi(x)$, potremo anche rappresentarlo con $\varphi_1(x)$, e il differenziale prenderà allora la forma di $dx\varphi_1(x)$; 3°. che A, o il suo valore $\varphi_1(x)$, comecchè indipendente da dx (*ivi*), è sempre una quantità finita, la quale generalmente suole indicarsi col nome di ***coefficiente differenziale***, o con l'altro di *derivata* ***prima di*** $\varphi(x)$. Daremo conto a suo luogo (438) di quest'ultima denominazione, che è in uso da poco tempo e non presso tutti.

1222. Frattanto poichè Adx non è in somma che il secondo termine dello sviluppo di $\varphi(x+dx)$, o per dir meglio, il termine ove dx vi è alla prima dimensione, dunque *per differenziare una qualunque funzione* $\varphi(\mathrm{x})$ *di una variabile* x, *vi si ponga* x+dx *in luogo di* x, *e sviluppata la nuova funzione per le potenze di* dx, *il secondo termine dello sviluppo, o quello ove* dx *è alla prima dimensione, sarà il differenziale cercato.* Ma questa regola nei diversi valori particolari di $\varphi(x)$ è riducibile ad una più comoda enunciazione.

1223. Cominciando dalle funzioni ad una sola variabile e monomie, sia in primo luogo $\varphi(x)=\pm bx^n$; sarà $\varphi(x+dx)=\pm b(x+dx)^n=$ (214) $\pm bx^n \pm nbx^{n-1}dx \pm$ ec., dunque $d(\pm bx^n)$ $=$ (1222) $\pm bnx^{n-1}dx$, cioè *si differenzia una variabile a qualunque grado, diminuendone di un' unità l' esponente, e moltiplicandola per il prodotto del suo differenziale nel coefficiente e nell' esponente primitivo.* Così $d(x^2)=2xdx$; $d(3x^5)=15x^4dx$; $d(-\frac{2}{3}x^6)=-4x^5dx$; $d(\sqrt[3]{3x^2})=d(3^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}})$ $=2.3^{-\frac{2}{3}}x^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{2dx}{\sqrt[3]{9x}}$; $d(\frac{1}{x})=d(x^{-1})=-x^{-2}dx=-\frac{dx}{x^2}$.

1224. Si osservi intanto 1°. che essendo $d(x^n)=nx^{n-1}dx$, avremo $\pm bd(x^n)=\pm bnx^{n-1}dx=$ (1223) $d(\pm bx^n)$; cioè *il coefficiente costante della potenza può sempre portarsi fuori del segno differenziale, e reciprocamente.* Sarà dunque $d(\pm bx)=\pm bdx$: perciò 2°. *se la potenza è del primo grado, si differenzierà sostituendo alla variabile il suo differenziale.*

Infine poichè $d\left(\sqrt[m]{bx^n}\right)=b^{\frac{1}{m}}d\left(x^{\frac{n}{m}}\right)=\frac{n}{m}b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}-1}dx= \ldots$

$\frac{n}{m}b^{\frac{1}{m}}x^{\frac{n}{m}-1}dx\,\frac{b^{1-\frac{1}{m}}x^{n-\frac{n}{m}}}{b^{1-\frac{1}{m}}x^{n-\frac{n}{m}}}=\frac{nbx^{n-1}dx}{m\sqrt[m]{(bx^n)}^{m-1}}=\frac{d(bx^n)}{m\sqrt[m]{(bx^n)}^{m-1}}$; dunque 3°. *il differenziale di un radicale del grado* m *può aversi anche più immediatamente, dividendo il differenziale della quantità sotto il segno per il prodotto di* m *nella radice* m*sima* *di questa quantità alzata all' esponente* m—1.

1225. Sia in secondo luogo $\varphi(x)=lx$. Poichè $l(x+dx)=lx\left(1+\frac{dx}{x}\right)=$ (448.1°) $lx+l\left(1+\frac{dx}{x}\right)=lx+A\left(\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\frac{dx^2}{x^2}+\text{ec.}\right)$ (451), sarà dunque (1222) $d(lx)=\frac{Adx}{x}$, se il logaritmo è ordinario; e $d(lx)=\frac{dx}{x}$, se è iperbolico (454), come sempre supporremo nel seguito. Perciò *si differenzia un logaritmo dividendo per la quantità sotto il segno il suo differenziale.* Così $d(lx^n)=\frac{nx^{n-1}dx}{x^n}=\frac{ndx}{x}$. Parimente $d(l^nx)=$ (1223) $\ldots$ $nl^{n-1}xd(lx)=\frac{n}{x}dxl^{n-1}x$; e infine $d(llx)=\frac{d(lx)}{lx}=\frac{dx}{xlx}$.

1226. Intanto poichè $dx=xd(lx)$, e cangiato x in X funzione di x, si avrebbe egualmente $dX=Xd(lX)$, perciò *il differenziale di una variabile, o di una sua qualunque funzione, eguaglia il prodotto di essa nel differenziale del suo logaritmo.* Così $d(x^m)=x^md(lx^m)=\frac{mx^mdx}{x}=mx^{m-1}dx$, come trovammo (1223). Dunque se in terzo luogo sia $\varphi(x)=a^{mx}$, avremo $d(a^{mx})=a^{mx}d(la^{mx})=a^{mx}\times d(mxla)=ma^{mx}dxla$; e se a si cangi in e, numero il cui logaritmo iperbolico è l'unità (461), sarà $d(e^{mx})=me^{mx}dx$. Egualmente $d\left(e^{e^x}\right)=e^{e^x}d\left(le^{e^x}\right)=e^{e^x}\times d(e^xle)=e^{e^x}e^xdx$.

1227. Debbano in quarto luogo differenziarsi $senx$, e $cosx$. Poichè le formule del num°. 829.3°, permutandovi ω in x, ed x in dx, danno $sen(x+dx)=senx+dxcosx-\frac{1}{2}dx^2senx-$ec., e $cos(x+dx)=cosx-dxsenx-\frac{1}{2}dx^2cosx+$ec.; sarà dunque

$d(\mathrm{sen}x)=dx\cos x$. $d(\cos x)=-dx\,\mathrm{sen}x$. Perciò *si ha il differenziale del seno moltiplicando quello dell' arco per il coseno, e il differenziale del coseno moltiplicando quello dell' arco negativo per il seno.* Così $d(\mathrm{sen}^m x)=mdx\,\mathrm{sen}^{m-1}x\cos x$; .. .. $d(\cos mx)=-mdx\,\mathrm{sen}mx$; $d(\cos lx)=-d(lx)\mathrm{sen}lx=-\frac{dx}{x}\mathrm{sen}lx$.

1228. Ma sia $\varphi(x)$ un prodotto di due o più funzioni X, X', X'', ec. di x, comunque diverse fra loro. Si avrà (1226) $d(XX')=XX'd(lXX')=(448.1^{o})\ XX'd(lX+lX')=(1225)$ $X'dX+XdX'$. Si troverebbe egualmente $d(XX'X'')=X'X''\times dX+XX''dX'+XX'dX''$: onde *si differenzia un prodotto di più funzioni diverse della stessa variabile, sommando quelli del differenziale di ciascheduna per tutte le altre.* Così $d(xlx\sqrt[4]{x^3})=dxlx\sqrt[4]{x^3}+\frac{3}{4}dxlx\sqrt[4]{x^3}+dx\sqrt[4]{x^3}$: $d(e^{3x}l^2x)=3e^{3x}dxl^2x+\frac{2e^{3x}dxlx}{x}$; $d(e^x\,\mathrm{sen}^2e^x\cos x)=e^xdx\,\mathrm{sen}^2e^x\cos x+2e^{2x}dx\,\mathrm{sen}e^x\cos e^x\cos x-e^xdx\,\mathrm{sen}^2e^x\,\mathrm{sen}x=e^xdx\,\mathrm{sen}e^x(\mathrm{sen}e^x\cos x+2e^x\cos e^x\cos x-\mathrm{sen}e^x\,\mathrm{sen}x)$.

1229. Con ciò si differenziano x^x, x^{x^x}, ec. Infatti $d(x^x)=$ $(1226)\ x^xd(lx^x)=x^xd(xlx)=x^x(dxlx+dx)=x^xdx(lx+1)$: ed egualmente $d(x^{x^x})=x^{x^x}d(lx^{x^x})=x^{x^x}d(x^xlx)=x^{x^x}(d(x^x)lx+x^xd(lx))=x^{x^x}(x^xdx(lx+1)lx+\frac{x^xdx}{x})=x^{x^x}x^xdx(l^2x+lx+\frac{1}{x})$.

1230. Parimente $d\left(\frac{X}{X'}\right)=\frac{X}{X'}d\left(l\frac{X}{X'}\right)=\frac{X}{X'}d(lX-lX')=\frac{dX}{X'}-\frac{XdX'}{X'^2}=\frac{X'dX-XdX'}{X'^2}$; perciò *si differenzia un rotto, prendendo il prodotto del denominatore per il differenziale del numeratore; sottraendone quello del numeratore per il differenziale del denominatore, e dividendo il resto per il quadrato del denominatore.* Così $d\left(\frac{3x^3}{lx}\right)=\frac{9x^2dxlx-3x^2dx}{l^2x}=\ldots\frac{3x^2dx(3lx-1)}{l^2x}$; $d\left(\frac{l^3x}{4\sqrt{x}}\right)=\left(\left(\frac{12dxl^2x\sqrt{x}}{x}\right)-\frac{2dxl^3x}{\sqrt{x}}\right)$: $16x=\ldots\frac{dxl^2x(6-lx)}{8x\sqrt{x}}$; $d\left(\frac{lx}{\cos x}\right)=\frac{dx(\cos x+xlx\,\mathrm{sen}x)}{x\cos^2x}$; che se il numera-

tore è costante, *sarà* $dX=0$, *e basterà allora dividere per il quadrato del denominatore il prodotto del suo differenziale negativo nel numeratore.* Così $d\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{dx}{x^2}$ come già trovammo (1223), e $d\left(\frac{1}{lx}\right)=-\frac{dx}{xl^2x}$.

1231. Da ciò, rammentandoci (1227) 1°. che $d(senx)=dxcosx$; 2°. che $d(cosx)=-dxsenx$, e richiamando inoltre le formule del paragr. 787., otterremo

3°. $d(tangx)=d\left(\frac{senx}{cosx}\right)=\frac{dxcos^2x+dxsen^2x}{cos^2x}=\frac{dx}{cos^2x}=dx(1+tang^2x)$

4°. $d(cotx)=d\frac{1}{tangx}=-\frac{dx}{cos^2xtang^2x}=-\frac{dx}{sen^2x}=-dx(1+cot^2x)$

5°. $d(secx)=d\frac{1}{cosx}=\frac{dxtangx}{cosx}=dxsecx\sqrt{(sec^2x-1)}$

6°. $d(cosecx)=d\frac{1}{senx}=-\frac{dxcotx}{senx}=-dxcosecx\sqrt{(cosec^2x-1)}$

7°. $d(sen.v.x)=(779)d(1-cosx)=dxsenx=dx\sqrt{(1-cos^2x)}=dx\sqrt{(1-cosx)}\times(1+cosx)=dx\sqrt{sen.v.x(2-sen.v.x)}$

8°. $d(cos.v.x)=(ivi)d(1-senx)=-dxcosx=-dx\sqrt{(1-sen^2x)}=\ldots\ldots\ldots\ldots-dx\sqrt{(1-senx)(1+senx)}=-dx\sqrt{cos.v.x(2-cos.v.x)}$

1232. Si rappresenti frattanto con p il seno, o il coseno, o la tangente, ec. dell' arco x; sarà $p=senx,=cosx,=tangx$, ec., e dx sarà il differenziale dell' arco che ha per seno, o per coseno, o per tangente, ec, p; il che si esprime scrivendo compendiosamente $dx=d.arc.senp,=d.arc.cosp$, ec. Quindi le formule superiori respettivamente daranno

1°. $dx=d.arc.senp=\frac{dsenx}{cosx}=\frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$

2°. $dx=d\,arc.cosp=-\frac{dcosx}{senx}=-\frac{dp}{\sqrt{(1-p^2)}}$

3°. $dx=d.arc.tangp=\frac{dtangx}{1+tang^2x}=\frac{dp}{1+p^2}$

4°. $dx=d.arc.cotp=-\frac{dcotx}{1+cot^2x}=-\frac{dp}{1+p^2}$

5°. $dx=d.arc.secp=\frac{dsecx}{secx\sqrt{(sec^2x-1)}}=\frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$

6°. $dx=d.arc.cosecp=-\frac{dcosecx}{cosecx\sqrt{(cosec^2x-1)}}=-\frac{dp}{p\sqrt{(p^2-1)}}$

$$7^{\circ}.\ dx = d.arc.sen.v.p = \frac{dsen.v.x}{\sqrt{sen.v.x(2-sen.v.x)}} = \frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}$$

$$8^{\circ}.\ dx = d.arc.cos.v.p = -\frac{dcos.v.x}{\sqrt{cos.v.x(2-cos.v.x)}} = -\frac{dp}{\sqrt{(2p-p^2)}}.$$

1233. Queste formule, che sono di un uso grandissimo nel Calcolo integrale, possono anche più generalizzarsi ponendo $\frac{m}{n}p$ in luogo di p, e in conseguenza $\frac{mdp}{n}$ in luogo di dp. Ciò darà

$$1^{\circ}.\ d.arc.sen\frac{m}{n}p = \frac{mdp}{\sqrt{(n^2-m^2p^2)}};\qquad 2^{\circ}.\ d.arc.cos\frac{m}{n}p = -\frac{mdp}{\sqrt{(n^2-m^2p^2)}},$$

$$3^{\circ}.\ d.arc.tang\frac{m}{n}p = \frac{mndp}{n^2+m^2p^2};\qquad 4^{\circ}.\ d.arc.cot\frac{m}{n}p = -\frac{mndp}{n^2+m^2p^2}$$

$$5^{\circ}.\ d.arc.sec\frac{m}{n}p = \frac{ndp}{p\sqrt{(m^2p^2-n^2)}};\qquad 6^{\circ}.\ d.arc.cosec\frac{m}{n}p = -\frac{ndp}{p\sqrt{(m^2p^2-n^2)}}$$

$$7^{\circ}.\ d.arc.sen.v.\frac{m}{n}p = dp\sqrt{\frac{m}{p(2n-mp)}};\qquad 8^{\circ}.\ d.arc.cos.v.\frac{m}{n}p = -dp\sqrt{\frac{m}{p(2n-mp)}}$$

1234. Se poi si cangi p in $\frac{m}{np}$, e quindi dp in $-\frac{mdp}{np^2}$.... (1230), troveremo

$$1^{\circ}.\ d.arc.sen\frac{m}{np} = -\frac{mdp}{p\sqrt{(n^2p^2-m^2)}};\qquad 2^{\circ}.\ d.arc.cos\frac{m}{np} = \frac{mdp}{p\sqrt{(n^2p^2-m^2)}}$$

$$3^{\circ}.\ d.arc.tang\frac{m}{np} = -\frac{mndp}{m^2+n^2p^2};\qquad 4^{\circ}.\ d.arc.cot\frac{m}{np} = \frac{mndp}{m^2+n^2p^2}$$

$$5^{\circ}.\ d.arc.sec\frac{m}{np} = -\frac{ndp}{\sqrt{(m^2-n^2p^2)}};\qquad 6^{\circ}.\ d.arc.cosec\frac{m}{np} = \frac{ndp}{\sqrt{(m^2-n^2p^2)}}$$

$$7^{\circ}.\ d.arc.sen.v.\frac{m}{np} = -\frac{dp}{p}\sqrt{\frac{m}{2np-m}};\qquad 8^{\circ}.\ d.arc.cos.v.\frac{m}{np} = \frac{dp}{p}\sqrt{\frac{m}{2np-m}}$$

1235. Riguardo alle funzioni polinomie, composte cioè di più termini non riuniti nè sotto un comune esponente, nè sotto un comun segno logaritmico o trigonometrico, rappresentando con y, y', y'', ec. questi termini, onde sia $\varphi(x)=y+y'+y''+$ ec., abbiamo già veduto (1217) che sarà $d\varphi(x)=dy+dy'+dy''+$ec.; cioè *la differenza totale della funzione eguaglierà la somma delle differenze particolari di ciascuno dei suoi termini*. Che se tra questi ve ne sieno dei costanti, sarà nulla la lor differenza, e secondo l'osservazione già fatta (1217), non ne resterà traccia alcuna nel differenziale. Così $d(a+bx^2+cx^3)$,

$=2bxdx+3cx^2dx$; $d(2+lsenx+tang^2l^3x)=dxcotx+\ldots\ldots\frac{6dxl^2xtangl^3x}{xcos^2l^3x}$; $d(a\pm bx^m)=\pm bmx^{m-1}dx$.

1236. Che se tutto intero un polinomio sia elevato ad una potenza, o compreso sotto un logaritmo o una funzione di circolo; poichè allora rappresenta un monomio, si tratterà come tale, considerando a guisa di semplice variabile la quantità sotto il segno. Così $d(a\pm bx^m)^n=(1223)\,n(a\pm bx^m)^{n-1}d(a\pm bx^m)=(1217)\pm bmnx^{m-1}dx(a\pm bx^m)^{n-1}$; $d(\sqrt{(a+bx+cx^2)})=(1224.3^o)\,\frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=(1217)\,\frac{bdx+2cxdx}{2\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$; . . . $d\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}=\left(dx\sqrt{(1+x^2)}-\frac{x^2dx}{\sqrt{(1+x^2)}}\right):(1+x^2)=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; $d(l(x^2+senx^3-\sqrt{(3+lx)}))=(1225)\,\frac{d(x^2+senx^3-\sqrt{(3+lx)})}{x^2+senx^3-\sqrt{(3+lx)}}=\frac{2x^2dx\sqrt{(3+lx)}(2+3xcosx^3)-dx}{2x(x^2+senx^3-\sqrt{(3+lx)})\sqrt{(3+lx)}}$.

1237. Infine poichè $d\varphi(x)=dx\varphi_1(x)$ (1221), sarà ancora $d\varphi(X)=dX\varphi_1(X)$, differenziale di $\varphi(X)$, purchè vi si ponga il valore di dX ottenuto con le regole precedenti. Così $d\varphi(x^2)=d(x^2)\varphi_1(x^2)=2xdx\varphi_1(x^2)$; $d\varphi(a^2-x^2)=d(a^2-x^2)\varphi_1(a^2-x^2)=-2xdx\varphi_1(a^2-x^2)$; $d\varphi\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)=d\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)\varphi_1\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)=\ldots\ldots\frac{me^{m\sqrt[n]{x}}dx}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\varphi_1\left(e^{m\sqrt[n]{x}}\right)$. Ma passiamo alle funzioni di più variabili.

1238. Già dicemmo che se $u=\varphi(x, y, z, \text{ec.})$, si ha $\partial u=\varphi(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, \text{ec})-\varphi(x, y, z, \text{ec})$ (1216). Si sviluppi $\varphi(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, \text{ec})$ in serie ordinata per le potenze e per i prodotti di ∂x, ∂y, ∂z, ec., cioè si ponga $\varphi(x+\partial x, y+\partial y, z+\partial z, \text{ec.})=P+A\partial x+B\partial y+C\partial z+\text{ec.}+H$, rappresentando con H tutti i termini dello sviluppo, ove le differenze ∂x, ∂y, ∂z, ec. formano delle dimensioni superiori alla prima (143). I coefficienti P, A, B, C, ec. dovranno al solito (1220) esser funzioni delle sole x, y, z, ec. e affatto indipendenti da ∂x, ∂y, ∂z ec. Inoltre sarà $P=\varphi(x, y, z, \text{ec.})$, va-

lore che si ha nel caso di tutte le differenze eguali a zero, e che per l' indipenza di P dalle medesime, deve in ogni altro caso esser vero (436.3°).

Ora si ponga $\delta y = m\delta x$, $\delta z = n\delta x$, ec; la più leggera riflessione sulla qualità del polinomio rappresentato da H, farà tosto comprendere, che introdotti questi nuovi valori, tutti i termini di H i quali contengono le differenze δx, δy, δz, ec. alla più bassa dimensione, cioè giusta il supposto, alla seconda, risulteranno moltiplicati per il quadrato di δx, e tutti i rimanenti per δx elevata a potenze sempre maggiori. Quindi il quadrato δx^2 entrerà come fattore in tutto intero il polinomio, che potremo allora perciò rappresentare con $L\delta x^2$. Avremo dunque $\delta u = A\delta x + Bm\delta x + Cn\delta x +$ ec. $+ L\delta x^2$; d' onde $\frac{\delta u}{\delta x} = A + Bm + Cn +$ ec. $+ L\delta x$. Or qui ripetendo gli stessi raziocinj già fatti sopra (1220), dovremo concludere che $A + Bm + Cn +$ ec. è il limite a cui tende il secondo membro, e quindi anche il primo, a misura che impiccolisce δx; e come il primo membro ha altresì per limite $\frac{du}{dx}$, perciò $\frac{du}{dx} = A + Bm + Cn +$ ec. ovvero $du = Adx + Bmdx + Cndx +$ ec. Ma mdx, ndx, ec. sono visibilmente i limiti dei valori di $\delta y = m\delta x$, di $\delta z = n\delta x$, ec. e perciò corrispondono respettivamente a dy, dz, ec. dunque infine $du = Adx + Bdy + Cdz +$ ec. espressione generale del differenziale di $u = \varphi(x, y, z, \text{ec.})$.

E qui pure potrà notarsi che a questa medesima conclusione ci avrebbe condotti il principio infinitesimale. Supponendo infatti che le differenze finite δx, δy, δz, ec., si cangino nelle infinitesime dx, dy, dz, ec., il polinomio H, che contiene queste differenze a dimensioni maggiori dell' unità, presenterà allora un complesso d' infinitesimi d' ordini superiori al primo, i quali dovendo esser tolti dall' equazione (1211), questa si cangerà tosto in $du = Adx + Bdy + Cdz +$ ec.

1239. Ora Adx, Bdy, Cdz, ec. sono i differenziali che si avrebbero da $\varphi(x, y, z, \text{ec})$, se si fossero considerate variabili prima la sola x, poi la sola y, in seguito la sola z, ec.; dunque *si differenzia una funzione di più variabili prendendone successi-*

vamente il differenziale per rapporto a ciascuna variabile, come se fosse unica nella funzione e le altre fossero altrettante costanti: e l' aggregato dei differenziali, che così si otterranno, sarà il differenziale cercato. Così se $u=a+bx+cy+gz$, sarà bdx il differenziale parziale per x, cdy quello per y, gdz quello per z, e $du=bdx+cdy+gdz$: onde *si differenzierà una funzione di più variabili al primo grado eliminandone i termini costanti, e sostituendo a ciascuna variabile il suo differenziale.*

Se $u=xy$, saranno ydx, xdy i due differenziali per x e per y, e $du=ydx+xdy$.

Se $u=ax^2 seny\sqrt{(1-xy)}$, avremo $2axdxseny\sqrt{(1-xy)}-\frac{ayx^2dxseny}{2\sqrt{(1-xy)}}$ differenziale per x, e (1228) $ax^2dycosy\times\sqrt{(1-xy)}-\frac{ax^3dyseny}{2\sqrt{(1-xy)}}$ differenziale parziale per y, onde $du=ax\times\sqrt{(1-xy)}(2dxseny+xdycosy)-\frac{ax^2seny}{2\sqrt{(1-xy)}}(ydx+xdy)$.

1240. Ma in questo ed in tutti i casi consimili può procedersi anche più facilmente, osservando che $du=(1226)\,ud(lu)$ $=ax^2seny\sqrt{(1-xy)}d(la+2lx+lseny+\frac{1}{2}l(1-xy))$: onde $ax^2seny\sqrt{(1-xy)}\left\{\frac{2dx}{x}-\frac{ydx}{2(1-xy)}\right\}$ è il differenziale per x, $ax^2seny\sqrt{(1-xy)}\left\{dycoty-\frac{xdy}{2(1-xy)}\right\}$ è quello per y; quindi $du=ax^2seny\sqrt{(1-xy)}\left\{\frac{2dx}{x}+dycoty-\frac{xdy+ydx}{2(1-xy)}\right\}$, espressione che facilmente riducesi alla precedente.

1241. Che se $u=\frac{F}{f}$, $=F\times f$, $=F\times f\times\Psi$, ec., essendo F, f, Ψ, ec. funzioni o delle stesse o di diverse variabili, sarà sempre nel primo caso $du=\frac{F}{f}d(l\frac{F}{f})=\frac{fdF-Fdf}{f^2}$, nel secondo $du=F\times fdl(F\times f)=fdF+Fdf$, e così nel terzo $du=f\times\Psi dF+F\times\Psi df+F\times fd\Psi$: onde per i prodotti e frazioni a più variabili potranno aver luogo ancora gli stessi metodi di differenziazione già dati per le frazioni e i prodotti ad una variabile sola (1228. 1230). Così $d\frac{x^2z}{\sqrt{(1-x^2y)}}=\frac{\sqrt{(1-x^2y)}d(x^2z)-x^2zd(\sqrt{(1-x^2y)})}{1-x^2y}=$

$\frac{2xzdx+x^2dz}{\sqrt{(1-x^2y)}}+\frac{2x^3zydx+x^4zdy}{2\sqrt{(1-x^2y)^3}}$.

1242. Se $u=\varphi(F)$, sarà $du=dF\varphi_1(F)$, e dovrà porsi il valore di dF ottenuto coi metodi precedenti: così per $u=\varphi(x^2+3ylx)$, si avrà $du=d(x^2+3ylx)\varphi_1(x^2+3ylx)=(2xdx+\frac{3ydx}{x}+3dylx)\varphi_1(x^2+3ylx)$. Che se $u=\varphi(F,f)$, il differenziale precedente si cangerà in $du=d(F.f)\varphi_1(F,f)$, ec.

1243. Infine se $u=arc.sen\frac{mx}{nz},=arc.cos\frac{mx}{nz}$, ec., riprese le formule del par. 1233, e fatto $p=\frac{x}{z}$, sarà $dp=\frac{zdx-xdz}{z^2}$, valori che sostituiti daranno

1°. $d.arc.sen\frac{mx}{nz}=\frac{m(zdx-xdz)}{z\sqrt{(n^2z^2-m^2x^2)}}$; 2°. $d.arc.cos\frac{mx}{nz}=\frac{m(xdz-zdx)}{z\sqrt{(n^2z^2-m^2x^2)}}$

3°. $d.arc.tang\frac{mx}{nz}=\frac{mn(zdx-xdz)}{m^2x^2+n^2z^2}$; 4°. $d.arc.cot\frac{mx}{nz}=\frac{mn(xdz-zdx)}{m^2x^2+n^2z^2}$

5°. $d.arc.sec\frac{mx}{nz}=\frac{n(zdx-xdz)}{x\sqrt{(m^2x^2-n^2z^2)}}$; 6°. $d.arc.cosec\frac{mx}{nz}=\frac{n(xdz-zdx)}{x\sqrt{(m^2x^2-n^2z^2)}}$

7°. $d.arc.sen.v\frac{mx}{nz}=\frac{m(zdx-xdz)}{z\sqrt{mx(2nz-mx)}}$; 8°. $d.arc.cos.v\frac{mx}{nz}=\frac{m(xdz-zdx)}{x\sqrt{mx(2nz-mx)}}$

1244. Per darne un esempio applichiamo la terza formula alla ricerca del differenziale dell' arco che ha per tangente ...... $\sqrt{\frac{(a-b)(1-y)}{(a+b)(1+y)}}$. Avremo $m=\sqrt{(a-b)}, n=\sqrt{(a+b)}, x=\sqrt{(1-y)}$, $z=\sqrt{(1+y)}$, e in conseguenza $mn=\sqrt{(a^2-b^2)}$, $m^2x^2+n^2z^2=2(a+by)$. Sarà inoltre (1224.3°) $dx=\frac{-dy}{2\sqrt{(1-y)}}$, $dz=\frac{dy}{2\sqrt{(1+y)}}$; d' onde $zdx-xdz=-\frac{1}{2}dy\left\{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}+\sqrt{\frac{1-y}{1+y}}\right\}$; e riducendo i due radicali allo stesso denominatore, $zdx-xdz=-\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, valori che sostituiti nella citata formula, daranno dunque $d\ arc.tang.\sqrt{\frac{(a-b)(1-y)}{(a+b)(1+y)}}=-\frac{dy}{2(a+by)}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{1-y^2}}$.

1245. I differenziali degli ordini superiori non ammettono difficoltà. Quelli del secondo si deducono dai differenziali del primo, trattandoli come quantità finite, e considerandovi dx, dy, dz, ec. come nuove variabili. Nel modo stesso si deducono quelli del terzo da quelli del secondo, e così successivamente. Sia per

esempio $y=x^n$ e per conseguenza $dy=nx^{n-1}dx$. Avremo dunque $d^2y=$ (1239) $n(n-1)x^{n-2}dx^2+nx^{n-1}d^2x$; $d^3y=n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3+3n(n-1)x^{n-2}dxd^2x+nx^{n-1}d^3x$, ec. Sia più in generale $y=\varphi(x)$, onde (1221) $dy=dx\varphi_1(x)$ sarà $d^2y=dx^2\varphi_2(x)+d^2x\varphi_1(x)$: $d^3y=dx^3\varphi_3(x)+3dxd^2x\varphi_2(x)+d^3x\varphi_1(x)$.

1246. Ma se dx è costante (1217), d^2x, d^3x, ec saranno nulle, ed allora per $y=x^n$, avremo $d^2y=n(n-1)x^{n-2}dx^2$, $d^3y=n(n-1)(n-2)x^{n-3}dx^3$, e $d^ny=n(n-1)(n-2)(n-3)\times 3.2.1dx^n$; per $y=\varphi(x)$ sarà $d^2y=dx^2\varphi_2(x)$, $d^3y=dx^3\varphi_3(x)$, e $d^ny=dx^n\varphi_n(x)$. Dunque $\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}=\varphi_n(x)$, quantità finita: onde d^ny o $d^n\varphi(x)$ e dx^n sono quantità omogenee e di uno stesso ordine infinitesimale (1208).

1247. Abbiasi $u=xsen(x+y)$, e si supponga dx costante. Sarà $du=dxsen(x+y)+x(dx+dy)cos(x+y)$, e $d^2u=2dx\times(dx+dy)cos(x+y)+xd^2ycos(x+y)-x(dx+dy)^2sen(x+y)$.

Del resto oltre le già accennate, molte altre vie si conoscono più o meno pronte, che conducono con sicurezza a buoni risultamenti: ma la pratica da se stessa le insegnerà, senza che ce ne occupiamo noi di vantaggio.

1248. Ritorneremo piuttosto al metodo generale, e avvertiremo, che come du rappresenta il differenziale totale di u, così secondo l'uso più universalmente accettato $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{du}{dz}\right)dz$, ec. ne rappresentano i differenziali parziali per x, y, z, ec; sebbene alcuni, stimando difettose queste maniere, scrivano piuttosto $\frac{du}{dx}dx$, $\frac{du}{dy}dy$, $\frac{du}{dz}dz$, ec. Noi ci atterremo alle prime, e richiamando lo stabilito principio (1239), avremo per prima conseguenza $du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+$ec. altra importante espressione del differenziale di una funzione a più variabili. Secondariamente se in u non sia che la sola x, la differenza parziale per questa variabile eguaglierà la totale della funzione, e si avrà $du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, terza maniera di esprimer generalmente il differenziale di una funzione ad una sola variabile (1221).

1249. Come $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$ rappresenta la funzione u differenziata una volta parzialmente per x, così $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2$ rappresenta la funzione u differenziata due vol-

te e sempre parzialmente per x; $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy$, rappresenta il differenziale di u per x, di nuovo differenziato non più per x, ma bensì per y; ed in generale,
$\left(\frac{d^{m+n+p}u}{dx^m dy^n dz^p}\right)dx^m dy^n dz^p$ rappresenta u differenziato m volte per x, poi n volte per y, e quindi p volte per z; $\left(\frac{d^2u}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{d^2u}{dy}\right)dy$ i differenziali di du per x o per y; $\left(\frac{d(Mdu)}{dx^2}\right)dx$ il differenziale di u per x diviso per dx, quindi moltiplicato per M, e poi differenziato per x, ec.

1250. Frattanto si avverta 1°. che dal confronto delle due espressioni di du (1238.1248) avendosi $\left(\frac{du}{dx}\right)=A$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=B$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=C$, ec., anche i coefficienti differenziali parziali $\left(\frac{du}{dx}\right)$ $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. sono quantità finite (1238), nè differiscono dai quozienti egualmente finiti (ivi) $\frac{du}{dx}$, $\frac{du}{dy}$, $\frac{du}{dz}$, ec., se non perchè il differenziale du vi si intende preso soltanto rapporto alla variabile del denominatore: il che si avvera egualmente di $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{dA}{dx}\right)$, di $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=$. , $\left(\frac{dA}{dy}\right)$, di $\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, ec.

2°. Se $u=\varphi(x,y,z)$, siccome $du=\varphi(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-u$, sarà (1215) 1°. $\left(\frac{du}{dx}\right)dx=\varphi(x+dx,\ y,\ z)-u$; 2°. $\left(\frac{du}{dy}\right)dy=\varphi(x,\ y+dy,\ z)-u$; 3°. $\left(\frac{du}{dz}\right)dz=\varphi(x,y,z+dz)-u$, ec. giacchè nella 1°. si considera variabile la sola x, nella 2°. la sola y, nella 3°. la sola z, e costanti tutte le altre quantità. Or se la 1°. si differenzia per y, la 2°. per x, avremo con gli stessi principj

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy=\varphi(x+dx,\ y+dy,\ z)-\left(u+\left(\frac{du}{dy}\right)dy\right)-\left(\frac{du}{dx}\right)dx;$$
$$\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dydx=\varphi(x+dx,\ y+dy,\ z)-\left(u+\left(\frac{du}{dx}\right)dx\right)-\left(\frac{du}{dy}\right)dy;$$

e perciò $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)$; dal che si conclude che o si differenzi prima per x poi per y, o prima per y poi per x, il risultamento è sempre lo stesso. Dunque per la ragione medesima $\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)=\left(\frac{d^2u}{dzdx}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)=\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right)$.....
Frattanto, poichè come abbiamo osservato, $\left(\frac{du}{dx}\right)=A$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=B$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=C$, le precedenti conclusioni daranno $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, $\left(\frac{dA}{dz}\right)=\left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right)=$.... $\left(\frac{dC}{dy}\right)$, equazioni che debbon sempre verificarsi qualora $Adx+Bdy+Cdz$ sia l'

esatto differenziale di du, e posson quindi servir di prova alla prima differenziazione.

3°. Se abbiasi semplicemente $u=\varphi(x,y)$, e perciò $du=Adx+Bdy$, nuovamente differenziando prima per x, poi per y, e rammentandoci che A, B sono nel nostro caso funzioni di x e di y (1238), avremo $\left(\frac{d^2u}{dx}\right)dx=\left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+Ad^2x+\left(\frac{dB}{dx}\right)dxdy$; $\left(\frac{d^2u}{dy}\right)dy=\left(\frac{dA}{dy}\right)dydx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy^2+Bd^2y$: onde $d^2u=\left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2+Ad^2x+2\left(\frac{dA}{dy}\right)dy\,dx+\left(\frac{dB}{dy}\right)dy^2+Bd^2y=$ .... $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2+\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dxdy+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy^2+\left(\frac{du}{dy}\right)d^2y$, espressione generale del differenziale secondo di u, funzione di due sole variabili x,y. Se dx è costante, mancherà il termine $\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x$; e se u sia funzione della sola x, resterà $d^2u=\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)dx^2+\left(\frac{du}{dx}\right)d^2x$, nuova importante espressione del differenziale secondo della funzione $\varphi(x)$.

1251. Termineremo con rilevare una molto osservabile proprietà relativa al differenziale primo delle funzioni algebriche omogenee (146). Sia u funzione omogenea di n dimensioni delle variabili x, y, z. Ponendo $y=sx$, $z=tx$, la funzione prenderà la forma di Px^n, ove P sarà funzione di s,t. Frattanto poichè $dy=sdx+xds$, e $dz=tdx+xdt$, avremo $du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)(sdx+xds)+\left(\frac{du}{dz}\right)\times$ .. $(tdx+xdt)=\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)s+\left(\frac{du}{dz}\right)t\right\}dx+\left(\frac{du}{dy}\right)xds+\left(\frac{du}{dz}\right)xdt$. Ma da $u=Px^n$, e da $P=\varphi(s,t)$ si ha $du=nPx^{n-1}dx+\left(\frac{dP}{ds}\right)x^nds+\left(\frac{dP}{dt}\right)x^ndt$, e i due differenziali debbon essere evidentemente identici; sarà dunque $\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)s+\left(\frac{du}{dz}\right)t=nPx^{n-1}$, ovvero moltiplicando per x, e ponendo per sx, tx, Px^n i loro valori y, z, u, $\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y+\left(\frac{du}{dz}\right)z=nu$. Da ciò si ha che se nel differenziale primo di una funzione omogenea u dell' n^{sima} dimensione, si pongano le variabili x, y, z, in luogo dei loro differenziali dx, dy, dz, ne risulterà la funzione u moltiplicata per n; onde se $n=0$ dovrà aversi $\left(\frac{du}{dx}\right)x+\left(\frac{du}{dy}\right)y+\left(\frac{du}{dz}\right)z=0$. Così da $du=\frac{ydx-xdy}{y^2}$, differenziale della funzione $u=\frac{x}{y}$ di niuna dimensione, si ha $yx-xy=0$; e da $du=2xzdx+(z^2+3y^2)dy+(x^2+2yz)dz$, differenziale di $u=x^2z+y(y^2+z^2)$ di 3ª. dimensione, si ha $2x^2z+(z^2+3y^2)y+(x^2+2yz)z=3u$,

1252. Queste sono le principali e più elementari regole del Calcolo differenziale. Per renderne ai Giovani più familiare l' uso, proporremo quì da verificarsi alcuni altri esempj, particolarmente osservabili per la semplicità dei loro risultamenti.

I. Sia da differenziarsi $y=\dfrac{2a+3x^3}{2a^2x\sqrt[4]{(a+x^3)^2}}$; troveremo $dy=-\dfrac{dx}{x\sqrt[3]{(a+x^3)^5}}$

II. Sia $y=l(\sqrt{(x^2+c^2)}+x)$; si avrà $dy=\dfrac{dx}{\sqrt{(x^2+c^2)}}$,

III. Sia $y=\frac{1}{2}x\sqrt{(x^2-a^2)}-\frac{1}{2}a^2l\dfrac{x+\sqrt{(x^2-a^2)}}{a}$; avremo $dy=dx\sqrt{(x^2-a^2)}$

IV. Sia $y=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}+a^2.arc.tang\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$; sarà $dy=dx\sqrt{(a^2-x^2)}$

V. Sia $y=(x^8+\dfrac{9}{8}x^6+\dfrac{9.7}{8.6}x^4+\dfrac{9.7.5}{8.6.4}x^2+\dfrac{9.7.5.3}{8.6.4.2})x\sqrt{(1-x^2)}-\ldots\ldots$

$\dfrac{9.7.5.3}{8.6.4.2}arc.sen x$; avremo $dy=-\dfrac{10x^{10}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$

VI. Sia $y=x^5\left\{l^3x-\dfrac{3}{5}l^2x+\dfrac{6}{5^2}lx-\dfrac{6}{5^3}\right\}$; troveremo $dy=5x^4dxl^3x$

VII. Sia $y=sen x(\cos^4x+\dfrac{4}{3}\cos^2x+\dfrac{8}{3})$; sarà $dy=5dx\cos^5x$

VIII. Sia $y=\dfrac{1}{1+x}+l\dfrac{x\sqrt{(1+x+x^2)}}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}arc.tang.\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$; si avrà $dy=$

$\dfrac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)}$

IX. Sia $y=arc.cos\dfrac{a\cos x+b}{b\cos x+a}$; si troverà $dy=\dfrac{dx\sqrt{(a^2-b^2)}}{b\cos x+a}$

1253. Da quanto abbiamo detto facilmente si apprenderanno le prime regole del Calcolo integrale, che secondo la definizione data (1219) è precisamente l' opposto del differenziale, nel modo che la divisione è l'opposto della moltiplicazione: ma si avverta primieramente, che come nel Calcolo differenziale si premette il segno d alla quantità che vuol differenziarsi, così nell' integrale premettesi il segno $\int$, che chiamasi *somma*, avanti al differenziale che vuol integrarsi, o da cui si vuol rimontare all' espressione primitiva, d' onde il differenziale è derivato: quindi $\int dx$, $\int nx^{n-1}dx$ vogliono significare quelle quantità di cui dx, $nx^{n-1}dx$ sono i differenziali.

1254. Inoltre poichè dx è egualmente differenziale di x,

di $x+a, x+b$, ec. (1235), non si potrà concludere generalmente $\int dx = x$: ma fatta l' integrazione dovremo sempre aggiungere una costante indeterminata C, atta a rappresentar tutti i termini costanti che la differenziazione può aver fatti svanire. Fra poco faremo sentir meglio la necessità e l'uso di quest'aggiunta: e intanto noteremo 1°. che può darsi alla costante una forma che l' assomigli agli altri termini; poichè se per esempio nell' equazione $ly = lx + C$, sia b il valor di x che rende $ly = 0$, sarà $0 = lb + C$, e $C = -lb$; 2°. che mentre la costante resta indeterminata, è indeterminato altresì il suo prodotto e il suo quoziente per qualunque altra costante nota, cosicchè può farsi $bC = C, \frac{C}{b} = C$; 3°. che la costante deve soltanto aggiungersi quando l' integrazione è interamente eseguita. Se questa non può effettuarsi che in parte, siccome vedremo accader bene spesso, niente si aggiunge.

1255. L' integrale accresciuto della sua costante si chiama *completo*, senza la costante si dice *particolare*. E come la costante può avere infiniti valori, così l'intregrale particolare può differire in infinite maniere dal completo. Dicesi particolare anche quell' integrale, in cui si sia dato alla costante un valore determinato; siccome dicesi *arbitraria* la costante nell' integrale completo, ove non ha avuto valore alcuno.

1256. Infine se una differenziazione non sia eseguita, ma soltanto accennata, mediante l' inclusione della quantità da differenziarsi sotto il segno differenziale, basterà per l' integrazione porre la quantità fuori del segno, con l' aggiunta della costante: così l' integrale di $d(\sqrt{(a^2 - x^2)})$ sarà $\sqrt{(a^2 - x^2)} + C$, il che è evidente. Dunque $\int bdx = (1224.1°) \int d(bx) = bx + C$; ma da $\int dx = x + C$ si ha egualmente $b\int dx = bx + bC = bx + C$ (1254), perciò 1°. $\int bdx = b\int dx$, onde *il coefficiente costante del differenziale può ad arbitrio premettersi al segno integrale*. Di più $\int dy + \int dy' + \int dy'' + \text{ec.} = y + y' + y'' + \text{ec.} + C = \int d(y + y' + y'' + \text{ec.} + C) = (1217) \int (dy + dy' + dy'' + \text{ec.})$, perciò 2°. *l' integrale di un differenziale polinomio eguaglia la somma degli integrali di ciascun termine.*

1257. Dopo tutto ciò avremo 1°. $\int(adx+bdy+cdz+\text{ec.})$ $=ax+by+cz+\text{ec.}+C$; onde *un polinomio della prima dimensione, e composto di puri differenziali, s' integra sostituendo a questi le loro variabili*; 2°. $\int bnx^{n-1}dx=$ (1256.1°) $b\int nx^{n-1}dx=$ (1223) $b\int d(x^n)=bx^n+C$. Perciò fatto $n=m+1$ si troverà $b\int x^m dx=\frac{bx^{m+1}+C}{m+1}=\frac{bx^{m+1}}{m+1}+C$: dunque *s' integra un differenziale algebrico e monomio, e di una sola variabile, aumentandone di un' unità l' esponente, e dividendola per il prodotto dell' esponente accresciuto nel di lei differenziale*. Così $\int x^5dx=\frac{x^6}{6}+C$; $\int 3x^7dx=\frac{3x^8}{8}+C$: $\int\frac{dx}{x^2}=\int x^{-2}\times$ $dx=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$; $\int b\sqrt[n]{x^m}dx=b\int x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{bnx^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}+C$. Si eccettui $\int\frac{dx}{x}=$(1225) $\int d(lx)=lx+lC=lCx$.

1258. Avremo inoltre 3°. $mloga\int a^{mx}dx=\int ma^{mx}dxloga$ $=$(1226)$\int d(a^{mx})=a^{mx}+C$: onde $\int a^{mx}dx=\frac{a^{mx}}{mloga}+C$, e .... $\int e^{mx}dx=\frac{1}{m}e^{mx}+C$; 4°. $\int dx\cos x=$ (1227) $\operatorname{sen}x+C$; .. $\int dx\operatorname{sen}x=-\cos x+C$; $\int\frac{dx}{\cos^2x}=$ (1231.3°) $\operatorname{tang}x+C$, ec.

1259. L' integrale di $gx^{n-1}dx(a+bx^n)^m$ si ottiene ponendo $a+bx^n=z$, e perciò $bnx^{n-1}dx=dz$; d' onde $\int gx^{n-1}dx\times$ $(a+bx^n)^m=\frac{g}{bn}\int z^mdz=$ (1257.2°) $\frac{g}{bn(m+1)}z^{m+1}+C=\ldots\ldots$ $\frac{g(a+bx^n)^{m+1}}{bn(m+1)}+C$, ec. Se peraltro $m=-1$, si avrà $\int\frac{gx^{n-1}dx}{a+bx^n}$ $=\frac{g}{bn}\int\frac{dz}{z}=\frac{g}{bn}lCz$ (*ivi*) $=\frac{g}{bn}lC(a+bx^n)$.

1260. In generale $\int x^ndx(a+bx^m)^r$ può aversi in tre casi: 1°. se r è numero intero e positivo; poichè sviluppando la potenza, e integrandone ciascun termine, si ha $\int(a^rx^ndx+ra^{r-1}\times$ $bx^{m+n}dx+\text{ec.})=C+\frac{a^rx^{n+1}}{n+1}+\frac{ra^{r-1}bx^{m+n+1}}{m+n+1}+$ ec., espressione finita nel nostro caso (214): 2°. se $\frac{n+1}{m}-1=c$, ossia $n=m\times$

$(c+1)-1$, essendo c zero, o intero positivo; poichè fatto $a+bx^m=z$, onde $x^m=\frac{z-a}{b}$, $x^{m-1}dx=\frac{dz}{mb}$, $x^{mc}=\frac{(z-a)^c}{b^c}$, ... $x^{mc+m-1}dx=\frac{(z-a)^c dz}{mb^{c+1}}$, verrà $\int x^n dx(a+bx^m)^r=\frac{1}{mb^{c+1}}\times\int z^r dz(z-a)^c$, che, sviluppata la potenza, s' integrerà come sopra: 3° se $-\frac{n+1}{m}-r=c$, ossia $n=-m(c+r)-1$, essendo c intero positivo; poichè $x^n dx(a+bx^m)^r=x^n x^{mr}dx\left(\frac{a+bx^m}{x^m}\right)^r=x^{n+mr}dx(b+ax^{-m})^r$, e fatto $b+ax^{-m}=z$, onde $x^{-m}=\frac{z-b}{a}$, $x^{-m-1}dx=\frac{dz}{-ma}$, $x^{-1}dx=\frac{dz}{-m(z-b)}$, verrà $\int x^{n+mr}\times dx(b+ax^{-m})^r=\frac{-1}{ma^c}\int z^r dz(z-b)^{c-1}$. Così $\int x^{-2}dx(a+\ldots x^3)^{-\frac{5}{3}}$ dà $n=-2$, $b=1$, $m=3$, $r=-\frac{5}{3}$, $n+mr=-7=-3c-1$, onde $c=2$; quindi $-\frac{1}{3a^2}\int(z^{-\frac{2}{3}}dz-z^{-\frac{5}{3}}dz)=\ldots\ldots\ldots$ $-\frac{2z+1}{2a^2z^{\frac{2}{3}}}=-\frac{3x^3+2a}{2a^2x\sqrt[3]{(a+x^3)^2}}$.

1261. Non verificandosi le tre condizioni, il differenziale $x^n dx(a+bx^m)^r$ non potrà integrarsi, se prima non si trasformi convenientemente coi metodi che a suo luogo daremo. Si escludano per altro i casi seguenti, osservabilissimi, e pei quali l'integrazione viene direttamente indicata dalle formule differenziali dei numeri 1233, 1234.

$$1°.\ \int\frac{dx}{\sqrt{(a-bx^2)}}=(1233)\ \frac{1}{\sqrt{b}}\,arc.\,sen\,x\sqrt{\frac{b}{a}}+C=-\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc.\cos x\sqrt{\frac{b}{a}}+C$$
$$=(1234)-\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc.\,sec\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C=\frac{1}{\sqrt{b}}\,arc.\,cosec\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C$$

$$2°.\ \int\frac{dx}{a+bx^2}=(1233)\ \frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc.\,tang\,x\sqrt{\frac{b}{a}}+C=-\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc.\cot x\sqrt{\frac{b}{a}}+C$$
$$=(1234)-\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc.\,tang\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C=\frac{1}{\sqrt{ab}}\,arc.\cot\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C$$

$$3°.\ \int\frac{dx}{x\sqrt{(bx^2-a)}}=(1233)\ \frac{1}{\sqrt{a}}\,arc.\,sec\,x\sqrt{\frac{b}{a}}+C=-\frac{1}{\sqrt{a}}\,arc.\,cosec\,x\sqrt{\frac{b}{a}}+C$$
$$=(1234)-\frac{1}{\sqrt{a}}\,arc.\,sen\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C=\frac{1}{\sqrt{a}}\,arc.\cos\frac{1}{x}\sqrt{\frac{a}{b}}+C$$

4°. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(a-bx)}} = (1233)\ \frac{1}{\sqrt{b}}\, arc.sen.v.\frac{2bx}{a}+C = -\frac{1}{\sqrt{b}}\, arc.cos.v.\frac{2bx}{a}+C$

5°. $\int \frac{dx}{x\sqrt{(bx-a)}} = (1234)\ -\frac{1}{\sqrt{a}}\, arc.sen.v.\frac{2a}{bx}+C = \frac{1}{\sqrt{a}}\, arc.cos.v.\frac{2a}{bx}+C$

1262. Per integrare $du = Adx + Bdy + Cdz + \text{ec.} = 0$, differenziale di u funzione di più variabili x, y, z, ec. (1238), si osserverà che essendo Adx il differenziale parziale di u per x, se l'integreremo parzialmente per x, non considerandovi cioè come variabile che la sola x, verranno a riprodursi tutti quei termini di u, i quali contenevano comunque x, e che differenziati per x han data origine ad Adx. Nel modo medesimo se respettivamente integreremo per y, per z, ec i differenziali parziali Bdy, Cdz, ec., avremo prima tutti i termini di u con y, poi quelli con z, ec. Potrebbe quindi sembrare che dopo ciò bastasse prendere la somma S di questi integrali parziali per aver l'intero integrale u di du. Ma convien riflettere che i termini ove entrano insieme due o più variabili debbono ripetutamente incontrarsi in un numero equivalente d'integrali parziali. Così, per modo d'esempio, quelli che insieme contengono x ed y debbon comparire nell'integrale di Adx, dal quale si hanno tutti i termini di u con x, e di nuovo in quello di Bdy, che dà tutti quelli con y. Perchè dunque la somma S dia il vero integrale di du o conviene escludere dagli integrali, che vanno volta per volta costruendosi, i termini già comparsi negli integrali precedenti, o dividere in ultimo ciascun termine della somma ridotta S per il numero delle variabili che vi si trovano respettivamente comprese.

Sia $du = ydx + xdy$. Integrando il primo termine per x si ha yx, integrando l'altro per y si ha xy. La somma dei due integrali è dunque $2xy$, termine unico e con due variabili; dividendolo per 2 avremo dunque $u = \int(ydx + xdy) = xy + C$, come è ben chiaro per le regole differenziali (1239).

Sia $du = \frac{ydx - xdy}{y^2}$. Sarà $Adx = \frac{dx}{y}$, $Bdy = -\frac{xdy}{y^2}$. Integrando Adx per x si ha $\frac{x}{y}$; integrando Bdy per y si ha parimente (1257) $\frac{x}{y}$, dunque $u = \frac{x}{y} + C$.

Sia infine $du=\frac{2x^3y^2z\,dx-(x^3y+z^2)xy\,dz+z^3(x\,dy+y\,dx)}{x^2y^2z^2}$. Sarà $Adx=\left(\frac{2x}{z}+\frac{z}{x^2y}\right)dx$, $Bdy=\frac{z\,dy}{xy^2}$, $Cdz=-\left(\frac{x^2}{z^2}+\frac{1}{xy}\right)dz$. L'integrale di Adx per x è $\frac{x^2}{z}-\frac{z}{xy}$; quello di Bdy per y è $-\frac{z}{xy}$; quello di Cdz per z è $\frac{x^2}{z}-\frac{z}{xy}$. Si ha dunque $\int du=\frac{2x^2}{z}-\frac{3z}{xy}$, onde dividendo per 2 il primo termine che ha due variabili, per 3 il secondo che ne ha tre, avremo per l'integrale cercato $u=\frac{x^2}{z}-\frac{z}{xy}$, $+C$, come può verificarsi differenziando.

1263. Si noti 1°. che la regola suppone esatto il dato differenziale du, cioè non preso a capriccio, ma proveniente da un' effettiva differenziazione. Se tale non è, cosa che a suo luogo insegneremo a conoscere (1250.1°), l'integrale ottenuto non sarà vero. 2°. Che il differenziale du risultando dalla riunione di tutti i differenziali parziali per ciascuna delle variabili contenute in u, non può essere esatto, nè quindi integrarsi, se manchi d'alcuno dei termini che rappresentano questi differenziali. Così non potremo mai integrare esattamente il differenziale $du=ydx$, che annunziando due variabili in u, manca del differenziale per una di esse, cioè di quello per y. Bensì siccome $\int(ydx+xdy)=xy+C=$ (1256.2°) $\int ydx+\int xdy$, sarà $\int ydx=xy-\int xdy$, conclusione assai semplice, ma rimarchevolissima per ciò che dovremo dire in appresso.

Altre Regole del Calcolo differenziale

Trasformazione dei differenziali

1264. Sia $u=\varphi(x, y, z$, ec.$)$ funzione di quante si voglia variabili x, y, z, ec. funzioni esse pure di altre variabili r, θ, π, ec., e voglian trasformarsi i differenziali parziali $\left(\frac{du}{dx}\right)dx$, $\left(\frac{du}{dy}\right)dy$, $\left(\frac{du}{dz}\right)dz$, ec., o semplicemente i lor coefficienti $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec., in altri dati per le nuove variabili r, θ, π, ec. La dipendenza tra le prime e le seconde variabili darà $u=\varphi(r, \theta, \pi$, ec.$)$, e (1248) $du=\left(\frac{du}{dr}\right)dr+\left(\frac{du}{d\theta}\right)d\theta+\left(\frac{du}{d\pi}\right)d\pi+$ ec. Inoltre r, θ, π, ec. saranno reciproca-

mente funzioni di x, y, z, ec.; perciò $dr=\left(\frac{dr}{dx}\right)dx+\left(\frac{dr}{dy}\right)dy+\left(\frac{dr}{dz}\right)dz+$ec.,
$d\theta=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\theta}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\theta}{dz}\right)dz+$ec., $d\pi=\left(\frac{d\pi}{dx}\right)dx+\left(\frac{d\pi}{dy}\right)dy+\left(\frac{d\pi}{dz}\right)dz+$ec.
Sostituendo dunque, e confrontando ciò che risulta col valor di $du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+$ec. dato da $u=\varphi(x,y,z,\text{ec.})$, si troverà $\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{du}{d\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right)+$ec.; e simili valori si avranno per $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. Sia per esempio $u=\varphi(x,y,z)$, ed $x=r\cos\theta$, $y=r\,\text{sen}\theta\cos\pi$, $z=r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\pi$; d'onde $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, $\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $\tan g\pi=\frac{z}{y}$. Dunque $\left(\frac{dr}{dx}\right)=\cos\theta$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=-\frac{\text{sen}\theta}{r}$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=0$, e per conseguenza $\left(\frac{du}{dx}\right)=\cos\theta\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{\text{sen}\theta}{r}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$. Si troverà egualmente $\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\text{sen}\theta\cos\pi+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\cos\theta\cos\pi}{r}-\left(\frac{du}{d\pi}\right)\frac{\text{sen}\pi}{r\,\text{sen}\theta}$; $\left(\frac{du}{dz}\right)=\left(\frac{du}{dr}\right)\text{sen}\theta\,\text{sen}\pi+\left(\frac{du}{d\theta}\right)\frac{\cos\theta\,\text{sen}\pi}{r}+\left(\frac{du}{d\pi}\right)\frac{\cos\pi}{r\,\text{sen}\theta}$.

1265. Volendo $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)$ si differenzierà per x il valor trovato di $\left(\frac{du}{dx}\right)$ osservando che i coefficienti $\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$, ec. sono tutti, come u, funzioni di x. Cominciando la differenziazione dal primo termine, che per comodo rappresenteremo con A, avremo $\left(\frac{dA}{dx}\right)=\left(\frac{d^2u}{drdx}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)$. Quanto al coeficiente $\left(\frac{d^2u}{drdx}\right)$ è chiaro che l'otterremo differenziando per r il valore di $\left(\frac{du}{dx}\right)$; nel che fare dovrà osservarsi che nè $\left(\frac{dr}{dx}\right)$, nè $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, nè $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$, ec. sono funzioni di r: con che troveremo $\left(\frac{dA}{dx}\right)=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)^2+\ldots$ $\left(\frac{d^2u}{drd\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{d^2u}{drd\pi}\right)\left(\frac{d\pi}{dx}\right)\left(\frac{dr}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dr}\right)\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)$ differenziale del primo termine del valore di $\left(\frac{du}{dx}\right)$. Cangiato poi r in θ, π, ec. avremo manifestamente i differenziali degli altri termini. Nel modo stesso si otterranno i valori di $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)$, ec. $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)$, ec. Così continuando l'esempio precedente, poichè (1264) $\left(\frac{dr}{dx}\right)=\cos\theta$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=-\frac{\text{sen}\theta}{r}$, $\left(\frac{d\pi}{dx}\right)=0$, ec., e da queste si ha

$\left(\frac{d^2r}{dx^2}\right)=-\left(\frac{d\theta}{dx}\right)sen\theta=\frac{sen^2\theta}{r}$, $\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)=-\frac{\left(\frac{d\theta}{dx}\right)r\cos\theta-\left(\frac{dr}{dx}\right)sen\theta}{r^2}=\frac{sen 2\theta}{r^2}$, $\left(\frac{d^2\pi}{dx^2}\right)=0$, ec. avremo, sostituendo, $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)-\frac{sen 2\theta}{r}\left\{\left(\frac{d^2u}{drd\theta}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\right\}-sen^2\theta\left\{\left(\frac{d^2u}{dr^2}\right)-\frac{1}{r}\left(\frac{du}{dr}\right)-\frac{1}{r^2}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\right\}$.

Differenziazione dell' equazioni

1266. Nel dar le regole per differenziare u funzione di qualsivoglia numero di variabili x, y, z, ω, ec., abbiamo supposte queste variabili indipendenti fra loro, e che quindi veruna soffrisse alcun cangiamento pel cangiamento dell'altre. Ma sia $u=0$, nel qual caso una qualunque delle variabili dipende necessariamente dalle rimanenti (318), e varia in conseguenza con loro. È chiaro che prescelta x per variabile dipendente, e risolvendo l' equazione rapporto ad x, troveremo $x=f(y, z, \omega, \text{ec.})$, d'onde $dx=$(1248) $\left(\frac{dx}{dy}\right)dy+\left(\frac{dx}{dz}\right)dz+\left(\frac{dx}{d\omega}\right)d\omega+$ec. valore che sostituito in quello di du (*ivi*) darà $du=\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy+\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\right\}dz+\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{du}{d\omega}\right)\right\}d\omega+$ec. con tanti termini, quante rimangon variabili indipendenti.

1267. Da ciò apparisce 1.° che qualora abbiasi $u=0$, e sia x la variabile che in forza di quest'equazione si considera come dipendente dall'altre, il differenziale parziale per x sparisce dal valor di du, o per dir meglio entra a far parte dei differenziali parziali per le variabili indipendenti, le cui espressioni generiche si trasformano allora in $\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy$, $\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\right\}dz$, ec.; 2.° che se con $u=0$ abbiasi u funzione delle sole due variabili x, y, avremo semplicemente $du=\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy$.

1268. Volendo d^2u, noteremo che i coefficienti $\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\left(\frac{dx}{d\omega}\right)$, ec. son come x (1266) funzioni delle sole indipendenti y, z, ω, ec., mentre $\left(\frac{du}{dx}\right)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)$, ec. lo sono, egualmente che u, anche di x. Differenziando dunque per ciascuna variabile, e sostituendo in seguito il valore di dx già accennato (*ivi*) trove-

remo $\left\{\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}dy^2+\ldots.$
$\left\{\left(\frac{d^2u}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\times\right.$..
$\left.\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)\right\}dzdy+\left\{\left(\frac{d^2u}{d\cdot d\omega}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxd\omega}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dyd\omega}\right)+\ldots\ldots\right.$
$\left.\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{d\omega}\right)\right\}d\omega dy+$ ec. $+\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}\times$
d^2y, differenziale del primo termine di du; cangiandovi y in z e quindi in ω, ec. avremo i differenziali dei termini seguenti; e tutti insieme sommati, e fatte le opportune riduzioni daranno d^2u: nell' istessa maniera si troveranno d^3u, d^4u, ec.

1269. Ma quì è importantissimo l' osservare che tanto du, quanto gli altri differenziali superiori dell' equazione $u=0$ sono tutti nulli. Infatti si supponga per maggior chiarezza e semplicità u funzione delle sole tre variabili x, y, z. Avremo 1ª. $\varphi(x, y, z)=0$, equazione che, come sappiamo, non vincola che una sola delle tre variabili, lasciando in libertà di dar qualunque valore ci piaccia alle due rimanenti. Risolvendola rapporto ad x, troveremo (1266) 2ª. $x=f(y, z)$, valore che posto nella prima la trasformerà nell' identica 3ª. $\varphi(f(y, z), y, z)=0$, dove, come nella 1ª., y, z resteranno arbitrarie. Vi si ponga dunque $y+dy$ in luogo d' y, e $z+dz$ in luogo di z; avremo 4ª. $\varphi(f(y+dy, z+dz), y+dy, z+dz)=0$. Or la 2ª. dà (1216) $f(y+dy, z+dz)=x+dx$, dunque la 4ª. potrà trasformarsi in $\varphi(x+dx, y+dy, z+dz)=0$. Ma il primo membro di questa equivale ad $u+du$ (1216), ed in ipotesi $u=0$, dunque $du=0$. Quindi anche d^2u, che è rapporto a du ciò che du è rapporto ad u, sarà nullo; come per la ragione stessa saranno nulli d^3u, d^4u, ec. È poi facile vedere che questo medesimo ragionamento è egualmente applicabile al caso di u funzione di quante si voglia variabili.

1270. Ma non solo da $u=0$, si ha $du=0$, che anzi di più i coefficienti di ciascuno dei differenziali parziali componenti l' intero differenziale du risultano separatamente eguali a zero. Infatti se in $u=\varphi(f(y,z), y, z)=0$ in luogo di cangiare y e z in $y+dy$, $z+dz$, si cangi, siccome può sempre farsi, la sola y in $y+dy$, l' equazione sussisterà in egual modo, e darà $\varphi(f(y+dy, z), y+dy, z)=0$. Ora il primo membro di questa corrisponde alla funzione u aumentata della sua differenza per y, cioè (1267.1°) di $\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy$; dunque $u+\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy=0$. Ma $u=0$, e inoltre dy non può esser nullo, perchè altrimenti y non sarebbe variabile, dunque $\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)=0$, e quindi ancora $\left(\frac{du}{dx}\right)\times\left(\frac{dy}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)=0$. Ed è poi chiaro che altrettanto si verificherà dei coefficienti differenziali delle altre variabili, quando u ne contenga un numero maggiore.

1271. A quest' importante conclusione può giungersi anche ragionando in altra guisa, e fondandoci sulla mutua indipendenza delle variabili y, z, ec. Si sà che in virtù di questa indipendenza il differenziale parziale per y si ottiene considerando le altre variabili come costanti, e che rimane quale si è trovato, comunque in seguito si passi a differenziare per le variabili rimanenti. Ma considerare z e le altre variabili come costanti, è lo stesso che riguardare u come funzione delle sole variabili x, y, nel qual caso il differenziale di u è $\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy \ldots$ (1267.3°), e questo allora è nullo; dunque nullo rimarrà ancorchè nel proseguimento si torni a considerare z, ω, ec. come variabili. E le stesse ragioni varranno egualmente a provare l' annullamento di tutti i coefficienti differenziali in d^2u, d^3u, ec.

1272. Dunque con $u=0$, supposte in principio tre sole variabili, una prima differenziazione darà nascita alle due equazioni

$$1^a.\ \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)=0 \qquad 2^a.\ \left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)=0$$

date dai coefficienti di dy, dz. Con una seconda differenziazione avremo le altre tre (1268)

$$3^a.\ \left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)^2=0$$

$$4^a.\ \left(\frac{d^2u}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)+\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+$$
$$\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)=0$$

$$5^a.\ \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)+2\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)+\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)^2=0$$

date dai coefficienti di dy^2, $dy\,dz$, dz^2. Altre quattro, date dai coefficienti di $dy^3, dy^2dz, dydz^2, dz^3$, se ne avrebbero differenziando una terza volta, come altre cinque differenziando una quarta volta, ec.; onde spingendo le differenziazioni fino all' ordine n^{simo}, avremmo un sistema d' equazioni tutte coesistenti, che, compresavi anche la data, equivarrebbero in numero alla somma di $n+1$ termini della progressione $1, 2, 3, \ldots n+1$, e quindi ammonterebbero ad $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Nè difficile sarebbe provare, che questo numero salirebbe fino ad $(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\times\left(\frac{n+3}{3}\right)$ se si avessero quattro variabili, e diverrebbe $N=(n+1)\left(\frac{n+2}{2}\right)\times\ldots\left(\frac{n+3}{3}\right)\ldots\left(\frac{n+m-1}{m-1}\right)$ qualora se ne avessero m; espressione che, ponendovi successivamente $n=1$, $n=2$, $n=3$, ec., si cangia assai facilmente nell' altra più comoda $N=m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right)\ldots\left(\frac{m+n-1}{n}\right)$. Or tutte queste equazioni, e le infinite combinazioni che posson farsene, si chiamano *equazioni a differenze par-*

ziali, mentre le altre $du=0$, $d^2u=0$, ec. chiamansi *equazioni differenziali esatte*, o semplicemente *equazioni differenziali*. Si adoprano con molto vantaggio nella Geometria più sublime per eliminare tutte o in parte le costanti, che in una data equazione possono trovarsi comunque combinate con le variabili.

Esempio I°. Sia $x^2+ay^2+c(y+z)^2+r=0$; avremo dunque $u=x^2+ay^2+c(y+z)^2+r$ e in conseguenza $\left(\frac{du}{dx}\right)=2x$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=2ay+2c(y+z)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=2c(y+z)$: valori che sostituiti nelle equazioni generali 1^a., 2^a. daranno $x\left(\frac{dx}{dy}\right)+ay+c(y+z)=0$, $x\left(\frac{dx}{dz}\right)+c(y+z)=0$: or da queste e dalla data facilmente si ha $x^2-x\left\{z\left(\frac{dx}{dz}\right)+y\left(\frac{dx}{dy}\right)\right\}+r=0$, ove non è traccia alcuna delle costanti a, c che si trovano nella proposta.

Esempio II°. Sia $(az-b)^2+(cy-e)^2+(gx-h)^2=0$, avremo $u=(az-b)^2+(cy-e)^2+(gx-h)^2$, e di quì $\left(\frac{du}{dx}\right)=2g(gx-h)$, $\left(\frac{du}{dy}\right)=2c(cy-e)$, $\left(\frac{du}{dz}\right)=2a(az-b)$. Inoltre $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=2g^2$, $\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)=2c^2$, $\left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)=2a^2$, $\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)=2g^2\times\left(\frac{dx}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dxdz}\right)=2g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)$, $\left(\frac{d^2u}{dzdy}\right)=0$. Sostituendo dunque nelle equazioni generali, si avrà $c(cy-e)+g(gx-h)\left(\frac{dx}{dy}\right)=0$, $a(az-b)+g(gx-h)\left(\frac{dx}{dz}\right)=0$, $c^2+3g^2\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+g(gx-h)\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=0$, $3g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+g(gx-h)\left(\frac{d^2x}{dzdy}\right)=0$, $a^2+3g^2\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+g(gx-h)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)=0$, dalle quali unite alla prima si ha $\left\{\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)-\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)\right\}\left\{2\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)-\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)\right\}+\left\{\left(\frac{dx}{dz}\right)\times\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)-\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dydz}\right)\right\}\left(\frac{dx}{dy}\right)\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)=0$, senza alcuna costante.

1273. Apparisce intanto assai chiaramente dall'esposto: 1°. che potendosi con N equazioni eliminare $N-1$ costanti, un' equazione differenziale dell' ordine n^{simo} fra m variabili potrà contenere $N-1=$ (1272) $m\left(\frac{m+1}{2}\right)\left(\frac{m+2}{3}\right)\times\ldots\ldots\left(\frac{m+n-1}{n}\right)-1$ costanti meno che l' equazione finita da cui deriva. Così nel 1.° esempio, in cui $m=3$, $n=1$, ed $N-1=m-1=2$, mancano appunto nella differenziale finale due costanti. In qualche circostanza posson mancarne di più, come nel 2°. esempio, ove essendo $m=3$, $n=2$, si avrebbe $N-1=\frac{1}{2}m(m+1)-1=5$, mentre le costanti eliminate son sei: se ne intenderà facilmente la cagione: 2°. che

la scelta delle costanti da eliminarsi e di quelle da rilasciarsi essendo arbitraria, da una stessa equazione finita posson derivarsi molte equazioni differenziali di un ordine stesso, e indeterminatamente differenti fra loro in ragione delle costanti eliminate nell' una, rilasciate nell' altre. Così nel 1°. esempio, se si fosse eliminato r in luogo di a, avremmo avuto $x\left(\frac{dx}{dy}\right)-x\left(\frac{dx}{dz}\right)+ay=0$.

1274. Ma passiamo ad altro genere di equazioni, e si abbia in primo luogo $u=\varphi(f(x), y, z, \text{ec.})=0$; sarà quì pure x funzione di y, z, ec.; onde posto per brevità $f(x)=f$, avremo $df=$ (1248) $\left(\frac{df}{dx}\right)dx=\left(\frac{df}{dx}\right)\left\{\left(\frac{dx}{dy}\right)dy+\left(\frac{dx}{dz}\right)dz + \text{ec.}\right\}$, e $du=\left(\frac{du}{df}\right)df+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+\text{ec.}=\left\{\left(\frac{du}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)\right\}dy+\left\{\left(\frac{du}{df}\right)\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{du}{dz}\right)\right\}dz+\text{ec.}$

1275. Si abbia in secondo luogo $u=\varphi(F, f, \text{ec.}, x, y, z, \text{ec.})=0$, e si suppongano F, f, ec. funzioni indeterminate o arbitrarie di x, y, z, ec.; sarà come per l' avanti x funzione di y, z, ec; e quindi (1266) $dF=\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\right\}\times dy+\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{dF}{dz}\right)\right\}dz+\text{ec.}$, $df=\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\right\}dy+\ldots\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dz}\right)+\left(\frac{df}{dz}\right)\right\}dz+\text{ec.}$; onde poichè $du=\left(\frac{du}{dF}\right)dF+\left(\frac{du}{df}\right)df+\text{ec.}+\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dz}\right)dz+\text{ec.}$, posti dunque i valori di dF, df; ec. e di dx, il coefficiente totale di dy diverrà $\left(\frac{du}{dF}\right)\left\{\left(\frac{dF}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{dF}{dy}\right)\right\}+\left(\frac{du}{df}\right)\times\left\{\left(\frac{df}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{df}{dy}\right)\right\}+\text{ec.}+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dx}{dy}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)$, e cangiato y in z, ω, ec. avremo i coefficienti di dz, $d\omega$, ec.

1276. E quì pure avranno evidentemente luogo i teoremi già dimostrati (1271) rapporto all' annullamento di ciascun differenziale sì parziale che esatto, al numero dell' equazioni che posson dedursene coesistenti alla proposta, e all' uso che può farsene per l' eliminazioni. Ma ciò che nel caso attuale maggiormente importa d' eliminare sono le funzioni arbitrarie. Su di che è da osservarsi che ognuna delle funzioni primitive F, f, ec. spettanti alla proposta ne introduce ad ogni differenziazione una nuova F', f', ec. (1221), dimodochè se il numero delle primitive sia r, e si spingano le differenziazioni fino all' ordine n^{simo}, se ne avranno altre nr, che con quelle della proposta faranno in tutte $r(n+1)$ quantità da eliminarsi, onde poter giungere ad un' equazione finale spogliata affatto d' indeterminate. A quest' effetto converrà dunque portare le differenziazioni fino al punto, che il numero N (1272) risulti $>r(n+1)$. Così se, come più ordinariamente accade, non si abbiano che

tre sole variabili, nel qual caso $N=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$, dovrà rendersi $\frac{1}{2}(n+1)(n+2) > r(n+1)$, ossia $n>2r-2$; cioè dovremo spingere le differenziazioni fino all' ordine $n=2r-1$, e fatta poi l' eliminazione resteranno non una soltanto, ma $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-r(n+1)=r$ equazioni differenziali dell' ordine n, tutte spogliate di funzioni arbitrarie. Che se $r=2$, sarà $n=3$, cioè dovremo differenziar tre volte, e potremo avere fino a due differenti equazioni del terz' ordine, libere, come abbiamo detto, da ogni funzione indeterminata, e che, secondo ciò che abbiamo già annunziato di sopra (1272), potranno impiegarsi nell' eliminazione d' una costante.

1277. Queste regole, in ciò che specialmente è relativo al numero delle differenziazioni, e a quello dell' equazioni residue finali, possono subir molte eccezioni nei diversi casi particolari. Così non è raro che i rapporti scambievoli delle funzioni F, f, ec. dispensino dal differenziare tante volte quante la teoria esigerebbe; il che soprattutto accade quando F, f ec. sieno funzioni di una medesima quantità, benchè differenti comunque fra loro. Di ciò ecco un facile esempio, che servirà anche all' oggetto di mostrare come possa talora operarsi l' eliminazione senza far caso delle formule generali, che per la loro complicanza riescirebbero di penosissima applicazione.

Sia $u=x\varphi(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x})-z=0$. Ne trarremo $z=x\varphi(\frac{y}{x})+\psi(\frac{y}{x})$; e differenziando parzialmente prima per x, poi per y, otterremo (1237) 1ª. $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\varphi(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\varphi'(\frac{y}{x})-\frac{y}{x^2}\psi'(\frac{y}{x})$, 2ª. $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\varphi'(\frac{y}{x})+\frac{1}{x}\psi'(\frac{y}{x})$. Se la 1ª. si moltiplichi per x, la 2ª. per y, e si sommino i due prodotti, avremo 3ª. $x\left(\frac{dz}{dx}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)=x\varphi(\frac{y}{x})$. Questa differenziata di nuovo prima per x, poi per y, darà 4ª. $\left(\frac{dz}{dx}\right)+x\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+y\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\varphi(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}\varphi'(\frac{y}{x})$, 5ª. $x\times$ ...... $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)+y\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=\varphi'(\frac{y}{x})$, le quali, eliminandone $\varphi'(\frac{y}{x})$, e sostituendo il valore di $\varphi(\frac{y}{x})$ rilevato dalla 3ª., daranno infine $x^2\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+2xy\times\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=0$.

Qui dunque due differenziazioni sono state sufficienti ad eliminare le due funzioni, per il che neppur si è dovuto impiegare l' equazion primitiva. Non così sarebbe accaduto riguardo all' equazione $z=\varphi(x+y)+xy\psi(x-y)$. I valori di $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ basterebbero ad eliminare la funzione φ' derivata di φ, ma restereb-

be un' equazione con ψ, ψ'. Successivamente i valori di $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$ darebbero tre nuove equazioni con le funzioni ψ, ψ', φ' e le nuove derivate φ'',ψ''. Si avrebber dunque cinque quantità da eliminarsi, e cinque sole equazioni. Ma se si aggiunge una terza differenziazione, e si calcolano i valori di $\left(\frac{d^3z}{dx^3}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dx^2dy}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dxdy^2}\right)$, $\left(\frac{d^3z}{dy^3}\right)$, i quali non introducono che le sole derivate φ''', ψ''', avremo allora nove equazioni, e sette sole funzioni da eliminare; al che occorrendo sole otto equazioni, ne potremo conseguir due del terz' ordine senza veruna funzione arbitraria.

Applicazioni del Calcolo Differenziale

Sviluppo delle funzioni in serie

1278. Sia $u=\varphi(x)$, e debba svilupparsi questa funzione in serie ordinata per le potenze intere e positive di x. Supporremo $u=q+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+$ ec, e in primo luogo i coefficienti q, q_1, q_2, ec. saranno tutti indipendenti da x (421). Inoltre se, fatto $x=0$, u si cangi in u_1, sarà il primo termine $q=u_1$ (436.3°.). Infine successivamente differenziando, presa dx costante, si avranno l'equazioni

$$\frac{du}{dx}=q_1+2q_2x+3q_3x^2+4q_4x^3+5q_5x^4+\text{ ec.}$$
$$\frac{d^2u}{dx^2}=1.2q_2+2.3q_3x+3.4q_4x^2+4.5q_5x^3+\text{ ec.}$$
$$\frac{d^3u}{dx^3}=1.2.3q_3+2.3.4q_4x+3.4.5q_5x^2+\text{ec.; ed in generale}$$
$$\frac{d^nu}{dx^n}=1.2\ 3.....nq_n+2.3.4.......(n+1)q_{n+1}x+\text{ec.}$$

e fatto in tutte $x=0$, dalla prima di queste equazioni si otterrà $q_1=\frac{du}{dx}$, dalla seconda $q_2=\frac{d^2u}{2dx^2}$, dalla terza $q_3=\frac{d^3u}{2.3dx^3}$, e in generale dall'n^{sima}, $q_n=\frac{d^nu}{2.3......ndx^n}$, purchè anche nei quozienti $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^nu}{dx^n}$ si ponga $x=0$.

Esempj. Sia $u=senx$; sarà $q=u_1=0$, $\frac{du}{dx}=$ (1227) $cosx$,

$\frac{d^2u}{dx^2}=-senx$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-cosx$, $\frac{d^4u}{dx^4}=senx$, $\frac{d^5u}{dx^5}=cosx$, ec.; onde posto $x=0$, avremo $q_1=1$, $q_2=0$, $q_3=-\frac{1}{2.3}$, $q_4=0$, $q_5=.. \frac{1}{2.3.4.5}$, ec. e quindi $senx=x-\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^5}{2.3.4.5}-$ ec. come già si sapeva (806).

Sia $u=e^x$; avremo $q=e^0=1$, $\frac{du}{dx}=(1226)\,e^x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=e^x$, .. $\frac{d^3u}{dx^3}=e^x$, ec., e in conseguenza $q_1=e^0=1$, $q_2=\frac{1}{2}$, $q_3=\frac{1}{2.3}$, $q_4=\frac{1}{2.3.4}$, ec. ed $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+$ec. (461).

Sia $u=\sqrt{(a^2-x^2)}$; dunque $q=a$, $\frac{du}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, .. $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{a^2}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-\frac{3a^2x}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{3a^2(a^2+4x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)^7}}$ ec.; onde $q_1=0$, $q_2=-\frac{1}{2a}$, $q_3=0$, $q_4=-\frac{3}{2.3.4a^3}$, ec. Dunque $\sqrt{(a^2-x^2)}=a-\frac{x^2}{2a}-\frac{x^4}{8a^3}-$ ec. (216).

Sia $u=log(1\pm x)$, avremo $q=log1=0$ (444.1°), $\frac{du}{dx}=\pm\frac{1}{1\pm x}$ (1225), $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{(1\pm x)^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=\pm\frac{2}{(1\pm x)^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{2.3}{(1\pm x)^4}$, $\frac{d^5u}{dx^5}=\pm\frac{2.3.4}{(1\pm x)^5}$, ec.; onde $q_1=\pm1$, $q_2=-\frac{1}{2}$, $q_3=\pm\frac{1}{3}$, $q_4=\pm\frac{1}{4}$, $q_5=\pm\frac{1}{5}$, e $log(1\pm x)=\pm x-\frac{x^2}{2}\pm\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\pm\frac{x^5}{5}-$ ec. (455).

1279. Si noti che qualora lo sviluppo per le potenze intere e positive della variabile sia di sua natura impossibile, avremo dei risultamenti o assurdi, o per lo meno insignificanti: tale è il caso di $u=logx$, per cui si avrebbe $q=-\infty$ (444.5°), $q_1=\infty$, ec. Tale è parimente quello di $cotx$, per cui si avrebbe $q=\infty$ (781.4°): tale finalmente quello di tutte le espressioni frazionarie, il cui denominatore è multiplo di x^n, mentre in tal caso i denominatori dei coefficienti differenziali $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, ec. hanno per fattore una potenza di x, e divengono infiniti facendovi $x=0$. Volendone lo sviluppo in serie converrà attenersi alla regola già data altrove (436.1°).

1280. Il metodo precedente, detto *metodo di Maclaurin* dal nome del suo inventore, si applica alla ricerca diretta degli integrali $\int x^n dx$, $\int \frac{dx}{1\pm x}$, $\int e^x dx$, $\int dx cos x$, ec., che noi già trovammo per via indiretta (1257). Pongasi infatti $u=\int x^n dx$; sarà $\frac{du}{dx}=x^n$, $\frac{d^2u}{dx^2}=nx^{n-1}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=n(n-1)x^{n-2}$, $\frac{d^{n+1}u}{dx^{n+1}}=n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$; dunque, fatto $x=0$ (1278), si avrà $q_1=0$, $q_2=0$, $q_3=0$, $q_{n+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots n(n+1)}$, quindi $u=\int x^n dx=q+q_{n+1}x^{n+1}=q+\frac{x^{n+1}}{n+1}$, ove q è la costante, poichè non contiene x (*ivi*).

Pongasi $u=\int\frac{dx}{1+x}$, sarà $\frac{du}{dx}=\frac{1}{1+x}$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}=\frac{2}{(1+x)^3}$, $\frac{d^4u}{dx^4}=-\frac{2.3}{(1+x)^4}$, ec.; e perciò $q_1=1$, $q_2=-\frac{1}{2}$, $q_3=\frac{1}{3}$, $q_4=-\frac{1}{4}$ ec., ed $u=\int\frac{dx}{1+x}=q+x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\text{ec.}=q+log(1+x)$ (451).

Pongasi $u=\int dx cos x$; avremo $\frac{du}{dx}=cos x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=-sen x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=-cos x$, $\frac{d^4u}{dx^4}=sen x$, ec.; e quindi $q_1=1$, $q_2=0$, $q_3=-\frac{1}{2.3}$, $q_4=0$, ec., e $\int dx cos x=q+x-\frac{1}{2.3}x^3+\frac{x^5}{2.3.4.5}-\text{ec.}=q+ sen x$ (806).

Sia $u=\int e^x dx$, avremo $\frac{du}{dx}=e^x$, $\frac{d^2u}{dx^2}=e^x$, $\frac{d^3u}{dx^3}=e^x$, ec.; $q_1=1$, $q_2=\frac{1}{2}$, $q_3=\frac{1}{2.3}$, e $\int e^x dx=q+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\text{ec.}=q+e^x$ (461).

1281. Ma passiamo a più importanti applicazioni, e sia più in generale $u=\varphi(\omega+x)$. Premetteremo che come $d^n u=\ldots\ldots dx^n\varphi_n(\omega+x)$ sarebbe in tal caso il differenziale n^{simo} di u per x (1246), così $d^n u=d\omega^n\varphi_n(\omega+x)$ sarebbe il differenziale n^{simo} di u per ω. E poichè da queste due espressioni risulta $\frac{d^n u}{dx^n}=\frac{d^n u}{d\omega^n}$, in luogo dunque del rapporto $\frac{d^n u}{dx^n}$ potremo sostituire in q_n (1278) il suo equivalente $\frac{d^n u}{d\omega^n}$, ossia $\frac{d^n\varphi(\omega+x)}{d\omega^n}$, intenden-

do che la differenziazione debba allora farsi per ω, e che $d\omega$ debba considerarsi costante. Avremo perciò $q_n = \frac{d^n\varphi(\omega+x)}{1.2.3\ldots nd\omega^n}$. Ma deve porsi $x=0$ (*ivi*), dunque infine $q_n = \frac{d^n\varphi(\omega)}{1.2.3..nd\omega^n}$. Quindi cangiato per semplicità $\varphi(\omega)$ in φ, e riflettendo che $q=u'=\varphi(\omega)$ $=\varphi$, avremo $\varphi(\omega+x)=\varphi+\frac{d\varphi}{d\omega}x+\frac{d^2\varphi}{2d\omega^2}x^2+\frac{d^3\varphi}{2.3d\omega^3}x^3+$ ec. È permutato x in $-x$, $\varphi(\omega-x)=\varphi-\frac{d\varphi}{d\omega}x+\frac{d^2\varphi}{2d\omega^2}x^2-\frac{d^3\varphi}{2.3d\omega^3}x^3+$ ec; onde in generale $\varphi(\omega\pm x)=\varphi\pm\frac{d\varphi}{d\omega}x+\frac{d^2\varphi}{2d\omega^2}x^2\pm\frac{d^3\varphi}{2.3d\omega^3}x^3+$ec. Teorema celebre di *Taylor*, che dà il valor di una funzione qualunque φ di ω, quando ω vi si cangia ω in $\omega\pm x$.

Per vederne la verità in un esempio semplice, sia $\varphi=\omega^2-2\omega+1$ e si cerchi il valor di questa quantità sostituendo $\omega+1$ ad ω. Avremo $x=1$, $\frac{d\varphi}{d\omega}=2\omega-2$, $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=2$, $\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}=0$, ec.; dunque φ si cangia in $\omega^2-2\omega+1+2\omega-2+1=\omega^2$, il che è evidente. Ma eccone altre applicazioni.

1282. Sia $\varphi=\omega^m$. dunque $\frac{d\varphi}{d\omega}=m\omega^{m-1}$, $\frac{d^2\varphi}{2d\omega^2}=\frac{m(m-1)}{2}\times\ldots$ ω^{m-2}, ec., e $(\omega\pm x)^m=\omega^m\pm m\omega^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2}\omega^{m-2}x^2\pm$ ec.

Sia $\varphi=sen\omega$, onde $\frac{d\varphi}{d\omega}=cos\omega$, $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=-sen\omega$, $\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}=-cos\omega$, ec., e sarà $sen(\omega\pm x)=sen\omega\pm xcos\omega-\frac{x^2}{2}sen\omega\mp\frac{x^3}{2.3}cos\omega+$ ec. (809.3°). Parimente si troverà $cos(\omega\pm x)=cos\omega\mp xsen\omega-\frac{x^2}{2}\times$ $cos\omega\pm\frac{x^3}{2.3}sen\omega+$ec.; $tang(\omega\pm x)=tang\omega\pm\frac{x}{cos^2\omega}+\frac{x^2 sen\omega}{cos^3\omega}\pm$ $\frac{x^3(1+2sen^2\omega)}{3cos^4\omega}+$ec.

Sia $\varphi=b^\omega$, sarà $\frac{d\varphi}{d\omega}=b^\omega lb$, $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=b^\omega l^2b$, $\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}=b^\omega l^3b$, ec. e $b^{\omega\pm x}=b^\omega(1\pm xlb+\frac{x^2l^2b}{2}\pm\frac{x^3l^3b}{2.3}+$ec)

Sia φ un arco il cui seno è ω, che indicheremo con $\varphi=$ *Asen*ω; dunque $d\varphi=d(Asen\omega)=$ (1232.1°) $\frac{d\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$; onde

$\frac{d\varphi}{d\omega}=\frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2)}}$, $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}=\frac{\omega}{\sqrt{(1-\omega^2)^3}}$, $\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}=\frac{1+2\omega^2}{\sqrt{(1-\omega^2)^5}}$, ec. e $Asen(\omega\pm x)=Asen\omega\pm\frac{x}{\sqrt{(1-\omega^2)}}+\frac{\omega x^2}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}}\pm$ec. Troveremo egualmente $Acos(\omega\pm x)=Acos\omega\mp\frac{x}{\sqrt{(1-\omega^2)}}-\frac{\omega x^2}{2\sqrt{(1-\omega^2)^3}}$ $\mp$ec.

Queste serie sono attissime a calcolare l'arco, che corrisponde a un seno o coseno dato. Preso dalle Tavole l'arco più vicino, la differenza del suo seno ω dal dato renderà x piccolissimo; e si avrà l'arco cercato aggiungendo $\pm\frac{x}{cos\varphi}+\ldots\frac{sen\varphi x^2}{2cos^3\varphi}\pm$ec. a quello il cui seno è ω. Osservate 1°. che la serie è sì convergente che i due primi termini danno l'esattezza fino a circa un centomillesimo di secondo; 2°. che l'arco è espresso in parti del raggio, e per ridurlo a gradi, o a minuti, o secondi converrà moltiplicarlo per r^o, o per r', o per r'' (678).

1283. La serie di Taylor suppone che nello sviluppamento di $\varphi(\omega\pm x)$ non abbian luogo che le sole potenze intere e positive di x. Ora è facile dimostrare che in effetto queste potenze non possono esser giammai negative, e neppur posson divenir frazionarie, almeno finchè x vi resta indeterminata. Infatti se qualche esponente di x risultasse negativo, il termine corrispondente diverrebbe infinito, qualora si ponesse $x=0$ (1204), e si avrebbe l'equazione assurda $\varphi(\omega)=\varphi(\omega)\pm\infty$; e se qualche esponente divenisse frazionario, il termine corrispondente avrebbe altrettanti valori quante unità sarebbero nel denominatore delle frazione (304), onde lo sviluppamento ne avrebbe più della funzione implicita $\varphi(\omega+x)$, la quale d'altronde non può averne che quanti ne competono al primo termine $\varphi(\omega)$, essendo chiaro che il cangiamento di ω in $\omega\pm x$ non altera nè il numero, nè il grado dei radicali contenuti in $\varphi(\omega)$. Ciò peraltro non si verificherebbe in generale se si attribuissero ad x dei valori particolari, come se si facesse $x=\sqrt[n]{b}$; poichè allora è evidente che dovrebbero aversi più valori in $\varphi(\omega\pm x)$ che in $\varphi(\omega)$. In questo e in altri casi simili la forma della serie di Taylor sarebbe illusoria.

1284. È poi chiaro che se in luogo di sviluppar la funzione $\varphi(\omega\pm x)$ per le potenze di x, si fosse presa a sviluppare la funzione $\varphi(x\pm\omega)$ per le potenze di ω, posta φ per φx, avremmo similmente ottenuto $\varphi(x\pm\omega)=\varphi\pm\frac{d\varphi}{dx}\omega+\frac{d^2\varphi}{2dx^2}\omega^2\pm\frac{d^3\varphi}{2.3dx^3}\times\omega^3+$ec., serie la quale non differisce dall'altra che per l'istessa ricerca trovammo coi principj dell'Analisi derivata (440), se non in quanto che i coefficienti delle successive potenze di ω sono in quella rappresentati da $d\varphi, \frac{1}{2}d^2\varphi$, ec., in questa da $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d^2\varphi}{2dx^2}$, ec. Il divario non è però che apparente, e nasce da due diversi modi d'esprimere una cosa medesima. Infatti nell'Analisi derivata, la derivata prima

$d\varphi$ non è che il coefficiente, comunque trovato, che la prima potenza di ω ha nello sviluppo di $\varphi(x \pm \omega)$, e questo stesso significato ha nella serie di Taylor il coefficiente $\frac{d\varphi}{dx}$(1221). Nella prima l'altro coefficiente $d^2\varphi$ è il risultamento di un'operazione fatta sopra $d\varphi$, corrispondente a quella che ha dovuto farsi sopra φ per far nascer $d\varphi$, come nella serie di Taylor il coefficiente $\frac{d^2\varphi}{dx^2}$ è il differenziale di $\frac{d\varphi}{dx}$, che si ottiene con le medesime operazioni, con le quali da φ si fa nascer $\frac{d\varphi}{dx}$. E così si dica degli altri coefficienti. L'un metodo conferma dunque la bontà dell'altro, e l'identità dei risultamenti rende manifesta l'identità dei principj.

1285. Si supponga adesso $u=\varphi(x,y)$, e vogliasi lo sviluppo di questa funzione in serie ordinata per le potenze e prodotti delle due variabili x, y. Porremo

$$\begin{aligned} u=q_{0,0} & +q_{1,0}x +q_{2,0}x^2 +q_{3,0}x^3 +q_{4,0}x^4 +\text{ec.} \\ & +q_{0,1}y +q_{1,1}xy +q_{2,1}x^2y +q_{3,1}x^3y +q_{4,1}x^4y +\text{ec.} \\ & +q_{0,2}y^2+q_{1,2}xy^2+q_{2,2}x^2y^2+q_{3,2}x^3y^2+q_{4,2}x^4y^2+\text{ec.} \\ & +\text{ec.} \end{aligned}$$

ove in ciascun termine il primo indice di q è relativo all'esponente di x, l'altro a quello di y. Se u si cangi in u' quando vi si pone $x=y=0$, sarà al solito (1278) $q_{0,0}=u'$. Inoltre se si differenzj n volte per x, supposto dx costante, e si faccia in seguito $x=0$, troveremo $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)=1.2.3...n(q_{n,0}+q_{n,1}y+q_{n,2}y^2+\text{ec.})$, e se si differenzj questo valore n' volte per y, supposto dy costante, e si ponga dipoi $y=0$, avremo $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)=1.2.3...n.1.2.3...n'q_{n,n'}$. Dunque $q_{n,n'}=$ . . . .
$\frac{1}{1.2.3...n\times1.2.3...n'}\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)$, purchè in $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n dy^{n'}}\right)$ a differenziazioni eseguite si ponga $x=y=0$. Nei casi di n o n' nulli, ove si avrebbe $q_{0,n'}=\infty$, $q_{n,0}=\infty$, noteremo che i coefficienti di tal forma appartengono solo alla prima colonna orizzontale, e alla prima verticale, nelle quali non vi è che lo sviluppo di $\varphi(x)$ e di $\varphi(y)$. Saran perciò (1278) $q_{n,0}=\frac{1}{1.2.3...n}\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right)$, $q_{0,n'}=\frac{1}{1.2.3...n'}\left(\frac{d^{n'}u}{dy^{n'}}\right)$.
Perchè dunque il trovato valore di $q_{n,n'}$ possa supplire ancora a questi due casi, bisognerà sopprimere nel denominatore l'uno o l'altro dei fattori $1.2.3...n$, $1.2.3...n'$ quando n o n' son nulli.

1286. Proponiamoci per riprova insieme e per esempio di tutto questo lo svi-

luppo di $u=(x+y)^m$. Troveremo $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n\,dy^{n'}}\right)=m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)\times$

$(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-n'+1)(x+y)^{m-n-n'}$, ove dovendo farsi $x=y=0$ per dedurre $q_{n,n'}$ è manifesto 1°. che il valor di $q_{n,n'}$ sarà nullo in tutti i termini, ove non lo sia l'esponente $m-n-n'$, o nei quali la somma $n+n'$ degli indici, e per conseguenza quella degli esponenti delle due variabili (1284), non eguagli il grado m della potenza; il che riduce subito la serie ad

$$u=q_{m,o}x^m+q_{m-1,1}x^{m-1}y+q_{m-2,2}x^{m-2}y^2+\text{ec.};$$

2°. che in questi termini residui dovrà aversi

$$q_{n,n'}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-n'+1)}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots n'}$$

o più semplicemente $q_{n,n'}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots3.2.1}{1.2.3\ldots n\times1.2.3\ldots n'}$, per essere $m-n-n'=0$, e perciò $=1$ l'ultimo dei fattori nel numeratore. E poichè in forza dell'equazione medesima, se $n'=0,=1,=2$, ec., si ha $n=m,=m-1,=m-2$, ec. perciò $q_{m,o}=1$, $q_{m-1,1}=m$, $q_{m-2,2}=\frac{m(m-1)}{2}$, ec., dunque $u=x^m+mx^{m-1}y+\frac{m(m-1)}{2}x^{m-2}y^2+$ec.

1287. Che se in $u=\varphi(x,y)$ si cangi x in $\omega+x$, y in $\theta+y$, ragionando nel modo stesso che sopra (1284) troveremo $\left(\frac{d^{n+n'}u}{dx^n\,dy^{n'}}\right)=\left(\frac{d^{n+n'}\varphi(\omega+x,\theta+y)}{d\omega^n\,d\theta^{n'}}\right)$.

Fatto adunque $x=y=0$ si avrà (1285) $q_{n,n'}=\frac{1}{1.2.2\ldots n\times1.2.3\ldots n'}\times\ldots\ldots$ $\left(\frac{d^{n+n'}\varphi(\omega,\theta)}{d\omega^n\,d\theta^{n'}}\right)$. Perciò ponendo per più semplicità $\varphi(\omega,\theta)=\varphi$ e sostituendo (*ivi*) avremo $\varphi(\omega+x,\theta+y)=$

$$\begin{aligned}&\varphi+x\left(\frac{d\varphi}{d\omega}\right)+\frac{x^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}\right)+\frac{x^3}{2.3}\left(\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}\right)+\text{ec.}\\&+y\left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)+xy\left(\frac{d^2\varphi}{d\omega d\theta}\right)+\frac{x^2y}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{d\omega^2d\theta}\right)+\frac{x^3y}{2.3}\left(\frac{d^4\varphi}{d\omega^3d\theta}\right)+\text{ec.}\\&+\frac{y^2}{2}\left(\frac{d^2\varphi}{d\theta^2}\right)+\frac{xy^2}{2}\left(\frac{d^3\varphi}{d\omega d\theta^2}\right)+\frac{x^2y^2}{2.2}\left(\frac{d^4\varphi}{d\omega^2d\theta^2}\right)+\frac{x^3y^2}{2.3.2}\left(\frac{d^5\varphi}{d\omega^3d\theta^2}\right)+\text{ec.}\\&+\text{ec.}\end{aligned}$$

formula che determina il valore che prende $\varphi(\omega,\theta)$ allorchè le variabili ω,θ vi sono aumentate respettivamente delle quantità x, y.

1288. Con metodi eguali ai precedenti si determinerà lo sviluppo di $u=\varphi(x)$,

$y, z), = \varphi(x, y, z, \omega)$, ec. Ma quello di $\frac{(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec.})^m}{(f'+g'x+h'x^2+h'x^3+\text{ec.})^n}$ si otterrà molto più prontamente ponendo $\frac{(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec.})^m}{(f'+g'x+h'x^2+k'x^3+\text{ec.})^n} = F+Gx+Hx^2+Kx^3+Lx^4+\text{ec.}$: poichè fatto secondo il solito $x=0$, sarà in primo luogo $F=\frac{f^m}{f'^n}$. Quindi applicati i logaritmi a tutta l'equazione, differenziando, moltiplicando in croce, e riducendo a zero si avrà:

$$\left.\begin{array}{r} ff'G+nfg'F \\ -mf'gF \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 2ff'H+(n+1)fg'G+\quad 2nfh'F \\ -(m-1)f'gG+(n-m)gg'F \\ -\quad 2mhf'F \end{array}\right\}=0$$

$$\left.\begin{array}{r} 3ff'K+(n+2)fg'H+(2n\quad +1)fh'G+\quad 3nfk'F \\ -(m-2)f'gH+(n-m+1)gg'G+(2n-m)gh'F \\ -(2m\quad -1)f'hG+(n-2m)g'hF \\ -\quad 3mf'kF \end{array}\right\}=0$$

ec. ec.

Che se $n=0$, avremo l'evoluzione del polinomio $(f+gx+hx^2+kx^3+\text{ec.})^m$.

Soluzione dell'equazioni

1289. Abbiasi l'equazione $y=F(\omega+x\varphi(y))$, e vogliasi il valore di ψy funzione qualunque di y, ordinato per le potenze di x. Fatto $\psi y=u$ e posto $u=q+q_1x+q_2x^2$, ec. sarà primieramente q ciò che diviene u con $x=0$. E poichè quest' ipotesi dà $y=F\omega$, e perciò $u=\psi(F\omega)$, avremo quindi immediatamente $q=\psi(F\omega)$. Quanto agli altri coefficienti il noto metodo (1278) darà in generale $q_n=\frac{1}{1.2.3....n}\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)$, a condizione che in $\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)$ si ponga in ultimo $x=0$. Tutto dunque si ridurrà a determinare pel caso nostro il valore di $\left(\frac{d^nu}{dx^n}\right)$.

A tale effetto si cominci dal differenziare per x ed ω tanto l'equazione data, quanto la supposta $u=\psi y$. Riflettendo che y, e quindi φy e ψy sono di lor natura funzioni di x ed ω, avremo dall'una (1264) 1.ª $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\left(\varphi y+x\varphi' y\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\times F'(\omega+x\varphi y)$, 2.ª $\left(\frac{dy}{d\omega}\right)=\left(1+x\varphi' y\left(\frac{d}{d\omega}\right)\right)F'(\omega+x\varphi y)$; e dall'altra 3.ª $\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{dy}{dx}\right)\psi' y$, 4.ª $\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\psi' y$. Or le due prime, eliminata la nuova funzione F', danno $\left(\frac{dy}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$, e le due seconde, eliminata la nuova funzione ψ',

danno $\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dy}{d\omega}\right)=\left(\frac{du}{d\omega}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$; posto dunque in questa il valore di $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ preso dall' altra, avremo intanto $\left(\frac{du}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du}{d\omega}\right)$.

Frattanto poichè la 4.ª dà $\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\left(\frac{dy}{d\omega}\right)\psi' y$, sarà $\varphi y\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\varphi y\psi' y\left(\frac{dy}{d\omega}\right)$. Ora è ben chiaro (1248) che quest' espressione può sempre riguardarsi come il coefficiente del differenziale per ω di una nuova funzione di y differente da u, e che potremo rappresentare con u'; il che supposto, avremo 5.ª $\varphi y\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\left(\frac{du'}{d\omega}\right)$, e l' equazione $\left(\frac{du}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du}{d\omega}\right)$ potrà dunque cangiarsi nell' altra $\left(\frac{du}{dx}\right)=\left(\frac{du'}{d\omega}\right)$. Se questa si differenzj di nuovo per x, otterremo 6.ª $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left(\frac{d^2u'}{d\omega dx}\right)=$(1250.2°) $\left\{\frac{d\left(\frac{du'}{dx}\right)}{d\omega}\right\}$. Or siccome dall' essersi supposto u funzione di y, ne è derivata rapporto ad u la relazione $\left(\frac{du}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du}{d\omega}\right)$, la stessa relazione deve evidentemente aver luogo anche rapporto ad u', che al pari di u rappresenta genericamente una funzione di y. Dunque $\left(\frac{du'}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du'}{d\omega}\right)$, e quindi per la 5.ª $\left(\frac{du'}{dx}\right)=\varphi y^2\left(\frac{du}{d\omega}\right)$, valore che sostituito nella 6.ª darà in secondo luogo $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left\{\frac{d\left(\varphi y^2\left(\frac{du}{d\omega}\right)\right)}{d\omega}\right\}$, ove per φy^2 intendiamo il quadrato della funzione φy.

Osservando quì pure che $\varphi y^2\left(\frac{du}{d\omega}\right)$ può sempre riguardarsi come il coefficiente del differenziale per ω di una nuova funzione u'' di y, e che dunque può farsi 7.ª $\varphi y^2\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\left(\frac{du''}{d\omega}\right)$, avremo $\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)=\left\{\frac{d\left(\frac{du''}{d\omega}\right)}{d\omega}\right\}=\left(\frac{d^2u''}{d\omega^2}\right)$, che differenziata per x darà 8.ª $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=\left(\frac{d^3u''}{d\omega^2dx}\right)=\left\{\frac{d^2\left(\frac{du''}{dx}\right)}{d\omega^2}\right\}$. Or nel modo medesimo che dall' essere u' funzione di y, si è di sopra concluso $\left(\frac{du'}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du'}{d\omega}\right)$, dovremo dunque egualmente concludere $\left(\frac{du''}{dx}\right)=\varphi y\left(\frac{du''}{d\omega}\right)$, con che la 7.ª dà $\left(\frac{du''}{dx}\right)$ $=\varphi y^3\left(\frac{du}{d\omega}\right)$, e quindi l' 8ª. $\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)=\left\{\frac{d^2\left(\varphi y^3\left(\frac{du}{d\omega}\right)\right)}{d\omega^2}\right\}$.

Continuando a ragionare ed operare nella guisa medesima troveremo in generale $\left(\frac{d^n u}{dx^n}\right) = \left\{\frac{d^{n-1}\left(\varphi y^n\left(\frac{du}{d\omega}\right)\right)}{d\omega^{n-1}}\right\}$, valore richiesto, e che fattovi $x=0$, deve darci quello di q_n, e quindi quello di u o di ψy. Or, come già osservammo, la condizione di $x=0$, dà $y=F\omega$, e quindi $\varphi y=\varphi(F\omega)$, $\left(\frac{du}{d\omega}\right)=\left(\frac{d\psi(F\omega)}{d\omega}\right)$; posti dunque per comodo $\varphi(F\omega)=\varphi$, $\psi(F\omega)=\psi$, avremo $1.2.3.\ldots\ldots nq_n= \left\{\frac{d^{n-1}\left(\varphi^n\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)\right)}{d\omega^{n-1}}\right\}$, e di qui per la serie cercata

$$u=\psi y=\psi+\varphi\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)x+\left\{\frac{d\varphi^2\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)}{d\omega}\right\}\frac{x^2}{2}+\left\{\frac{d^2\varphi^3\left(\frac{d\psi}{d\omega}\right)}{d\omega^2}\right\}\frac{x^3}{2.3}+\text{ec.}$$

1290. Se in luogo di $y=F(\omega+x\varphi(y))$ abbiasi più semplicemente $y=\omega+\ldots x\varphi y$, la serie non cangerà di forma, ma allora avremo $\psi=\psi(\omega)$, $\varphi=\varphi\omega$. Se poi abbiasi più semplicemente $y=\omega+\varphi y$, dovrà farsi $x=1$, e in tal caso posti i nuovi valori di φ e di ψ, e osservando che $\frac{d(\psi\omega)}{d\omega}=\psi'\omega$, risulterà

$$u=\psi y=\psi\omega+\varphi\omega.\psi'\omega+\frac{d(\varphi\omega^2.\psi'\omega)}{2d\omega}+\frac{d^2(\varphi\omega^3.\psi'\omega)}{2.3d\omega^2}+\frac{d^3(\varphi\omega^4.\psi'\omega)}{2.3.4d\omega^3}+\text{ec.}$$

serie rinomatissima, che dal nome dell'insigne suo primo discopritore, viene comunemente appellata *Teorema* di *La Grange*.

1291. E se finalmente, supposto sempre $y=\omega+\varphi y$, si cerchi non ψy ma y, sarà allora $\psi y=y$, e quindi ancora $\psi\omega=\omega$, e $\frac{d\psi\omega}{d\omega}=\psi'\omega=1$, onde avremo

$$y=\omega+\varphi\omega+\frac{d(\varphi\omega^2)}{2d\omega}+\frac{d^2(\varphi\omega^3)}{2.3d\omega^2}+\frac{d^3(\varphi\omega^4)}{2.3.4d\omega^3}+\text{ec.}$$

1292. Queste serie, ma le due ultime in special modo, sono d'un uso frequentissimo tanto nell'Analisi più elevata che nelle Scienze Fisico-Matematiche. Eccone intanto alcune belle ed utili applicazioni.

I°. Sia l'equazione $E=z+e\,sen E$, e vogliasi il valore dell'arco E. Il confronto di questa con l'equazione $y=\omega+\varphi y$ (1290) dà $y=E$, $\omega=z$, $\varphi y=e\,sen E$, e quindi $\varphi\omega=e\,sen z$; e poichè si cerca non ψy ma y, ossia E, dall'ultima serie (1291) avremo dunque

$$E=z+e\,sen z+\frac{e^2d(sen^2z)}{2dz}+\frac{e^3d^2(sen^3z)}{2.3dz^2}+\frac{e^4d^3(sen^4z)}{2.3.4dz^3}+\text{ec, ovvero (833)}$$

$$E=z+e\,sen z+\frac{e^2}{4dz}d(1-cos 2z)+\frac{e^3}{24dz^2}d^2(3sen z-sen 3z)+\frac{e^4}{192dz^3}d^3(3-$$

$4cos 2z+cos 4z)+$ ec.; ed effettuate le differenziazioni

$$E = z + e\,sen z + \frac{e^2}{2} sen 2z - \frac{e^3}{8}(sen z - 3 sen 3z) - \frac{e^4}{6}(sen 2z - 2 sen 4z) + ec.$$

serie che ordinata per i seni degli archi multipli di z, e limitati i calcoli fino alle quarte potenze di e, si converte nell' altra alquanto più regolare, e comoda

$$E = z + \left(e - \frac{e^3}{8}\right) sen z + \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^4}{6}\right) sen 2z + \frac{3}{8} e^3 sen 3z - \frac{e^4}{3} sen 4z$$

1293. II^a. Dalla medesima equazione vogliasi il valore di $cos E$. Avremo come sopra $y = E$, $\omega = z$, $\varphi y = e sen E$, $\varphi\omega = e sen z$, e di più $\psi y = cos E$, e quindi $\psi\omega = cos z$, e $\psi'\omega = - sen z$. Il Teorema di La-Grange (1290) darà dunque

$$cos E = cos z - e sen^2 z - \frac{e^2 d(sen^3 z)}{2dz} - \frac{e^3 d^2(sen^4 z)}{2.3 dz^2} - ec.$$

d'onde operando come sopra, e limitandoci alla terza potenza di e, trarremo

$$cos E = -\tfrac{1}{2} e + \left(1 - \frac{3e^2}{8}\right) cos z + \left(\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{3} e^3\right) cos 2z + \frac{3}{8} e^2 cos 3z + \frac{e^3}{3} cos 4z$$

1294. III^a. Con l'equazione $E = z + e sen E$, abbiasi l'altra $tang \tfrac{1}{2} \nu = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \times tang \tfrac{1}{2} E$, e vogliasi il valor di ν dato per z ed e.

Primieramente è da osservarsi come la nuova equazione esattamente coincide quanto alla forma con l' altra $tang(\tfrac{1}{2} a - s) = \frac{1-b}{1+b} tang \tfrac{1}{2} a$, identica alla già nota (819) $tang(s - \tfrac{1}{2} a) = \frac{b-1}{b+1} tang \tfrac{1}{2} a$, per la quale abbiamo (*ivi*) $s = b sen a - \tfrac{1}{2} b^2 sen 2a + \tfrac{1}{3} b^3 sen 3a - \tfrac{1}{4} b^4 sen 4a + ec.$ E poichè nel caso nostro $a = E$, $\tfrac{1}{2} a - s = \tfrac{1}{2}\nu$ e $\frac{b-1}{b+1} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$, d'onde $b = -\frac{1 - \sqrt{(1-e^2)}}{e}$; introdotti dunque nella serie questi valori, eccettuato per ora quello di b, troveremo

$$\nu = E - 2b sen E + \tfrac{2}{2} b^2 sen 2E - \tfrac{2}{3} b^3 sen 3E + \tfrac{2}{4} b^4 sen 4E - ec.$$

Or siccome dall' equazione primitiva $E = z + e sen E$ abbiamo già avuto il valor di E dato per z ed e (1292), non altro rimarrà che dedurne quelli di $sen E$, $sen 2E$, ec. o quello in generale di $sen\, nE$, per aver, come vogliamo, ν in funzione di z ed e. Applicando dunque al caso il Teorema di La-Grange, posti come sopra $y = E$, $\omega = z$, $\varphi\omega = e sen z$, si faccia $\psi y = sen nE$, d'onde $\psi\omega = sen nz$, e $\psi'\omega = n cos nz$; avremo

$$sen\, nE = sen\, nz + n e sen z cos nz + \frac{ne^2}{2} \frac{d(sen^2 z cos nz)}{dz} + \frac{ne^3}{2.3} \frac{d^2(sen^3 z cos nz)}{dz^2} + \ldots \frac{ne^4}{2.3.4} \frac{d^3(sen^4 z cos nz)}{dz^3} + ec.;$$

ovvero

$$sen nE = sen nz + n e sen z cos nz + ne^2 \times \ldots\ldots \frac{d(1 - cos 2z) cos nz}{4dz} + ne^3 \frac{d^2(3 sen z - sen 3z) cos nz}{2.3.4 dz^2} + ne^4 \frac{d^3(3 - 4 cos 2z + cos 4z) cos nz}{2.3.4.8 dz^3} ec.$$

Convertendo ora i prodotti dei seni e coseni in seni e coseni semplici, ed eseguendo le indicate differenziazioni, otterremo

$$sen\, nE = sen\, nz + \frac{ne}{2}\left\{\begin{array}{l} sen(1+n)z \\ +sen(1-n)z \end{array}\right\} + \frac{ne^2}{2^2}\left\{\begin{array}{l} (2+n)sen(2+n)z - \\ +(2-n)sen(2-n)z \end{array}\right.$$

$$\left. 2n\, sen\, nz \right\} + \frac{ne^3}{3.2^4}\left\{\begin{array}{l} -3(1+n)^2 sen(1+n)z - 3(1-n)^2 sen(1-n)z \\ +\ (3+n)^2 sen(3+n)z + \ (3-n)^2 sen(3-n)z \end{array}\right\} + \text{ec.}$$

Di quì, limitando i calcoli fino alla terza potenza di e, dedurremo

$$sen E = (1 - \tfrac{1}{8}e^2) sen z + (\tfrac{1}{2}e - \tfrac{1}{6}e^3) sen 2z + \tfrac{3}{8}e^2 sen 3z + \tfrac{1}{3}e^3 sen 4z$$

$$sen 2E = -e sen z + (1 - e^2) sen 2z + e sen 3z + e^2 sen 4z$$

$$sen 3E = -\tfrac{3}{2}e sen 2z + sen 3z + \tfrac{3}{2}e sen 4z$$

$$sen 4E = sen 4z$$

Infine poichè si ha $b = -\frac{1-\sqrt{(1-e^2)}}{e} = -\frac{(1-\sqrt{(1-e^2)})(1+\sqrt{(1-e^2)})}{e(1+\sqrt{(1-e^2)})}$ $= -\frac{e}{1+\sqrt{(1-e^2)}} = (216) - \frac{e}{2 - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{8}e^4 - \text{ec.}} = -\frac{1}{2}e - \frac{1}{8}e^3 - \text{ec.}$, e quindi $b^2 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{8}e^4 + \text{ec.}$, $b^3 = -\frac{1}{8}e^3 - \text{ec.}$, $b^4 = \frac{1}{16}e^4 + \text{ec.}$; sostituiti dunque tutti questi valori, e quello di E (1292) nel valore di ν, e limitando i calcoli alle quarte potenze di e, troveremo in ultimo

$$\nu = z + (2e - \frac{e^3}{4}) sen z + (\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4) sen 2z + \frac{13}{12}e^3 sen 3z + \frac{103}{96}e^4 sen 4z$$

1295. IV^a. Debba risolversi l' equazione generale, $0 = a + by + cy^2 + dy^3 + \text{ec.}$ del grado qualunque m. Poichè dividendola per b, e facendo $-a{:}b = \omega$, $\varphi y = -\frac{cy^2 + dy^3 + \text{ec.}}{b}$, essa si cangia in $y = \omega + \varphi y$, potremo dunque far uso per risolverla della serie (1291) $y = \omega + \varphi\omega + \frac{d(\varphi\omega^2)}{2d\omega} + \text{ec.}$, ponendo $\varphi\omega = -\frac{c\omega^2 + d\omega^3 + \text{ec.}}{b}$ e a operazione finita restituendo $-a{:}b$ in luogo di ω. Se per esempio $m=2$, sarà $\varphi y = -\frac{cy^2}{b}$, e $\varphi\omega = -\frac{c\omega^2}{b}$. Sostituendo dunque, differenziando e ponendo infine $\omega = -\frac{a}{b}$, troveremo $y = -\frac{a}{b} - \frac{a^2 c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{2b^5} - \frac{5.6a^4c^3}{2.3b^7} - \text{ec.}$

1296. V^a. Abbiasi per ultimo l' equazione $a - by + cy^m = 0$, e voglia conoscersi il valore di y^n. Riducendo la proposta ad $y = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}y^m$, e paragonandola con l' altra $y = \omega + \varphi y$, avremo $\omega = \frac{a}{b}$, $\varphi y = \frac{c}{b}y^m$, e quindi $\varphi\omega = \frac{c}{b}\omega^m$; e poichè si cerca y^n, sarà $\psi y = y^n$, $\psi\omega = \omega^n$, e $\psi'\omega = n\omega^{n-1}$. Quindi il Teorema di La-Grange, fatte le opportune differenziazioni, darà $y^n = \omega^n + \frac{nc}{b}\omega^{n+m-1} + \frac{n(n+2m-1)c^2}{2b^2} \times \omega^{n+2m-2} + \frac{n(n+3m-1)(n+3m-2)c^3}{2.3b^3}\omega^{n+3m-3} + \text{ec.}$; e posto il valor di $\omega = \frac{a}{b}$,

$$y^n = \frac{a^n}{b^n}\left(1 + \frac{nca^{m-1}}{b^m} + \frac{n(n+2m-1)}{2}\frac{a^{2m-2}c^2}{b^{2m}} + \frac{n(n+3m-1)(n+3m-2)}{2.\,3} \times \cdots \frac{a^{3m-3}c^3}{b^{3m}} + \text{ec.}\right)$$

Questo metodo non dà per altro che un solo valore di y^n, mentre ne dovremmo aver m, cioè tanti quanti esser possono i valori o radici di y nell' equazione proposta (260); il che può egualmente avvertirsi rapporto al valor di y trovato nel problema precedente. La-Grange ha dimostrato che quest' unico valore appartiene alla più piccola fra tutte le radici.

Rotti che si riducono a $\frac{0}{0}$

1297. Abbiamo altrove osservato (176), che se il rotto $\frac{P}{Q}$, ove P, Q si suppongon funzioni di x, si riduce a $\frac{0}{0}$ quando vi si pone $x=a$, i termini P, Q hanno una o più volte $x-a$ per fattore comune; e per conoscere il significato del rotto $\frac{0}{0}$ convien ridurre il rotto $\frac{P}{Q}$ alla più semplice espressione, spogliandolo del fattor comune $x-a$. Or da questa operazione, spesso difficoltosissima, e talvolta anche impossibile ad eseguirsi coi metodi ordinarj dell'Algebra, dispensa il Calcolo differenziale nel modo che segue.

Premetteremo che se il fattore $x-a$ entra m volte in P, onde abbiasi $P=(x-a)^m \varphi x$, non entrerà che $m-1$ volte in dP, essendochè $dP=m(x-a)^{m-1}dx\varphi x+(x-a)^m d(\varphi x)$; e per la ragione stessa non entrerà che $m-2$ volte in d^2P, $m-3$ volte in d^3P, ec; mancherà affatto in d^mP. Lo stesso si dica per dQ, d^2Q, d^3Q, ec. Si ponga frattanto $\frac{P}{Q}=y$; avremo $P=Qy$, e $dP=Qdy+ydQ$. Ora se P e Q non contengono che una sola volta il fattore $x-a$, dP e dQ non lo avranno, e perciò posto $x=a$ diverrà nullo Q, ma non dP nè dQ, ed avremo in quest' ipotesi $y=\frac{dP}{dQ}$, purchè in dP e dQ si ponga $x=a$. Che se $x-a$ è contenuto due volte in P ed in Q, sarà contenuto una volta in dP e dQ, e l'ipotesi di $x=a$ ridurrà a $\frac{0}{0}$ il valore di $y=\frac{dP}{dQ}$; ma questa equazione trattata allora come la precedente darà $d^2P=dQdy+yd^2Q$, ove il solo dQ contiene $x-a$; onde posto $x=a$, avremo $d^2P=yd^2Q$, ossia $y=\frac{d^2P}{d^2Q}$. Proseguendo a ragionare nel modo medesimo per i casi di $x-a$ ripetuto un numero maggiore di volte in P e Q, ci condurremo a stabilire in generale $y=\frac{d^nP}{d^nQ}$, essendo d^nP, d^nQ i primi dei

differenziali di P, Q che l'ipotesi di $x=a$ non annulla. Che se l'uno dei due si annullasse prima dell'altro, ciò paleserebbe il fattore $x-a$ contenuto più volte in P che in Q, o viceversa, ed y sarebbe nullo nell'un caso, infinito nell'altro (177).

Esempj. I°. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}$, che $x=1$ riduce a $\frac{0}{0}$. Sarà $dP=(2x-3)dx$, $dQ=2xdx$, $\frac{dP}{dQ}=\frac{2x-3}{2x}$, che fatto $x=1$ risulta $=-\frac{1}{2}$, come già trovammo col metodo algebrico (176.I°).

II°. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{\sqrt{(2a^3x-x^4)}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}$, ed $x=a$. Avremo $y=$ . . . .
$-\frac{4(a^3-2x^3)}{3\sqrt[4]{ax(2a^3-x^3)^2}}+\frac{4a}{9}\sqrt[12]{\frac{a^5}{x^5}}=\frac{4}{3}a+\frac{4}{9}a=\frac{16}{9}a.$

III°. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{1-x+xlx}{(x-1)lx}$ che $x=1$ riduce a $\frac{0}{0}$. Avremo $\frac{dP}{dQ}=y=$ . . . . . .
$\frac{lx}{lx+1-1:x}$, che nuovamente diviene $\frac{0}{0}$ con $x=1$. Passando dunque alla seconda differenziazione, avremo $\frac{d^2P}{d^2Q}=\frac{1:x}{1:x+1:x^2}$, che fatto $x=1$, dà $y=\frac{1}{2}$.

IV°. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{a^x-b^x}{x}$ che diviene $\frac{0}{0}$ quando $x=0$. Applicando la regola troveremo $\frac{dP}{dQ}=y=a^xla-b^xlb$; e posto $x=0$, $y=la-lb$. Ciò si riscontra facilmente ponendo i valori di a^x, e b^x (461), schisando per x, e facendo $x=0$.

V°. Abbiasi $\frac{P}{Q}=\frac{1-senx+cosx}{senx+cosx-1}$, che posto $x=\frac{1}{2}\pi$ diviene $\frac{0}{0}$. Il metodo darà in questo caso $y=1$.

VI°. Abbiansi le due frazioni $\frac{a-x-ala+alx}{a-\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $\frac{x^x-x}{1-x+lx}$ che divengono $\frac{0}{0}$ la prima con $x=a$, la seconda con $x=1$. Troveremo che in questi respettivi casi il vero valore della prima è -1, quello della seconda -2.

VII°. Sia infine $\frac{P}{Q}=\frac{x^3-ax^2-a^2x+a^3}{x^2-a^2}$, che $x=a$ riduce a $\frac{0}{0}$. Troveremo che $x=a$ rende nullo dP, ma non dQ, onde il valor di $\frac{0}{0}$ è in questo caso nullo, come per l'opposta ragione è infinito per la frazione $\frac{ax-x^2}{a^4-2a^3x+2ax^3-x^4}$.

1298. Questo metodo semplicissimo non è per altro applicabile al caso che il fattore $x-a$ comune ai due termini P,Q sia elevato nell'uno e nell'altro ad una potenza frazionaria, come per esempio addiviene quando l'uno o l'altro, o ambe-

due son compresi sotto un segno radicale. Infatti se $P=(x-a)^{\frac{1}{n}}\varphi x$, dP conterrà necessariamente il termine $\frac{dx\varphi x}{n(x-a)^{\frac{n-1}{n}}}$, che $x=a$ rende infinito, il che accaderà per tutte le differenziazioni successive, ciascuna delle quali aumenta l'esponente del denominatore. Lo stesso avverrà rapporto a dQ, talchè da $y=\frac{d^nP}{d^nQ}$ non avremo giammai un' espressione finita. In tal caso sieno P', Q' i valori di P, Q quando vi si cangia x in $x+h$, essendo h un' arbitraria qualunque; P'', Q'' sieno quelli di P', Q' quando x vi si cangia in a, e che visibilmente corrisponderanno a quelli di P, Q quando vi si pone $x=a+h$. Sviluppando P', Q' in serie ordinate per le potenze di h, avremo $\frac{P'}{Q'}=\frac{P+Ah+Bh^2+Ch^3+\text{ec.}}{Q+A_1h+B_1h^2+C_1h^3+\text{ec.}}$, e fatto $x=a$, nel qual caso si ha in ipotesi $P=0, Q=0$, sarà $\frac{P''}{Q''}=\frac{A+Bh+Ch^2+\text{ec.}}{A_1+B_1h+C_1h^2+\text{ec.}}$. Or si faccia $h=0$; il nuovo valore di $\frac{P'}{Q'}$ corrisponderà in tal caso a quello di $\frac{P}{Q}$ quando vi si cangia semplicemente x in a; e come $h=0$, dà $\frac{P''}{Q''}=\frac{A}{A'}$, dunque altresì $\frac{P}{Q}=\frac{A}{A'}$, valore richiesto.

Può accadere che l' ipotesi di $x=a$ renda nulli A ed A' in P'', Q'', come pure che renda nulli B e B', C e C', ec. In tal caso sieno Rh^m, $R'h^m$ i primi termini che $x=a$ non rende nulli nelle due serie. Sarà $\frac{P''}{Q''}=\frac{Rh^m+Sh^{m+1}+\text{ec.}}{R'h^m+S'h^{m+1}+\text{ec.}}=\frac{R+Sh+\text{ec.}}{R'+S'h+\text{ec.}}$ e fatto come sopra $h=0$, concluderemo $\frac{P}{Q}=\frac{R}{R'}$.

1299. Da tutto ciò si trae la seguente regola generale, per aver il valore di $\frac{P}{Q}$ nel caso che $x=a$ riduca questo rotto a $\frac{0}{0}$: pongasi $x=a+h$, si sviluppino i due termini P, Q in serie ordinate per le potenze di h, si dividano le due serie l' una per l' altra, si schisi il quoziente quante volte è possibile per h, si faccia in seguito $h=0$, e il nuovo quoziente darà il valore richiesto. Che se $h=0$ renderà interamente nulli o P, o Q, il valor di $\frac{0}{0}$, a cui $x=a$ riduce il rotto proposto, sarà visibilmente nullo nel primo caso, infinito nel secondo. Si venga agli esempj.

1°. Abbiasi $\frac{P}{Q}=\sqrt{\frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3}}$. Posto $a+h$ in luogo di x, avremo $P''=(2ah+h^2)^{\frac{3}{2}}=h^{\frac{3}{2}}(2a+h)^{\frac{3}{2}}=h^{\frac{3}{2}}\left\{(2a)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2a)^{\frac{1}{2}}h+\text{ec.}\right\}$, $Q''=h^{\frac{3}{2}}$. Dividendo

P'' per Q'', schisando, e facendo $h=0$ verrà $(2a)^{\frac{3}{2}}$ valore richiesto. Ed infatti $\sqrt{\frac{(x^2-a^2)^3}{(x-a)^3}}=\sqrt{\left(\frac{x^2-a^2}{x-a}\right)^3}=\sqrt{(x+a)^3}$, che $x=a$ riduce a $(2a)^{\frac{3}{2}}$.

II°. Sia $\frac{P}{Q}=\sqrt{\frac{3ax-x^2-2a^2}{x-a}}$. Posto $x=a+h$, troveremo $P''=\sqrt{h(a-h)}=h^{\frac{1}{2}}(a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}h-\text{ec.})$, $Q''=h^{\frac{3}{2}}$, $\frac{P''}{Q''}=a^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{2}}h-\text{ec.}$ che fatto $h=0$, si riduce a $\sqrt{a}$ valore cercato.

III°. Sia $\frac{P}{Q}=\frac{x^3-4ax^2+7a^2x-2a^3-2a^2\sqrt{(2ax-a^2)}}{x^2-2ax-a^2+2a\sqrt{(2ax-x^2)}}$. Ponendo $a+h$ in luogo di x, viene $\frac{P''}{Q''}=\frac{2a^3+2a^2h-ah^2+ah^3-2a^2\sqrt{(a^2+2ah)}}{-2a^2+h^2+2a\sqrt{(a^2-h^2)}}$. Sostituendo in luogo dei due radicali i loro valori in serie troveremo $P''=\frac{5h^4}{4a}-\frac{7h^5}{4a^2}+\text{ec.}$, $Q''=-\frac{h^4}{4a^2}-\frac{h^6}{8a^3}$; e dividendo, riducendo, e ponendo $h=0$, avremo pel valore richiesto $-5a$. A questo risultamento saremmo pur pervenuti col metodo precedente, ma dopo quattro faticose differenziazioni; il che mostra, che anche nei casi in cui il primo potrebbe applicarsi, riesce tal volta anche più pronto il secondo.

1300. Se $x=0$ riduce $\frac{P}{Q}$ ad $\frac{\infty}{\infty}$, si trasformerà il rotto in $\frac{1}{Q}:\frac{1}{P}$, e così prenderà la forma di $\frac{0}{0}$. Può anche talvolta incontrarsi un prodotto PQ, che l'ipotesi di $x=a$ riduca $0\times\infty$. Si farà allora $Q=\frac{1}{R}$; $x=a$ renderà in tal caso $R=0$, e sarà $PQ=\frac{P}{R}=\frac{0}{0}$, il cui valore si determinerà come sopra. Sia per esempio $PQ=(1-x)\,tang\,\frac{\pi x}{2}$, che $x=1$ riduce appunto a $0\times\infty$ (781. 4°). Fatto $tang\,\frac{\pi x}{2}=\frac{1}{R}$, sarà $R=cot\,\frac{\pi x}{2}$ e $PQ=\frac{P}{R}=\frac{1-x}{cot\,\frac{1}{2}\pi x}$, avremo $dP=-dx$, $dR=\frac{-\pi dx}{2sen^2\frac{1}{2}\pi x}$ e $\frac{dP}{dR}=\frac{2}{\pi}sen^2\frac{1}{2}\pi x$, ossia fatto $x=1$, $\frac{dP}{dR}=\frac{2}{\pi}$ valore richiesto.

1301. Infine è da considerarsi il caso, che $x=a$ renda infiniti i due termini della differenza $P-Q$. Su di che rifletteremo che P, e Q non possono esser resi infiniti da $x=a$, se non sono ambedue frazionarj. In tal caso riducendoli al medesimo denominatore avremo un rotto, che $x=a$ cangierà in $\frac{0}{0}$, e il cui valore trovato come sopra, darà quello della differenza dei due infiniti. Sia $P-Q=$

$\frac{x}{x-1}-\frac{1}{lx}$, che $x=1$ cangia in $\infty-\infty$. L'espressione ridotta al medesimo denominatore diviene $\frac{xlx-x+1}{(x-1)lx}$, il cui valore con $x=1$ si trovò essere $\frac{1}{2}$ (1297. III°).

Decomposizione dei rotti algebrici razionali

1302. Il metodo da noi altrove esposto (178) per decomporre in frazioni parziali un rotto algebrico razionale $\frac{P}{Q}$, tanto facile quanto elegante, finchè i fattori di Q son tutti ineguali, si trova poi laboriosissimo nel caso contrario, e potremo allora sostituire piuttosto il seguente.

Suppongo in primo luogo reali tutti i fattori semplici di cui parliamo, e l'operazione condotta fino all'equazione (180) $\frac{P}{S}=\frac{R}{S}(x-a)^m+A_1+A_2(x-a)+A_3\times(x-a)^2+A_4(x-a)^3+$ec., onde non restino da determinarsi che gli m coefficienti A_1, A_2, A_3, ec. Quanto al valore di A_1, si troverà senza innovazione veruna, col fare $x=a$ in $\frac{P}{S}$ (*ivi*). Per gli altri coefficienti si operi quì come sulla serie omologa $u=q+q_1x+q_2x^2+$ec. (1278), accennando soltanto per maggior brevità e non effettuando le differenziazioni del termine $\frac{R}{S}(x-a)^m$ che per comodo rappresenteremo con u. Avremo

$$\frac{1}{dx}d\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{du}{dx}+A_2+2A_3(x-a)+3A_4(x-a)^2+4A_5(x-a)^3+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{d^2u}{dx^2}+2A_3+2.3A_4(x-a)+3.4A_5(x-a)^2+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{dx^3}d^3\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{d^3u}{dx^3}+2.3A_4+2.3.4A_5(x-a)+\text{ec.}$$

$$\frac{1}{dx^4}d^4\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{d^4u}{dx^4}+2.3.4A_5+\text{ec.}\,;\quad\text{e in generale}$$

$$\frac{1}{dx^n}d^n\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{d^nu}{dx^n}+2.3.4...nA_{n+1}+2.3.4...(n+1)A_{n+2}(x-a)+\text{ec.}$$

d'onde, fatto $x=a$, e riflettendo di più che i differenziali del termine u, ossia di $\frac{R}{S}(x-a)^m$ fino all'm^{simo} esclusivamente sono multipli di $x-a$ (1297), facilmente trarremo il valor generico $A_n=\frac{1}{1.2.3...(n-1)dx^{n-1}}d^{n-1}\left(\frac{P}{S}\right)$, purchè a differenziazioni eseguite si ponga $x=a$ nel coefficiente differenziale, nè si prenda $n>m$;

prescrizione che non lascia d'altronde indeterminato alcuno dei coefficienti, i quali non sono che m.

Prendiamo ad esempio il rotto $\frac{P}{Q}=\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2(x+1)^2}$, quello stesso al quale applicammo il metodo algebrico (180). Decomponendolo, porremo, come si fece, $\frac{P}{Q}=\frac{A}{x}+\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{B_1}{(x+1)^2}+\frac{B_2}{x+1}$, e quanto ad A, A_1, B_1, avremo come allora (*ivi*) $A=2$, $A_1=1$, $B_1=-\frac{1}{2}$. Per determinare A_2, dovremo porre $S=x(x+1)^2$, e sarà $\frac{1}{dx}d\left(\frac{x^3+x^2+2}{x(x+1)^2}\right)=\frac{(x+1)(x^2-2)-4x}{x^2(x+1)^3}$, che con $x=1$ diviene $-\frac{3}{4}$, il che dà dunque $A_2=-\frac{3}{4}$. Per determinare B_2, avremo $S=x(x-1)^2$, $\frac{1}{dx}d\left(\frac{P}{S}\right)=\frac{1}{dx}d\left(\frac{x^3+x^2+2}{x(x-1)^2}\right)=\frac{4-(3x+1)(x^2+2)}{x^2(x-1)^3}$, che fatto $x=-1$, si cangia in $-\frac{5}{4}$, valor di B_2.

1303. Passiamo adesso al caso dei fattori multipli immaginarj (181). Supposta quì pure condotta l'operazione fino all'equazione $\frac{P}{S}=\frac{R(z^2+b)^p}{S}+Az+B+\ldots\ldots(A_1z+B_1)(z^2+b)+(A_2z+B_2)(z^2+b)^2+$ ec., e cangiato per comodo b in b^2, si rappresentino con $\frac{M\pm N\sqrt{-1}}{T\pm U\sqrt{-1}}$, $\frac{M'\pm N'\sqrt{-1}}{T'\pm U'\sqrt{-1}}$, $\frac{M''\pm N''\sqrt{-1}}{T''+U''\sqrt{-1}}$, ec. i valori di $\frac{P}{S}$, $\frac{1}{dx}d\left(\frac{P}{S}\right)$, $\frac{1}{2dx^2}d^2\left(\frac{P}{S}\right)$, ec. quando vi si pone $z=\pm b\sqrt{-1}$. Troveremo

$$\frac{M\pm N\sqrt{-1}}{T\pm U\sqrt{-1}}=B\pm Ab\sqrt{-1},\quad \frac{M'\pm N'\sqrt{-1}}{T'\pm U'\sqrt{-1}}=A\pm 2b\sqrt{-1}(B_1\pm A_1b\sqrt{-1})$$

$$\frac{M''\pm N''\sqrt{-1}}{T''\pm U''\sqrt{-1}}=B_1\pm 3A_1b\sqrt{-1}-2^2b^2(B_2\pm A_2b\sqrt{-1}),$$ ec., e di qui

$$A=\frac{NT-MU}{b(T^2+U^2)}\qquad B=\frac{MT+NU}{T^2+U^2}$$

$$A_1=-\frac{M'T'+N'U'}{2b^2(T'^2+U'^2)}+\frac{2A}{2^2b^2}\qquad B_1=\frac{N'T'-M'U'}{2b(T'^2+U'^2)}$$

$$A_2=-\frac{N''T''-M''U''}{2^2b^3(T''^2+U''^2)}+\frac{3A_1}{2^2b^2}\qquad B_2=-\frac{M''T''+N''U''}{2^2b^2(T''^2+U''^2)}+\frac{B_1}{2^2b^4}$$

ec.

Massimi e Minimi

1304. Sia data l'equazione $y=\varphi(x)$, e voglia trovarsi il valor di x che rende massimo o minimo quello di y. È chiaro che potendo l'equazione proposta considerarsi come quella di una curva di cui y ed x rappresentino le ordinate e le ascis-

se, la questione allora si riduce all'altra già risoluta (1052) di trovare la massima o minima ordinata in una curva di una data equazione. Or vedemmo (*ivi*) che il valor richiesto di x era quello dato dalle radici dell' equazione $\varphi_1 x=0$; e si distingueva poi se il valor corrispondente di y era massimo o minimo dall' osservare se quelli di x così ritrovati e introdotti in $\varphi_2 x$ rendevano questa funzione negativa o positiva. Dunque poichè (1284) $\varphi_1 x=\frac{dy}{dx}$, $\varphi_2 x=\frac{d^2y}{dx^2}$, concluderemo che i valori di x che rendon massima o minima una funzione $y=\varphi x$ son quelli dati dall' equazione $\frac{dy}{dx}=0$; questi poi daranno un massimo se sostituiti in $\frac{d^2y}{dx^2}$ renderanno negativo questo coefficiente, un minimo nel caso contrario; non daranno poi nè massimo nè minimo, se renderanno nulli simultaneamente i coefficienti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. in numero pari; il tutto conforme a quanto si espose rapporto alle ordinate.

Es. I°. Sia $y=b-(x-a)^2$. Avremo $\frac{dy}{dx}=-2(x-a)$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2$. Da $\frac{dy}{dx}=0$ si ha $x=a$, ed $y=b$, che è un massimo, poichè $\frac{d^2y}{dx^2}$ è in ogni caso negativo. La verità del risultamento è d' altronde per se stessa evidente.

II°. Sia $y=\frac{x}{1+x^2}$, Sarà $\frac{dy}{dx}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$. Da $\frac{dy}{dx}=0$, si ha $x=\pm 1$, d' onde $y=\pm\frac{1}{2}$. Il valor superiore è un massimo nascendo da $x=1$ che rende $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativo. Per l' opposta ragione l' inferiore è un minimo.

III°. Abbiasi $y=x^5-5x^4+5x^3+1$. Sarà $\frac{dy}{dx}=5x^4-20x^3+15x^2$, ... $\frac{d^2y}{dx^2}=20x^3-60x^2+30x$, $\frac{d^3y}{dx^3}=60x^2-120x+30$, $\frac{d^4y}{dx^4}=120x-120$. A $\frac{dy}{dx}$ soddisfanno $x=0$, $x=1$, $x=3$, il primo dei quali soddisfà a $\frac{d^2y}{dx^2}=0$, ma non a $\frac{d^3y}{dx^3}=0$, onde non dà nè massimo nè minimo; il secondo riduce $\frac{d^2y}{dx^2}$ a -10, e perciò dà un massimo; il terzo riduce $\frac{d^2y}{dx^2}$ a 90, e quindi dà un minimo.

IV°. Sia $y=X(x-a)^n$, e si supponga n intero e positivo. Avremo $\frac{dy}{dx}=\frac{dX}{dx}(x-a)^n+nX(x-a)^{n-1}$; Ponendo $\frac{dy}{dx}=0$, si ha $x=a$, valore che rende nulli tutti i coefficienti differenziali degli ordini susseguenti fino a $\frac{d^ny}{dx^n}$ esclusivamente (1297). Quindi se n è impari, da $x=a$ non avremo nè massimo nè minimo, perchè i

coefficienti annullati saranno allora in numero pari; se n è pari avremo un massimo, o un minimo secondo la qualità del valore di X.

V°. Debba dividersi un dato numero a in due parti x, $a-x$ tali, che il prodotto y della potenza n^{sima} dell' una nell' m^{sima} dell' altra sia un massimo o un minimo. Avremo $y=x^n(a-x)^m$, $\frac{dy}{dx}=nx^{n-1}(a-x)^m-mx^n(a-x)^{m-1}$; valore che eguagliato a zero darà $x=0$, $x=a$, $x=\frac{an}{m+n}$. L' ultima radice dà $y=m^m n^n\left(\frac{a}{m+n}\right)^{m+n}$ valor massimo. Le due prime danno un minimo quando m ed n son pari. Ciò prova che in tal caso la funzione y, dopo essersi annullata, non seguita a decrescere, ma all' opposto comincia di nuovo ad aumentare.

VI°. Sia $y=\frac{lx}{x^n}$. Supposto A il modulo, avremo (1225) $\frac{dy}{dx}=\frac{A-nlx}{x^{n+1}}$, che eguagliato a zero dà $lx=\frac{A}{n}$. Per avere $\frac{d^2y}{dx^2}$, osserveremo che in questo e in tutti i casi consimili è inutile tener conto del differenziale del denominatore, il quale dovendo esser moltiplicato per $A-nlx$, si annulla quando vi si pone il valor trovato di lx. Avremo dunque $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{An}{x^{n+2}}$; d' onde si vede che $lx=\frac{A}{n}$ dà per y un massimo. Se $n=1$, e perciò $y=\frac{lx}{x}$, sarà $lx=A$; il modulo gode dunque della bella proprietà d' essere tra tutti i logaritmi quello che diviso pel numero corrispondente dà il quoziente massimo.

VII°. Di tutti i triangoli della stessa base $AB=a$, e dello stesso perimetro $2q$, qual è quello della massima superficie y? Sia $AM=x$, onde $MB=2q-a-x$. Dunque (669) $y=\sqrt{(q(q-a)(q-x)(a+x-q))}$, $2ly=lq+l(q-a)+l(q-x)+l(a+x-q)$, $\frac{2dy}{y}=\frac{-dx}{q-x}+\frac{dx}{a+x-q}$, $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2}\left(\frac{1}{a+x-q}-\frac{1}{q-x}\right)=0$, ed $a+x-q=q-x$, $2q-a-x=x$, e perciò il triangolo cercato è isoscele.

F. 254

VIII°. Vogliasi il valor di x che rende massimo o minimo quello di y nell' equazione $y^2-2mxy+x^2-a^2=0$. Differenziando troveremo $\frac{dy}{dx}=\frac{my-x}{y-mx}$, valore che eguagliato a zero, darà $y=\frac{x}{m}$. Da questo, introdotto nella proposta, avremo $\frac{x^2}{m^2}-x^2-a^2=0$; d' onde $x=\frac{am}{\sqrt{(1-m^2)}}$, valore richiesto che dà $y=\ldots$ $\frac{a}{\sqrt{(1-m^2)}}$. Differenziando $\frac{dy}{dx}$, avremo $(y-mx)\frac{d^2y}{dx^2}=2m\frac{dy}{dx}-\frac{dy^2}{dx^2}-1$; ma $\frac{dy}{dx}=0$; dunque $\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{y-mx}=-\frac{m}{x(1-m^2)}=-\frac{1}{a\sqrt{(1-m^2)}}$ quantità negativa; onde il valore ottenuto è un massimo.

1305. Per trovare ora in quali casi una funzione z di due variabili x, y indipendenti tra loro, divenga un massimo o un minimo, supponiamo che y abbia già il valor proprio a render la funzione z un massimo o un minimo; si tratterà dunque di trovare il valor conveniente di x, cioè bisognerà differenziare la funzione z parzialmente per x, e porre $\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$ (1304). Così per aver y si differenzierà la funzione z, facendo variare y sola, e ponendo $\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$. Da queste due equazioni avremo dunque i valori di x ed y, atti a render massima o minima la funzione z; ed è chiaro per le cose già dette che otterremo un massimo se ambedue i coefficienti $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ saranno negativi, un minimo se saranno positivi; se poi l'uno risulti positivo, l'altro negativo, non avremo nè massimo, nè minimo.

Esempj. I°. Si voglia dividere il numero dato $3a$ in tre parti x, y, $3a-x-y$, il cui prodotto z sia un massimo. Avremo $z=xy(3a-x-y)$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)=(3a-2x-y)y$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=(3a-2y-x)x$. Eguagliando a zero separatamente questi coefficienti, si avrà $3a-2x-y=0=3a-2y-x$; onde $x=a$, $y=a$, $3a-x-y=a$; e poichè $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-2y$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-2x$, cioè posti i valori di x ed y, $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)=-2a$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=-2a$; perciò dividendo il dato numero in tre parti eguali, il loro prodotto darà un massimo.

II°. Tra i triangoli isoperimetri vogliasi quello che ha la maggior superficie z. Sia $2q$ il perimetro, x, y, $2q-x-y$ i lati; avremo $z=\sqrt{(q(q-x)(q-y)(x+y-q))}$ (669), $2lz=lq+l(q-x)+l(q-y)+l(x+y-q)$, e $\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-x}\right)=0$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{z}{2}\left(\frac{1}{x+y-q}-\frac{1}{q-y}\right)=0$, d'onde $x+y-q=q-x=q-y$, ed $x=y=\frac{2q}{3}=2q-x-y$; perciò il triangolo è l'equilatero.

III°. Trovar l'equazioni di una retta che da un punto dato scenda normalmente sopra di un piano dato.

Sia $z=Ax+By+C$ l'equazione del piano (1098); x', y', z' le coordinate del punto dato. Sarà $r=\sqrt{((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)}$ la distanza di questo ad un punto qualunque del piano (1082), o l'espressione di una retta condotta comunque dal punto dato al piano, espressione che dovrà per conseguenza essere un minimo, quando la retta debba esser normale. In tal caso, poichè l'equazione del piano rende z funzione di x, y (1266), i coefficienti di dx e di dy in dr saranno $\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dr}{dx}\right)$, $\left(\frac{dr}{dz}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right)+\left(\frac{dr}{dy}\right)$; e siccome $\left(\frac{dr}{dz}\right)=\frac{z-z'}{r}$, $\left(\frac{dr}{dx}\right)$

$=\frac{x-x'}{r}$, $\left(\frac{dr}{dy}\right)=\frac{y-y'}{r}$, e l' equazione del piano dà $\left(\frac{dz}{dx}\right)=A$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ $=B$, perciò sostituendo e mandando a zero, avremo per le due equazioni della retta cercata $x=x'-A(z-z')$, $y=y'-B(z-z')$, come appunto trovammo (1118).

Curve

1306. Sia la curva qualunque AM$=s$, con le coordinate rettangole AP$=x$, PM$=y$, con la tangente MT$=t$ (934), e con la normale MN$=n$ (*ivi*), e debban trovarsi i valori di t, n, della suttangente PT, della sunnormale PN, e della lunghezza lineare dell' arco s, espressi in funzioni dell' una o dell' altra coordinata x, y. Primieramente il triangolo MPT rettangolo in P, dà PT : PM :: *cos*MTP : *sen*MTP :: 1 : *tang*MTP, d' onde 1ª. PT$=\frac{y}{tang\text{MTP}}$. In seguito il triangolo TMN rettangolo in M, e dal cui vertice scende sull' ipotenusa TN la normale MP, dà (582) 2ª. PN$=\frac{\text{MP}^2}{\text{TP}}=\frac{y^2}{\text{TP}}$, 3ª. MT$^2=t^2=$ .. TP(TP+PN), 4ª. MN$^2=n^2=$PN(TP+PN). Se dunque riesca conoscere il valore di *tang*MTP, avremo dalla 1ª. PT, quindi dalla 2ª. PN, e infine dalla 3ª. e 4ª. MT ed MN. F. 255

1307. Sia frattanto $y=\varphi(x)$ l'equazione della curva data. Essendo AP$=x$, PM$=y$ le coordinate del punto M, saranno A$p=x+\delta x$, $pm=y+\delta y$ quelle di qualunque altro punto prossimo m, e condotta per M, m la secante SMm, avremo *tang*MSP $=tang\,m$M$r=\frac{\delta y}{\delta x}$ (846). Ora $\delta y=$ (1215) $\varphi(x+\delta x)-\varphi(x)=$ (1281) $\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec.; dunque *tang*MSP$=$ $\frac{dy}{dx}+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^2+$ ec. Ma quando la secante divien tangente i due punti M, m si riuniscono, e si ha $\delta x=0$, dunque allora *tang*MTP$=\frac{dy}{dx}$, e quindi PT$=\frac{ydx}{dy}$; d' onde facilmente PN$=\frac{ydy}{dx}$, MT$=t=\frac{ydx}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, MN$=n=$ $y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Rilevato dunque coi noti metodi dall' equazio-

F. 255 ne $y=\varphi(x)$ della curva il valore del coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$, avremo con facilità quello di ciascuna delle quattro funzioni.

1308. Vogliasi per esempio il valore della normale n nel circolo. Avremo (910) $y^2=a^2-x^2$; $ydy=-xdx$; $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ e quindi $n=y\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=y\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}=\sqrt{(y^2+x^2)}=\ldots.$ $\sqrt{a^2}=a$, cioè la normale è costante ed eguaglia il raggio, come era già noto (538). Si troverebbe in simil modo la sunnormale $\mathrm{PN}=\frac{ydy}{dx}=-x$, negativa conformemente all' osservazione già fatta altrove (934); la suttangente $\mathrm{PT}=\frac{ydx}{dy}=-\frac{y^2}{x}=\frac{x^2-a^2}{x}$; ed infine la tangente $t=\frac{ydx}{dy}\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}=-\frac{ay}{x}$, quarta proporzionale dopo l' ascissa, l' ordinata ed il raggio, come è facile verificar con la Sintesi.

1309. Vogliansi la suttangente PT e la sunnormale PN nella parabola. Avremo $y^2=px$ (937); $ydy=\frac{1}{2}pdx$, e quindi $\mathrm{PN}=\frac{ydy}{dx}=\frac{1}{2}p$; $\mathrm{PT}=\frac{ydx}{dy}=\frac{2y^2}{p}=\frac{2px}{p}=2x$, come già trovammo a suo luogo (952). Vogliansi le stesse PT, PN nelle curve dell' equazioni 1ª. $y^{m+n}=p^m x^n$; 2ª. $y=e^{x:a}$. Per la 1ª. troveremo $\mathrm{PT}=\frac{(m+n)y^{m+n}}{np^m x^{n-1}}=\frac{m+n}{n}x$, $\mathrm{PN}=\frac{ny^2}{(m+n)x}$; per la 2ª. $\mathrm{PT}=(1226)\frac{ay}{e^{x:a}}=a$, $\mathrm{PN}=\frac{1}{a}e^{2x:a}$.

1310. Quanto all' arco $\mathrm{AM}=s$, non possiamo concluderne per adesso il valore che col ragionamento seguente. In prossimità dell' ordinata $\mathrm{PM}=y$, si conduca l' altra $pm=y'$; ed inoltre la Mr parallela ad AP, e la Mm corda del piccolo arco Mm. Saranno $\mathrm{M}r=\mathrm{P}p=\delta x, mr=mp-\mathrm{MP}=y'-y=\delta y$ (1214), l'arco $\mathrm{M}m=\delta s$; e dal triangolo rettilineo e rettangolo Mmr avremo *corda* $\mathrm{M}m=\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}$. Or noi sappiamo che quanto più l' arco va diminuendo, tanto men differisce dalla sua corda; di modo che i limiti dell' uno e dell' altra sono eguali. Ma limite di δs è ds, e di $\sqrt{(\delta x^2+\delta y^2)}$ è $\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (1220), dunque $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, equazione la quale integra-

ta che sia, secondo ciò che insegneremo a suo luogo, darà l'arco s. Intanto potremo con essa render più semplici l'espressioni della normale e della tangente trovate di sopra; poichè posto vi $\frac{ds}{dx}$ in luogo di $\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, avremo $n=\frac{yds}{dx}$, $t=\frac{yds}{dy}=\frac{ndx}{dy}$.

1311. Del resto a tutte le precedenti relazioni si sarebbe del pari e con molta maggior semplicità pervenuti, impiegando gl'infinitesimi. Si supponga infatti che la nuova ordinata mp sia infinitamente vicina all'altra ordinata MP; sarà $Mr=dx$, $mr=dy$, ec. $Mm=ds$, ed ammesso il principio che l'arco infinitesimo si confonda con la sua corda, avremo tosto $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Il triangolo infinitamente piccolo Mmr simile ai triangoli MTP, MNP (554) darà in seguito 1ª. mr: Mm :: PM : MT, ossia $dy:ds::y:t=\frac{yds}{dy}$; 2ª. Mr : Mm :: PM : MN, ossia $dx:ds::y:n=\frac{yds}{dx}$; 3ª. mr : Mr :: PM : PT :: PN : PM, ossia $dy:dx::y$: PT :: PN : y, d'onde $PT=\frac{ydx}{dy}$, $PN=\frac{ydy}{dx}$, il tutto precisamente come sopra.

F.255

1312. Per quanto nessun dubbio cada sulla verità di tutte le formule precedenti, non vogliamo nascondere come intorno ai ragionamenti coi quali le abbiamo concluse e stabilite si affacciano molte e gravi difficoltà, che i Giovani troveranno esposte nei numerosi scritti polemici a quest'oggetto modernamente prodotti. In qualunque modo, quanto al valore di $tang$MTP, da cui, come abbiam veduto, dipendon quelli delle quattro funzioni rettilinee, già per via differentissima (1041) lo trovammo equivalente alla derivata φ, x, che come già si osservò (1284), corrisponde identicamente al nostro $\frac{dy}{dx}$; con che i valori delle quattro funzioni posson dirsi rigorosamente e pienamente dimostrati.

1313. Riguardo poi a quello di ds, si prolunghi l'ordinata pm fino all'incontro in R con la tangente MT, e la corda mM fino all'incontro in S con l'asse AP. Poichè l'arco varia con l'ascissa, dalla quale è dunque dipendente, potremo supporre $s=f(x)$, e quindi $Mm'm=\delta s=f(x+\delta x)-f(x)=$ (1281) $\frac{ds}{dx}\delta x+\frac{d^2s}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3s}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec. Ora i triangoli M R$r$, M$mr$ danno $MR=\frac{Mr}{cosRMr}=\frac{\delta x}{cosMTP}=$ (787.44ª) $\delta x\sqrt{(1+tang^2MTP)}=\delta x\sqrt{\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, e così

F.255 $Mm = \delta x \sqrt{(1 + tang^2 MSP)} = (1307)\ \delta x \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \delta x \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} + ec.\right) + \ ec.\right)}$; dunque fatto $\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = F(X)$, e $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2 y}{dx^2} + ec.\ \right) + ec. = \omega$, avremo $MR = \delta x . F(X)$, $Mm = \delta x . F(X + \omega \delta x) = \delta x F(X) + \frac{d(FX)}{dx} \omega \delta x^2 + ec.$ Ma adoperando il raziocinio già fatto altrove (614.615) può dimostrarsi che MR, Mm sono l'una maggiore, l'altra minore dell'arco $Mm'm = \delta s$, quindi siccome la prima eguaglia il primo termine della seconda, per il noto principio delle tre serie (808) dovrà a questo stesso termine essere eguale anche il primo del valore di δs, ed avremo in conseguenza $\frac{ds}{dx} = F(X) = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$, ossia $ds^2 = dx^2 + dy^2$, precisamente come si è trovato di sopra.

1314. Si noterà in ultimo che le precedenti relazioni han luogo soltanto se si tratti di curve a coordinate rettangole. In quelle a coordinate obliquangole, supposto φ l'angolo degli assi, sarà PM $= y sen \varphi$, valore che dovrà dunque sostituirsi in luogo di y in tutte le superiori equazioni. Nelle curve polari dovremo cangiare x in $r cos\theta$, y in $r sen\theta$ (901), e in conseguenza dx in $dr cos\theta - r d\theta sen\theta$, e dy in $dr sen\theta + r d\theta cos\theta$. È da notarsi che la sostituzione di questi nuovi valori darà pel differenziale dell'arco l'espressione semplicissima $ds = \sqrt{(dr^2 + r^2 d\theta^2)}$, oppure $ds = \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)}$, quando come altrove si usò (1045), e come useremo anche in appresso, ci piaccia di chiamar piuttosto y che r il raggio vettore, ed x piuttosto che θ l'angolo direttore. Nelle spirali, poichè queste pure appartengono al genere delle polari, così pel differenziale dell'arco avremo egualmente $ds = \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)}$; per le rimanenti funzioni le formule del num°. 1046, cangiatovi $\varphi_1(x)$ in $\frac{dy}{dx}$, daranno immediatamente $CT = \frac{y^2 dx}{dy}$, $MT = \frac{y dx}{dy}\sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + y^2\right)} = \frac{y ds}{dy}$, $CN = \frac{dy}{dx}$, $MN = \sqrt{\left(\frac{dy^2}{dx^2} + y^2\right)} = \frac{ds}{dx}$.

Contatti e Circoli Osculatori

256 1315. Sieno $y = f(x)$, $z = \varphi(\omega)$ l'equazioni di due curve BN, CQ riferite ai medesimi assi AX, AY, ed ambedue rivolte o con la loro concavità, o con la loro convessità all'asse comune AX delle ascisse. Se si prenda $\omega = x$, le ordinate y, z coincideranno l'una sull'altra; ed aumentate ambedue le ascisse della quantità δx, avremo per le nuove ordinate Y, Z, che pure coincideranno (1281)

$$Y = y + \frac{dy}{dx}\delta x + \frac{d^2 y}{2dx^2}\delta x^2 + \frac{d^3 y}{2.3dx^3}\delta x^3 + \frac{d^4 y}{2.3.4dx^4}\delta x^4 + ec.$$

$$Z = z + \frac{dz}{d\omega}\delta x + \frac{d^2 z}{2d\omega^2}\delta x^2 + \frac{d^3 z}{2.3d\omega^3}\delta x^3 + \frac{d^4 z}{2.3.4d\omega^4}\delta x^4 + ec.$$

Or si supponga che posto $\omega=AP$ risulti $z=PM=y$; le due curve avranno in questo caso un punto comune M, ove si taglieranno, e gli altri loro punti contigui ad M si troveranno distanti fra loro nel senso dell' asse AY di una quantità F. 256

$$D=Y-Z=+\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{d\omega}\right)\delta x+\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\frac{\delta x^2}{2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}+\text{ec.}$$

E poichè l'arbitraria δx può sempre prendersi in modo che il termine $\left(\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{d\omega}\right)\delta x$ superi in valore tutti i seguenti (807), perciò qualora e finchè questo termine risulti e si mantenga negativo, risulterà e si manterrà negativa anche la distanza D; nel qual caso avremo dunque $Z>Y$, e la curva CQ sarà e si manterrà al di sopra della curva BN. Avverrà poi tutto l' opposto nel caso contrario.

1316. Abbiasi frattanto $\varphi(\omega)=a\omega+b$, ossia $z=a\omega+b$. La curva CQ si trasformerà allora in una retta SMO (913), che attraverserà la curva BN all'estremità M dell'ordinata y. In questo caso sarà $\frac{dz}{d\omega}=a$, e quindi nulli tutti i coefficienti successivi $\frac{d^2z}{d\omega^2}$, $\frac{d^3z}{d\omega^3}$, ec.; laonde D si cangerà in

$$D_1=\left(\frac{dy}{dx}-a\right)\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3.dx^3}\delta x^3+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\delta x^4+\text{ec.};$$

ove qualora abbiasi $\frac{dy}{dx}<a$ il primo termine del polinomio sarà negativo se sarà positiva δx, cioè se l' ordinata Y si prenderà di seguito all' ordinata y; sarà poi positivo se sarà negativa δx, cioè se Y precederà y: avverrà poi tutto l' opposto se sia $\frac{dy}{dx}>a$. In tutti i casi la distanza D_1 sarà negativa da un lato del punto M, positiva dall' altro, e quindi la retta si troverà in parte al di sopra della curva, e in parte al di sotto, il che è nella natura delle secanti.

1317. Ma se $\frac{dy}{dx}=a$, e la secante si converta perciò nella tangente TM (1044), sparirà il primo termine di D_1, e D_1 si cambierà in

$$D_2=\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3y}{2.3dx^3}\delta x^3+\frac{d^4y}{2.3.4dx^4}\delta x^4+\text{ec.}$$

e qualunque sia il segno competente a δx, il primo termine sarà sempre negativo se la curva BN volga all' asse la sua concavità, positivo se gli volge la convessità (1044); quindi in tutti i casi la distanza D_2 avrà sempre un medesimo segno, comunque Y preceda o segua y; e la tangente sarà quindi o tutta al di sopra o tutta al di sotto della curva (1315); il che è precisamente nella natura delle tangenti. Tutto ciò soltanto non avrà luogo qualora il punto M sia un punto d' inflessione (1048), il che non supporremo.

Ma ciò che più preme osservare si è che, supposta per meglio fissar le idee

F.256 concava verso l'asse la curva BN, nei casi in cui D_1 è negativa, ossia per quella parte della secante SMO che s' innalza al di sopra della curva (1316), avremo sempre, indipendentemente dal segno, $D_1 > D_2$, dal che facilmente s' inferirà che tutta questa porzione della secante si troverà al di sopra della tangente. Di quì la luminosa conseguenza che niuna secante, o in termini più generici niuna retta che attraversi la curva nel punto M potrà mai passare tra questa e la tangente.

1318. Passeranno bensì tra l' una e l' altra tutte quante le curve, che rivolte nel senso stesso della BN, toccheranno la tangente MT nel punto M, e per le quali sarà inoltre $\frac{d^2z}{d\omega^2} < \frac{d^2y}{dx^2}$. Infatti, si continui a suppor BN concava verso l' asse, e sia come sopra $z=\varphi(\omega)$ l' equazione d' una qualunque delle curve di cui parliamo. Dovendo questa in ipotesi esser tangente ad MT, avremo (1041) $\frac{dz}{d\omega}=a=\frac{dy}{dx}$, e quindi D (1315) si cangerà in

$$D_3=\left(\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\frac{\delta x^2}{2}+\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}+\left(\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^4z}{d\omega^4}\right)\frac{\delta x^4}{2.3.4}+\text{ec.};$$

e siccome le due curve volgono la loro concavità all' asse AP, e perciò $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{d\omega^2}$ sono ambedue negative (1044), e in ipotesi si ha $\frac{d^2z}{d\omega^2} < \frac{d^2y}{dx^2}$, è dunque chiaro che il primo termine di D_3 sarà negativo, e, indipendentemente dal segno, più piccolo del primo di D_2, e quindi per il solito ragionamento $D_3 < D_2$; il che mostra che almeno intorno al punto di contatto la nuova curva sarà tutta compresa tra la primitiva e la tangente. Può anche osservarsi che D_3 conserva sempre il segno negativo qualunque sia quello di δx; onde tanto al di quà quanto al di là del punto M di contatto, e all' intorno di esso, la nuova curva si troverà tutta al di sopra della primitiva, e perciò sarà essa pure tangente in M alla curva BN.

1319. La distanza D_3 sarà poi tanto più piccola, ed avremo perciò un contatto tanto più intimo, quanto meno differiranno fra loro $\frac{d^2y}{dx^2}$ e $\frac{d^2z}{d\omega^2}$. Che se questi due coefficienti si eguaglieranno, D_3 si cangerà in $D_4=\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}+\ldots\left(\frac{d^4y}{dx^4}-\frac{d^4z}{d\omega^4}\right)\frac{\delta x^4}{2.3.4}+\text{ec.}$, e sarà $D_4 < D_3$, tanto nei casi che sieno ambedue negative, quanto in quelli che ambedue sieno positive; dal che al solito si conclude, che tutte le curve per le quali oltre $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{d\omega}$ si abbia $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{d\omega^2}$, si accosteranno in modo alla primitiva BN, che niun' altra curva, per la quale la seconda condizione non si verifichi, potrà mai passare tra loro e BN.

1320. Nella stessa maniera e coi medesimi ragionamenti si proverebbe che niuna di queste ultime curve può passare tra la data e quelle nelle quali si incon-

trasse di più $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3z}{d\omega^3}$, ec. Avvertiremo intanto che si chiama *contatto di prim' ordine* quello che ha luogo unicamente in forza dell' equazione $\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{d\omega}$; di *second' ordine* quello che deriva inoltre dall' equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2z}{d\omega^2}$; di *terzo* se vi concorre anche la terza equazione $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3z}{d\omega^3}$, ec.; e le curve per le quali han luogo questi contatti si chiamano *osculatrici d'ordine primo, secondo, terzo*, ec. Si noti però che il contatto di second' ordine, non è rigorosamente un contatto, ma un' intersezione. Infatti il segno di D_4 (1319) dipendendo da quello del suo primo termine $\left(\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{d^3z}{d\omega^3}\right)\frac{\delta x^3}{2.3}$, e questo cambiando secondo che δx si prende o positiva o negativa, ovvero secondo che i punti della curva osculatrice si prendono da una parte o dall'altra dell' ordinata y, tutto ciò mostra che in tal caso la curva passerà da un lato al di sopra, e dall' altro al di sotto della data, e quindi la taglierà, sempre in modo però che, tanto dall' una come dall' altra parte all' intorno dell' intersezione, rimarrà chiusa fra la data e qualunque osculatrice di prim' ordine. Altrettanto e per le stesse ragioni dovrà dirsi dei contatti d' ordine quarto, sesto, ec.

1321. Da tutto ciò si raccoglie 1°. che avremo fra le due curve un contatto dell' ordine n^{simo}, se le loro costanti, dalle quali si sà che principalmente dipende tutto ciò che è relativo alla loro dimensione, alla loro posizione reciproca (1053), e quindi anche alla loro tangenza, potranno determinarsi in maniera che posto $\omega=x$, si abbia $z=y$, $\frac{dz}{d\omega}=\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2z}{d\omega^2}=\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. ed infine $\frac{d^nz}{d\omega^n}=\frac{d^ny}{dx^n}$.

2°. Se perciò d' una delle due sia data non solo la specie ma ancora la dimensione e la posizione, e quindi tutte le costanti abbiano, o si suppongano avere un valore determinato, l' altra non potrà aver con questa un contatto dell' ordine n^{simo}, se non contenga almeno $n+1$ costanti indeterminate ed arbitrarie, da soddisfare alle $n+1$ equazioni condizionali volute dall' ordine di questo contatto.

3°. Siccome poi il contatto è reciproco, e se l' una delle due curve è rispetto all' altra osculatrice dell' ordine n^{simo}, questa pure è osculatrice dell' ordine stesso rapporto a quella, così la possibilità del contatto di un ordine qualunque esige che ambedue le curve abbiano un numero di costanti atto a render sì l' una che l' altra osculatrice dell' ordine richiesto. Quindi la linea retta, nella cui equazione $z=a\omega+b$ non entrano che due sole costanti, non potrà aver con qualunque curva data se non un contatto di prim' ordine. Il circolo, nella cui equazion generale $(\omega-\alpha)^2+(z-6)^2=r^2$ (911) entrano tre costanti potrà averne uno di secondo. La parabola, che ha un' equazione con quattro costanti (939), potrà averne uno di terzo, ec.

4°. Infine quanto al modo di determinare queste costanti, si riducano l' equazioni delle due curve alla forma $v=0$, $v'=0$; quindi si osservi che dovendo es-

sere $\omega = x$, il porre $z = y$, $\frac{dz}{d\omega} = \frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2z}{d\omega^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$, ec. è lo stesso che cangiare ω e z in x ed y nell'equazione $v' = 0$, e nei suoi differenziali fino all' ordine m^{imo}. Instituite dunque l' equazioni $v' = 0, dv' = 0, d^2v' = 0$, ec. si permutino in ciascuna ω in x, z in y; vi si sostituiscano, volendo e occorrendo, i valori dei coefficienti $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ec. prendendoli dall'equazioni $dv = 0$, $d^2v = 0$, ec. nelle quali tutto è supposto noto; si concludano quindi quelli delle opportune costanti arbitrarie, che introdotti in $v' = 0$ daranno l' equazione particolare spettante alla curva osculatrice.

1322. Riprendiamo, per dar qualche esempio, l'equazione $z = a\omega + b$ alla linea retta. Avremo $v' = z - a\omega - b = 0$, $dv' = dz - ad\omega = 0$, e senza passare ad altre differenziazioni, perchè le costanti da determinarsi non son che due sole, fatto il cambiamento delle coordinate, otterremo $y - ax - b = 0$, $dy - adx = 0$; d'onde $a = \frac{dy}{dx}$, $b = y - \frac{xdy}{dx}$, e quindi per l'equazione della retta tangente $z - y = (\omega - x) \times \frac{dy}{dx}$, ove y ed x sono le coordinate del punto di contatto, e debbon perciò supporsi note, e son date l'una per l'altra dall'equazione $y = f(x)$(1315). Si osserverà che l'equazione trovata è in tutto conforme a quella alla quale si pervenne per altre vie (1061).

1323. Si cerchi l'equazione del circolo, che ha con la curva qualunque dell' equazione $y = f(x)$ un contatto di second'ordine. Sarà (1321.3°) $v' = (\omega - \alpha)^2 + (z - \beta)^2 - r^2 = 0$. Permutando le coordinate, e due volte differenziando, presa dx costante, avremo le tre equazioni 1ª. $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$; 2ª. $x - \alpha + (y - \beta)\frac{dy}{dx} = 0$; 3ª. $1 + (y - \beta)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy^2}{dx^2} = 0$. Le due ultime danno assai facilmente $x - \alpha = \frac{ds^2dy}{dxd^2y}$, $y - \beta = -\frac{ds^2}{d^2y}$, e quindi la prima $r = \pm\frac{ds^3}{dxd^2y}$. Di questi tre valori, i primi due danno le coordinate α, β del centro del circolo cercato (911), e servono quindi a stabilirne la posizione; l'ultimo ne dà il raggio, e tutti insieme sostituiti in $v' = 0$ ne daranno l'equazione. Al circolo di quest' equazione, ossia a quello che ha un contatto di second' ordine con una curva qualunque, si dà il nome di *circolo osculatore*, ed al raggio, quello di *raggio osculatore*. E poichè la posizione e le dimensioni dell' uno e dell' altro dipendono dai valori delle coordinate x, y spettanti alla curva, e variabili da un punto all' altro, così i circoli, o i raggi osculatori varieranno sempre da punto a punto. Il raggio osculatore si chiama altresì *raggio di curvatura*, poichè il circolo al quale appartiene essendo quello che più di tutti gli altri si accosta all' arco col quale è in contatto, e quello perciò che men degli altri ne differisce, la curvatura dell' arco deve dunque presumersi tanto maggiore o minore, quanto più grande o più piccola è quella del

suo circolo osculatore, e in conseguenza quanto più piccolo o più grande è il corrispondente raggio osculatore; poichè come sappiamo (823), le curvature dei circoli stanno in ragione inversa dei raggi. Perciò ove il raggio osculatore sarà minimo, ivi avremo la massima curvatura.

1324. Che se non si faccia uso della terza equazione (1323), e si lasci r indeterminata, avremo $\alpha=x\mp\frac{rdy}{ds}$, $6=y\pm\frac{rdx}{ds}$, ed α, 6 saranno in tal caso le coordinate del centro di tutti i circoli, i quali goderanno semplicemente di un contatto di prim'ordine (1320), e che potranno essere infiniti di numero, attesa l'infinità dei valori di cui è suscettiva l'indeterminata r. E se da queste due equazioni si elimina r, avremo $6-y=-(\alpha-x)\frac{dx}{dy}$ equazione fra le coordinate α e 6, ossia al luogo geometrico dei centri di tutti quei circoli che hanno un contatto di prim'ordine con la curva data in uno stesso punto M. E quest'equazione mostra 1.° che questi centri saranno tutti in una medesima retta (913); 2.° che questa retta sarà normale alla curva in M, o per meglio dire alla retta tangente in M alla curva. Infatti essendosi trovata per la tangente l'equazione $z-y=(\omega-x)\frac{dy}{dx}$ (1322), sarà dunque per l'una delle due rette (1055) $a=\frac{dy}{dx}$, per l'altra $a'=-\frac{dx}{dy}$, e quindi $aa'=-1$, ossia $aa'+1=0$, condizione nota (1056) per la perpendicolarità di due rette che s'incontrano in un piano. Quindi 3.° anche il raggio del circolo osculatore, al di cui centro appartengono egualmente le coordinate α, 6, è necessariamente normale alla curva o alla sua tangente in M. 4.° Perciò se la tangente al vertice della curva è normale all'asse, il raggio osculatore si confonderà in quel punto con l'asse medesimo.

Fig. 258

1325. Resta infine da notarsi 1.° che dei due segni del valore di r (1323) l'inferiore deve impiegarsi per le curve che volgono all'asse la loro concavità, e per le quali in conseguenza d^2y è negativo (1044), il che rende in ultimo r positivo: 2.° che essendo $dy^2=ds^2-dx^2$, avremo con dx costante $dyd^2y=dsd^2s$, e di qui $r=\pm\frac{dyds^2}{dxd^2s}=(1230)\mp dy:d\frac{dx}{ds}$, nuove espressioni del raggio osculatore. 3.° Per le curve polari, siccome chiamato u il raggio vettore si ha (1314) $dx=ducos\theta-ud\theta sen\theta$, $dy=dusen\theta+ud\theta cos\theta$, perciò se vogliasi $d\theta$ costante, dovremo oltre dy riguardare come variabile anche dx, e nel passare dalla 2.^{a} alla 3.^{a} equazione (1323) converrà differenziare anche per dx. Con ciò l'equazione 3.^{a} (*ivi*) si cangerà in $1+\frac{y-6}{dx^3}\left(dxd^2y-dyd^2x\right)+\frac{dy^2}{dx^2}=0$.

Frattanto da questa e dalla 2.^{a} avremo $x-\alpha=\frac{dy(dx^2+dy^2)}{dxd^2y-dyd^2x}$, $y-6=-$.....

$\frac{dx(dx^2+dy^2)}{dxd^2y-dyd^2x}$, e quindi dalla 1.ª $r=\pm\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dxd^2y-dyd^2x}$, ovvero, posti i superiori valori di dx, dy e quelli dei loro differenziali, e fatte le debite riduzioni, $r=\pm\frac{(du^2+u^2d\theta^2)^{\frac{3}{2}}}{2du^2d\theta-ud^2ud\theta+u^2d\theta^3}=(1314)\frac{\pm ds^3}{2du^2d\theta-ud^2ud\theta+u^2d\theta^3}$, oppure $r=\frac{\pm ds^3}{2dxdy^2-yd^2ydx+y^2dx^3}$ qualora si rappresenti con $y=\varphi(x)$ l'equazione alla curva (1045), e quindi con y,x il raggio vettore e l'angolo direttore.

1326. In tutte queste differenti espressioni del valore di r debbonsi poi, siccome abbiamo avvertito (1321. 4.°), porre i valori di dx,dy, ec. presi dall'equazioni particolari delle curve per le quali si cerca il raggio osculatore. Così nelle curve coniche la cui equazione riferita agli assi principali può comodamente rappresentarsi con $y^2=px+mx^2$, e che è alla parabola se $m=0$, all'ellisse se $m=-\frac{p}{2a}$, all'iperbola se $m=\frac{p}{2a}$ (944), avremo $dy=\frac{dx}{2y}(p+2mx)$, $d^2y=\frac{1}{2y^2}\times\left(2mydx^2-(p+2mx)dxdy\right)=\frac{dx^2}{4y^3}\left(4my^2-(p+2mx)^2\right)$, ossia sostituendo il valore di y^2, $d^2y=-\frac{p^2dx^2}{4y^3}$. Di qui $r=(1323)-\frac{ds^3}{dxddy}=\frac{4y^3ds^3}{p^2dx^3}=(1310)\frac{4n^3}{p^2}=$ (953. 970. 987) $=\frac{pz^3}{2q^3}$, relazioni notabilissime per tutte le sezioni coniche.

1327. Dunque nel circolo ove $p=2a$ (944) $=2n$ (1308), si ha $r=n=\frac{p}{2}=a$; onde i raggi osculatori son tutti eguali al raggio del circolo, come è d'altronde evidente.

Fig.257 Nella parabola, ove si ha $\frac{1}{2}p=$PN (1309), si avrà $r=\frac{MN^3}{PN^2}=\frac{MN^2}{PN}\times\frac{MN}{PN}$: perciò condotta l'ordinata PM e la tangente MT, presa sull'asse PQ=TN, abbassata da Q la normale indefinita QC e prolungata MN fino all'incontro in C con CQ, avremo $r=$MC. Infatti i triangoli simili MPN, CQN danno PN : MN :: QN : NC :: PN+QN : MN+CN :: PQ : MC :: TN : MC; d'onde MC$=\frac{TN\times MN}{PN}=$(1306.4.ª) $\frac{MN^2}{PN}\times\frac{MN}{PN}=\frac{MN^3}{PN^2}=r$.

1328. Infine poichè $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{\left(dx^2+\frac{dx^2}{4y^2}(p+2mx)^2\right)}$, sostituito questo valore avremo $r=\frac{1}{2p^2}\sqrt{\left(4y^2+(p+2mx)^2\right)}^3$. Fatto $x=0$, sarà altresì $y=0$, ed $r=\frac{1}{2}p$; dal che si conclude che in tutte le sezioni coniche il raggio osculatore al vertice eguaglia la metà del parametro.

1329. Nella cicloide, ove supposto DB$=2a$, abbiamo $y=$PM$=au+asenu$ (1020), sarà $dy=du(a+acosu)$; e poichè, ponendo BP$=x$, si ha manifestamente $a+acosu=$DP$=2a-x$, ed $au=arc.sen.v.x$, d'onde $u=arc.sen.v.\frac{x}{a}$ (782), e $du=$ (1233.7°) $\frac{dx}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, dunque di nuovo $dy=\frac{dx(2a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$. F 260

Di qui $ddy=-\frac{adx^2}{x\sqrt{(2ax-x^2)}}$, $dx^2+dy^2=\frac{2adx^2}{x}=ds^2$, ed $r=\frac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{-dxddy}$ $=2\sqrt{2a(2a-x)}=2$OD$=2$MN (1043), ed MN$=$OD; quindi 1°. Nel punto A ove $x=2a$ avremo $r=0$; 2°. nel punto B ove $x=0$ avremo $r=4a=2$BD.

1330. Sia la spirale logaritmica ADM, in cui (1047) $y=Ae^{x:c}$, e quindi (1226) 259 $dy=\frac{1}{c}dxAe^{x:c}=\frac{ydx}{c}$, d'onde $dx=\frac{cdy}{y}$, $ds=$ (1314) $\sqrt{(dy^2+y^2dx^2)}=dy\times\sqrt{(1+c^2)}$, e finalmente $d^2y=\frac{dy^2}{y}$. Da questi valori sostituiti in quello di r (1325.3°) avremo $r=\frac{yds^3}{cdy^3(1+c^2)}=\frac{yds^3}{cdyds^2}=\frac{yds}{cdy}=\frac{ds}{dx}=$MN (1314), onde il raggio di curvatura eguaglia la normale MN, con la quale perciò interamente si confonde (1324.3°); e poichè MNA$=$TMA (582), l'angolo di questo raggio con la sunnormale, o con la retta condotta dal polo alla sua estremità inferiore N è costante, ed eguaglia quello che fa la tangente con l'ordinata.

Evolute

1331. I centri dei circoli osculatori variando di posizione per ogni punto della 258 curva AN, si concepirà facilmente che presi l'un dopo l'altro debbon formare una nuova curva BC, con α e β per coordinate (1323), riferite ambedue agli assi stessi della curva AN, e quindi con $\beta=\varphi(\alpha)$ per equazione, la quale facilmente otterremo prendendo i due valori (1324) $\alpha=x\mp\frac{rdy}{ds}$, $\beta=y\pm\frac{rdx}{ds}$, introducendovi quelli di $y, r, \frac{dy}{ds}, \frac{dx}{ds}$ dati in funzione di x, e conclusi dall'equazione $y=f(x)$ della curva AN, e quindi eliminandone la stessa x. Or questa nuova e rimarchevolissima curva è conosciuta col nome di *evoluta* o *sviluppata*, perchè immaginato avvolto un filo flessibile alla sua parte convessa, il quale con parte di se sporga fuori della curva di tutta la lunghezza AB equivalente al raggio osculatore della curva AN al punto A, se lo svolgeremo tenendolo egualmente teso, la sua estremità A anderà percorrendo o descrivendo la curva AN, a cui in questo caso si dà il nome di *sviluppante* o di *evolvente*.

1332. Infatti sia C un punto qualunque della curva dei centri BC, e CM il

F. 258. raggio del circolo osculatore in M, che avrà dunque per centro il punto C. Saranno α,β ed x,y le respettive coordinate dei punti C,M del raggio $CM=r$; α',β', x',y' quelle dei punti c,m del raggio contiguo $cm=r'$; e l'equazioni 1ª.2ª. e 3ª.(1323) che sussistono fra le prime, sussisteranno anche fra le seconde. Dunque 4ª. $(x'-\alpha')^2 + (y'-\beta')^2 - r'^2 = 0$, 5ª. $x'-\alpha'+(y'-\beta')\frac{dy'}{dx'}=0$, cioè (1216) $u+du=0, v+dv=0$, qualora con $u=0, v=0$ si rappresentino la 1ª. e 2ª, e purchè in u,v oltre x,y si considerino come variabili anche α,β,r. Ma $u=0, v=0$ danno $du=0, dv=0$ (1269), dunque 6ª. $(x-\alpha)(dx-d\alpha)+(y-\beta)(dy-d\beta)=rdr$; 7ª. $dx^2+dy^2+(y-\beta)d^2y-d\alpha dx-d\beta dy=0$. Da queste e dalla 2ª, e 3ª. nasceranno 8ª. $(x-\alpha)d\alpha+(y-\beta)\times d\beta=-rdr$, e 9ª. $\frac{dx}{dy}=-\frac{d\beta}{d\alpha}$; quindi la 2ª. darà 10ª. $y-\beta=\frac{d\beta}{d\alpha}(x-\alpha)$, e questa con l'8ª. e 1ª. darà in ultimo 11ª. $dr^2=d\alpha^2+d\beta^2$, ossia $dr=\sqrt{(d\alpha^2+d\beta^2)}$.

Or la 10ª. è l'equazione di una retta (1055) alla quale appartiene il punto corrispondente alle coordinate x, y, cioè per noi il punto M, e che passa per quello corrispondente alle coordinate α, β, cioè pel punto C; è dunque nella direzione del raggio osculatore MC. Inoltre il coefficiente $\frac{d\beta}{d\alpha}$ indica che questa retta è tangente alla curva dell'equazione $\beta=\varphi(\alpha)$ (1061), laonde MC, e perciò ciascun raggio osculatore è tangente nella sua origine alla curva dei centri BC. La direzione dei raggi osculatori coincide perciò visibilmente con quella che prende successivamente, a misura che va spiegandosi, il filo avvolto. Infine l' 11ª. mostra che la variazione dr del raggio osculatore MC equivale a quella dell' arco dell' evoluta; dimodochè questo raggio, e tutti i suoi precedenti e seguenti differiscono fra di loro in lunghezza di quanto è lungo l' arco dell'evoluta, interposto tra gli uni e gli altri. Dunque l' intera lunghezza del raggio MC che si compone del raggio primitivo AB più i successivi accrescimenti di tutti i raggi intermedj, eguaglierà la lunghezza di AB più tutto l' arco BC, ed avremo l' equazione MC=AB+*arc*.BC; il che verificandosi egualmente della porzione di filo compreso da A fino a C, ne segue che allorquando il filo si sarà svolto fino al punto C, e la parte svolta avrà quindi presa la direzione di MC, la sua estremità A si troverà nel punto M della curva sviluppante AN, lungo la quale dunque si manterrà costantemente nel suo svolgimento, e che in conseguenza anderà descrivendo nell' atto stesso di svolgersi. Di quì intanto la bella conseguenza che ogni qualvolta la sviluppante è algebrica, potremo aver l' espressione di un arco qualunque dell' evoluta, prendendo la differenza dei raggi osculatori della prima, corrispondenti alle due estremità dell' arco della seconda; vi è perciò un' infinità di curve rigorosamente rettificabili, contro l' opinione altre volte emessa da *Cartesio*.

1333. Illustriamo con qualche esempio queste dottrine, e si cerchi in primo luogo l' evoluta del circolo. Poichè in questa curva abbiamo $r=a$ (1327), $\frac{dy}{ds}$

$=\frac{y}{t}(1310)=-\frac{x}{a}(1308), \frac{dx}{ds}=\frac{y}{n}(1310)=\frac{y}{a}$, sarà $\alpha=0$, $\beta=0$; onde il circolo ha per evoluta il suo medesimo centro.

Vogliasi l' evoluta della parabola. Si avrà $r=\frac{4n^3}{p^2}$ (1326), $\frac{dy}{ds}=\frac{y}{t}$ (1310) $=\frac{ydy}{ndx}=\frac{p}{2n}$; $\frac{dx}{ds}=\frac{y}{n}$; onde $\alpha=x+\frac{2n^2}{p}=3x+\frac{1}{2}p(952)$; $\beta=\frac{y}{p^2}(p^2-4n^2)=-\frac{4xy}{p}=-4x\sqrt{\frac{x}{p}}$. Dunque $\beta^2=\frac{16x^3}{p}=\frac{16}{27p}(\alpha-\frac{1}{2}p)^3$, ossia (fatto $\alpha-\frac{1}{2}p=\alpha'$) $\alpha'^3=\frac{27}{16}p\beta^2$, equazione ad una parabola cubica (1011) col vertice in B, e il cui parametro F.258 è $\frac{27}{16}$ di quello della data. Abbiamo quì dunque un esempio di una curva algebrica rettificabile (1332).

Si cerchi l' evoluta della cicloide. Avremo (1329), $dy=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, $ds=dx\times\sqrt{\frac{2a}{x}}$, $r=2\sqrt{2a(2a-x)}$, e quindi $\alpha=4a-x$, $\beta=y-2\sqrt{x(2a-x)}$. Non potendosi quì effettuar completamente l' eliminazione di x (1331), perchè manca il valore di y dato direttamente per x, e si ha solo quello di dy dato per x e dx, si differenzino adunque le due equazioni, ed avremo $d\alpha=-dx$, $d\beta=dy-\frac{2dx(a-x)}{\sqrt{x(2a-x)}}$, ossia sostituendo il valor di dy, $d\beta=dx\sqrt{\frac{x}{2a-x}}=-d\alpha\sqrt{\frac{4a-\alpha}{\alpha-2a}}$; ovvero (ponendo $\frac{1}{2}\pi-\beta=\beta'$, $\alpha-2a=\alpha'$) $d\beta'=d\alpha'\sqrt{\frac{2a-\alpha'}{\alpha'}}$, equazione che essendo in tutto conforme all' altra $dy=dx\sqrt{\frac{2a-x}{x}}$, mostra che l' evoluta è una cicloide dell' asse $2a$, e quindi perfettamente eguale alla data.

Si osservi 1°. che la fatta trasformazione delle coordinate α, β in α', β', non inducendo cambiamento veruno nella direzione degli assi (904.4°), quelli della nuova cicloide si conserveranno dunque paralleli agli assi della primitiva, e soltanto varieranno d' origine, la quale, come è facile a vedersi, da B passerà in A, punto che sarà dunque il vertice della nuova cicloide, come AB' parallela ed eguale a BD ne sarà l' asse, e B'E parallela ed eguale ad AD la semibase. 2°. Che la nuova cicloide incontrandosi in E con BE=2BD raggio osculatore della cicloide primitiva al punto B (1329), ed essendo nullo il raggio osculatore al punto A (*ivi*), la semicicloide ACE, e quindi l' altra sua eguale AMB, equivarranno in lunghezza a 2BD (1332), e l' intera cicloide AB*a* a 4BD; laonde *l' arco intero cicloidale è quadruplo del diametro del circolo genitore*. 3°. l' altra semicicloide *a*C'E descritta sull' asse *ab* parallelo ed eguale ad AB' sarà l' evoluta della semicicloide BM'*a*.

Vogliasi infine l' evoluta della spirale logaritmica. Poichè in questa curva l' 259

F.259. angolo ANM=AMT (1330); l' evoluta ABN è dunque eguale alla spirale logaritmica ADM (1030). Quindi (1332) la tangente MN è eguale alla spirale ABN, benchè questa faccia un' infinità di rivoluzioni intorno al punto A; dunque del pari condotta AT perpendicolare ad AM, sarà MT= all' arco ADM; onde *la spirale logaritmica e la cicloide sono evolute di se medesime.*

Altre regole del Calcolo Integrale

Metodo per ridurre l' integrazione di più differenziali binomj di una sola variabile a quella di altri differenziali conosciuti

1334. Debbasi integrare $x^n dx(a+bx^m)^k$, supponendo noto l' integrale di $x^p dx(a+bx^m)^k$, ed $n>p$. Poichè $x^n=x^{n-m+1}.x^{m-1}$, perciò fatto $x^{n-m+1}=t$, ed $x^{m-1}dx(a+bx^m)^k=dq$, onde (1259) $q=\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{bm(k+1)}=\ldots\ldots\frac{a(a+bx^m)^k+bx^m(a+bx^m)^k}{bm(k+1)}$, la formula $\int tdq=tq-\int qdt$ (1263) darà $\int x^n \times dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{n+1-m}(a+bx^m)^{k+1}}{bm(k+1)}-\frac{1+n-m}{bm(k+1)}\int x^{n-m}dx\left\{a(a+bx^m)^k+bx^m(a+bx^m)^k\right\}$, cioè riducendo, $\int x^n dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(mk+n+1)}-\frac{a(n-m+1)}{b(mk+n+1)}\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$. Se in questa stessa espressione in vece di n si scriva $n-m$, $n-2m$, ec., si avranno i valori di $\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$, di $\int x^{n-2m}dx(a+bx^m)^k$, in generale di $\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k$, essendo i un intero positivo; e di qui $\int x^n dx(a+bx^m)^k=(a+bx^m)^{k+1}\left(\frac{x^{1+n-m}}{b(1+n+mk)}-\ldots\right.$
$$\left.\frac{a(1+n-m)A}{bx^m(1+n+m(k-1))}-\frac{a(1+n-2m)B}{bx^m(1+n+m(k-2))}-\ldots-\frac{a(1+n-m(i-1))Z}{bx^m(1+n+m(k-i+1))}\right)$$
$$\pm\frac{a^i(1+n-m)(1+n-2m)\ldots(1+n-im)}{b^i(1+n+mk)(1+n+m(k-1))\ldots(1+n+m(k-i+1))}\int x^{n-im}dx(a+bx^m)^k,$$
ove i fattori A, B, ec. rappresentano in ciascun termine tutto intero il valore del suo precedente, ed il segno superiore ha luogo quando i è pari, l'inferiore quando è impari. Ora se $n-im=p$, cioè se $\frac{n-p}{m}=i$, intero e positivo potrà $\int x^n dx(a+\ldots bx^m)^k$ ridursi con la formula precedente a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, presi tanti termini della serie, e tanti fattori trinomj nel numeratore e denominator del termine fuor di serie, quante sono unità in i.

Es. Sia $\int x^{10}dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ da ridursi a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=arc.sen x$ (1232. 1.°): sarà $n=10, a=1, b=-1, m=2, k=-\frac{1}{2}, p=0, \frac{n-p}{m}=i=5$; dunque $\int x^{10}dx(1-x)^{-\frac{1}{2}}=$ $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{10}x^9-\frac{9}{10.8}x^7-\frac{9.7}{10.8.6}x^5-\frac{9.7.5}{10.8.6.4}x^3-\frac{9.7.5.3}{10.8.6.4.2}x\right)+\frac{9.7.5.3.1}{10.8.6.4.2}\times$ $arc.sen x+C$(1252. V.).

1335. Se sia $n<p$, e in conseguenza i numero intero negativo, in luogo di ridurre $\int x^n dx(a+bx^m)^k$ a $\int x^p dx(a+bx^m)^k$, si ridurrà questa alla prima.

Esempio. Sia $\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$ da ridursi a $\int dx(1+x^2)^{-1}=arc.tang x$ (1232. 3.°); si avrebbe $n=-4$, $m=2$, $p=0$ ed $\frac{n-p}{m}=-2$: riducendo dunque la seconda alla prima si avrà $n=0$, $a=1$, $b=1$, $m=2$, $k=-1$, $p=-4$, $\frac{n-p}{m}=2=i$; onde $\int dx(1+x^2)^{-1}=-x^{-1}+\frac{x^{-3}}{3}+\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}$; dunque $\int x^{-4}dx(1+x^2)^{-1}=$ $x^{-1}-\frac{x^{-3}}{3}+\int dx(1+x^2)^{-1}$.

1336. Può altresì per questo caso istituirsi una formula generale analoga a quella già stabilita pel caso opposto. Si riprenda la formula (1334) $\int x^n dx(a+\ldots$ $bx^m)^k=\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{b(1+n+mk)}-\frac{a(1+n-m)}{b(1+n+mk)}\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k$. Avendosi da questa $\int x^{n-m}dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{1+n-m}(a+bx^m)^{k+1}}{a(1+n-m)}-\frac{b(1+n+mk)}{a(1+n-m)}\int x^n dx(a+bx^m)^k$, se si ponga $n+m$ in luogo di n troveremo $\int x^n dx(a+bx^m)^k=\frac{x^{1+n}(a+bx^m)^{k+1}}{a(1+n)}-$ $\frac{b(1+n+m(k+1))}{a(1+n)}\int x^{n+m}dx(a+bx^m)^k$, ove se in luogo di n scriveremo successivamente $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, ... $n+im$, e se sostituiremo come sopra gli uni negli altri i valori che così si saranno ottenuti, troveremo.......

$$\int x^n dx(a+bx^m)^k=(a+bx^m)^{k+1}\left\{\frac{x^{1+n}}{a(1+n)}-\frac{b(1+n+m(k+1))x^m A}{a(1+n+m)}-\ldots\ldots\right.$$
$$\left.\frac{b(1+n+m(k+2))x^m B}{a(1+n+2m)}-\frac{b(1+n+m(k+3))x^m C}{a(1+n+3m)}\ldots-\frac{b(1+n+m(k+i-1))x^m Z}{a(1+n+m(i-1))}\right\}$$
$$\pm\frac{b^i(1+n+m(k+1))(1+n+m(k+2))(1+n+m(k+3))\ldots(1+n+m(k+i))}{a^i(1+n)(1+n+m)(1+n+2m)\ldots(1+n+m(i-1))}\times\ldots$$

$\int x^{n+im}dx(a+bx^m)^k$; nella quale ciascun dei coefficienti A, B, C, ec. rappresentano al solito tutto intero il termine precedente, i è un intero positivo, ed han luogo tanti termini in serie e tanti coefficienti polinomj nel termine fuor di serie quante unità sono in i, valendo per ultimo il segno superiore o l'inferiore secondo che i è pari o impari.

1337. Col mezzo delle due precedenti serie generali si otterranno assai facilmente gl' integrali 1.° $\int\frac{x^{\pm 2m}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, 2.° $\int\frac{x^{\pm(2m+1)}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$, 3.° $\int\frac{x^{\pm m}dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$, riducendo il 1.° tanto coll'un segno quanto coll'altro a $\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(1261.1.°)\ arc.sen\frac{x}{a}$: riducendo il 2.° col segno superiore a $\int\frac{xdx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(1224)-\sqrt{(a^2-x^2)}$, e col segno inferiore a $\int\frac{dx}{x\sqrt{(a^2-x^2)}}=\frac{1}{\sqrt{-1}}\int\frac{dx}{x\sqrt{(x^2-a^2)}}=(1261.3.°)-\frac{1}{a\sqrt{-1}}arc.sen\frac{a}{x}$: trasformando il 3.° in $x^{\pm m-\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{(a-x)}}$, e quindi riducendolo a $\int\frac{x^{-\frac{1}{2}}dx}{\sqrt{(a-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x(a-x)}}=(1261.4.°)\ arc.sen.v.\frac{2x}{a}$. Operando troveremo

I.^{a} $$\int\frac{x^{2m}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\sqrt{(a^2-x^2)}\left\{\frac{x^{2m-1}}{2m}+\frac{(2m-1)a^2x^{2m-3}}{2m(2m-2)}+\dots\dots\dots\dots\dots \frac{(2m-1)(2m-3)a^4x^{2m-5}}{2m(2m-2)(2m-4)}+\dots\dots+\frac{3.5.7\dots(2m-1)a^{2m-2}x}{2.4.6\dots2m}\right\}+\frac{3.5.7\dots(2m-1)}{2.4.6\dots2m}\times\dots a^{2m}arc.sen\frac{x}{a}+C$$

II.^{a} $$\int\frac{dx}{x^{2m}\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\sqrt{(a^2-x^2)}\left\{\frac{1}{(2m-1)a^2x^{2m-1}}+\frac{2m-2}{(2m-1)(2m-3)a^4x^{2m-3}}+\frac{(2m-2)(2m-4)}{(2m-1)(2m-3)(2m-5)a^6x^{2m-5}}+\dots+\frac{2.4.6\dots(2m-2)}{3.5.7\dots(2m-1)a^{2m}x}\right\}+C$$

III.^{a} $$\int\frac{x^{2m+1}dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\sqrt{(a^2-x^2)}\left\{\frac{x^{2m}}{2m+1}+\frac{2ma^2x^{2m-2}}{(2m+1)(2m-1)}+\dots\dots\dots\dots \frac{2m(2m-2)a^4x^{2m-4}}{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}+\dots+\frac{4.6.8\dots2ma^{2m-2}x^2}{3.5.7\dots(2m+1)}+\frac{2.4.6\dots2ma^{2m}}{3.5.7\dots(2m+1)}\right\}+C$$

IV.^{a} $$\int\frac{dx}{x^{2m+1}\sqrt{(a^2-x^2)}}=-\sqrt{(a^2-x^2)}\left\{\frac{1}{2ma^2x^{2m}}+\frac{2m-1}{2m(2m-2)a^4x^{2m-2}}+\dots \frac{(2m-1)(2m-3)}{2m(2m-2)(2m-4)a^6x^{2m-4}}+\dots+\frac{3.5.7\dots(2m-1)}{2.4.6\dots2ma^{2m}x^2}\right\}-\frac{3.5.7\dots(2m-1)}{2.4.6\dots2ma^{2m+1}}\frac{1}{\sqrt{-1}}\times\dots arc.sen\frac{a}{x}+C$$

V.^{a} $$\int\frac{x^mdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}=-\sqrt{(a-x)}\left\{\frac{x^{m-\frac{1}{2}}}{m}+\frac{a(2m-1)x^{m-\frac{3}{2}}}{2m(m-1)}+\frac{a^2(2m-1)(2m-3)x^{m-\frac{5}{2}}}{2^2m(m-1)(m-2)}+\dots+\frac{a^{m-1}(2m-1)(2m-3)\dots5.3.1x^{\frac{1}{2}}}{2^{m-1}m(m-1)(m-2)\dots4.3.2.1}\right\}+\frac{1.3.5\dots(2m-1)a^m}{2^m1.2.3\dots m}arc.sen.v.\frac{2x}{a}+C$$

VI.^{a} $$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(ax-x^2)}}=-\sqrt{(a-x)}\left\{\frac{2}{a(2m-1)x^{m-\frac{1}{2}}}+\frac{2^2(m-1)}{a^2(2m-1)(2m-3)x^{m-\frac{3}{2}}}+\frac{2^3(m-1)(m-2)}{a^3(2m-1)(2m-3)(2m-5)x^{m-\frac{5}{2}}}+\dots+\frac{2^m(m-1)(m-2)\dots4.3.2.1}{a^m(2m-1)(2m-3)\dots7.5.3.1x^{\frac{1}{2}}}\right\}+C$$

e dovran prendersi tanti termini nelle serie contenute dentro parentesi, e tanti fattori nel numeratore e denominatore del coefficiente del termine al di fuori, quante unità sono in m, e mancando il termine al di fuori se ne prenderanno $m+1$ al di dentro.

1338. Questi valori moltiplicati per $\sqrt{-1}$ daranno respettivamente, come è chiaro, quegli degli integrali 1.° $\int\frac{x^{\pm 2m}dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, 2.° $\int\frac{x^{\pm(2m+1)}dx}{\sqrt{(x^2-a^2)}}$, 3.° $\int\frac{x^{\pm m}dx}{\sqrt{(x^2-ax)}}$.

1339. Cangiata poi negli integrali 1.°, 2.° del paragrafo precedente a in $a\sqrt{-1}$, e nel 3.^{d} a in $-a$, avremo il valore degli integrali 4.° $\int\frac{x^{\pm 2m}dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, 5.° $\int\frac{x^{\pm(2m+1)}dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, 6.° $\int\frac{x^{\pm m}dx}{\sqrt{(ax+x^2)}}$.

1340. I metodi esposti guideranno pure all'integrazione dei differenziali $x^{\pm n}dx\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}$, $x^{\pm n}dx\sqrt{(\pm ax\mp x^2)}$, $x^{\pm n}dx\sqrt{(a^2+x^2)}$, $x^{\pm n}dx\sqrt{(ax+x^2)}$, che moltiplicati e divisi respettivamente per i loro fattori radicali, si riducono il 1.° a $\pm\frac{a^2x^{\pm n}dx\mp x^{2\pm n}dx}{\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}}$, il 2.° a $\pm\frac{ax^{1\pm n}dx\mp x^{2\pm n}dx}{\sqrt{(\pm ax\mp x^2)}}$, il 3.° ad $\frac{a^2x^{\pm n}dx+x^{2\pm n}dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, il 4.° ad $\frac{ax^{1\pm n}dx+x^{2\pm n}dx}{\sqrt{(ax+x^2)}}$.

1341. Vogliasi per esempio $\int dx\sqrt{(\pm a^2\mp x^2)}$. Coi segni superiori avremo $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}=\int\frac{dx(a^2-x^2)}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=a^2\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=$ (1337. I.°) $a^2 arc.sen\frac{a}{x}+\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}-\frac{a^2}{2}arc.sen\frac{x}{a}=\frac{1}{2}a^2 arc.sen\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}+C$. Coi segni inferiori avremo $\int dx\sqrt{(x^2-a^2)}=\sqrt{-1}dx\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{1}{2}a^2\sqrt{-1}.arc.sen\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{(x^2-a^2)}+C$.

1342. Qui poi torna a proposito l'osservare che gl'integrali espressi in funzioni d'archi di circolo posson comodamente trasformarsi in funzioni logaritmiche. Sia y il minimo degli archi che hanno x per seno, coseno, tang. ec. Avremo 1.° $x=sen y=sen(n\pi\pm y)$, preso il segno inferiore quando n è impari (794. 68.° 70.°). Or di qui e dalla prima formula del §. 822. si ha facilmente $\pm y=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left\{\sqrt{(1-x^2)}\pm x\sqrt{-1}\right\}$; sarà dunque in generale $arc.sen\,x=n\pi+\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left\{\sqrt{(1-x^2)}\pm x\sqrt{-1}\right\}$. 2.° $x=cos y=cos(2n\pi\pm y)$ (*ivi*. 69.°), $\pm y=\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left\{x\pm\sqrt{(x^2-1)}\right\}$, e quindi $arc.cos x=2n\pi+\frac{1}{\sqrt{-1}}\,l\left\{x\pm\sqrt{(x^2-1)}\right\}$.

3.° $x = tang y = tang(n\pi + y)$. Di quì e dalla terza delle formule del §. 822, $y = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}$, ed $arc.tang x = n\pi + \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 + x\sqrt{-1}}{1 - x\sqrt{-1}}$. 4.° $x = sen.v.y = sen.v.(2n\pi \pm y) = 1 - cos y$ (779), $cos y = 1 - x$, $sen y = \sqrt{(1 - (1 - x)^2)} = \sqrt{x(2 - x)}$, $\pm y = \frac{1}{\sqrt{-1}}\, l \left\{ 1 - x \pm \sqrt{x(x - 2)} \right\}$, ed $arc.sen.v.x = 2n\pi + \frac{1}{\sqrt{-1}} \times l \left\{ 1 - x \pm \sqrt{x(x - 2)} \right\}$.

1343. Sia proposto ora di ridurre $\int x^n dx (a + bx^m)^p$ a $\int x^r dx (a + bx^m)^q$. Fatto $x^{n+1} = z$ ed $(a + bx^m)^p = u$, la formula $\int u dz = uz - \int z du$ (1263) dà $\int x^n dx (a + bx^m)^p = \frac{x^{n+1}(a + bx^m)^p}{n+1} - \frac{bmp}{n+1} \int x^{n+m} dx (a + bx^m)^{p-1}$. Se in questa istessa espressione si scriva $n + m$, $n + 2m$, ec. per n; $p - 1$, $p - 2$, ec. per p, si avranno i valori di $\int x^{n+m} dx (a + bx^m)^{p-1}$, di $\int x^{n+2m} dx (a + bx^m)^{p-2}$, ec. e si troverà la seguente formula $\int x^n dx (a + bx^m)^p = (a + bx^m)^p \left(\frac{x^{n+1}}{1+n} - \ldots \right.$

$$\left. \frac{bmpx^m A}{(1 + n + m)(a + bx^m)} - \frac{bm(p-1)x^m B}{(1 + n + 2m)(a + bx^m)} - \ldots - \frac{bm(p - i' + 2)x^m Z}{(1 + n + m(i' - 1))(a + bx^m)} \right)$$

$$\pm \frac{b^{i'} m^{i'} p(p-1)\ldots(p - i' + 1)}{(1+n)(1 + n + m)\ldots(1 + n + m(i' - 1))} \int x^{n + i'm} dx (a + bx^m)^{p - i'},$$

ove tutto si prende come prima (1334). Ora se $p - i' = q$, o se $p - q = i'$ intero positivo, l'integrale di $x^n dx (a + bx^m)^p$ si ridurrà a $\int x^{n + i'm} dx (a + bx^m)^q$, il quale potendo ridursi a $\int x^r dx (a + bx^m)^q$ quando $n + i'm - im = r$, cioè quando $\frac{n - r}{m} = i - i'$, vi si potrà ridurre anche il dato.

Esempio. Sia da ridursi $\int x^4 dx (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}$ a $\int dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; si avrà $n = 4$, $a = 1$, $b = -1$, $m = 2$, $p = \frac{5}{2}$, $r = 0$, $q = \frac{1}{2}$, $p - q = i' = 2$. Dunque $\int x^4 dx (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} = \ldots$ $\frac{x^5 (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{5x^7 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{5.7} + \frac{5.3}{5.7} \int x^8 dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; ma (1334) $\int x^8 dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \left(- \frac{x7}{10} - \frac{7x^5}{10.8} - \frac{7.5x^3}{10.8.6} - \frac{7.5.3x}{10.8.6.4} \right) + \frac{7.5.3.1}{10.8.6.4} \int dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$; dunque

$$\int x^4 dx (1 - x^2)^{\frac{5}{2}} = \frac{x^5 (1 - x^2)^{\frac{5}{2}}}{5} + (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{x7}{10} - \frac{3x^5}{10.8} - \frac{3.5x^3}{10.8.6} - \frac{3.5.3x}{10.8.6.4} \right) + \ldots$$

$$\frac{3.5.3}{10.8.6.4} \int dx (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

1344. Se i' sia numero intero negativo si operi come sopra (1336).

Integrazione dei rotti Algebrici razionali

1345. Debba integrarsi la frazione $\frac{Pdx}{Q}$, con P, Q funzioni intere e razionali di x. Se x è in P a dimensione maggiore che in Q, si effettui la divisione di P per Q fino a che non si abbia un resto R in cui x sia a dimensione minore che in Q. Supposto q il quoziente intero, sarà $\frac{Pdx}{Q}=qdx+\frac{Rdx}{Q}$, e $\int\frac{Pdx}{Q}=\int qdx+\int\frac{Rdx}{Q}$, e come già sappiamo integrare qdx, così non resterà ad integrarsi che $\frac{Rdx}{Q}$, ricerca che coincide con quella dell'integrale di $\frac{Pdx}{Q}$, quando x sia in P a dimensione minore che in Q, il che dunque qui supporremo.

1346. Ciò premesso si decomponga la frazione $\frac{P}{Q}$ nei rotti parziali da cui deriva (1302). È chiaro che la somma dei loro prodotti per dx equivarrà a $\frac{Pdx}{Q}$, e la somma dei consecutivi integrali a $\int\frac{Pdx}{Q}$. Avremo dunque $\int\frac{Pdx}{Q}$ se sapremo ad uno ad uno integrare tutti i rotti semplici nei quali si risolve $\frac{Pdx}{Q}$; il che è in ogni caso possibile. Sappiamo infatti che queste funzioni non possono presentarsi che sotto una delle sei seguenti forme (180) $\frac{Adx}{x-a}$, (*ivi*) $\frac{Adx}{(x-a)^p}$, (181) $\frac{Azdz}{z^2+b}$, $\frac{Adz}{z^2+b}$, (*ivi*) $\frac{Azdz}{(z^2+b)^p}$, $\frac{Adz}{(z^2+b)^p}$ e in tutte il coefficiente A è costante. Ora $\int\frac{Adx}{x-a}=$ (1257) $AL(x-a)$; $\int\frac{Adx}{(x-a)^p}=A\int dx(x-a)^{-p}=$ (1259) $-\frac{A}{(p-1)(x-a)^{p-1}}$; $\int\frac{Azdz}{z^2+b}=$ (1257) $\frac{1}{2}AL(z^2+b)$; $\int\frac{Adz}{z^2+b}=$ (1261. 2.°) $\frac{A}{\sqrt{b}}arc.tang z\sqrt{\frac{1}{b}}$; $\int\frac{Azdz}{(z^2+b)^p}=A\int zdz(z^2+b)^{-p}=$ (1259) $-\frac{A}{2(p-1)(z^2+b)^{p-1}}$. Quanto poi all'integrale del rotto $\frac{Adz}{(z^2+b)^p}$ si otterrà riducendolo, mediante il metodo del §. 1343, ad $A\int\frac{dz}{z^2+b}=$ (1261. 2.°) $\frac{A}{\sqrt{b}}arc.tang z\sqrt{\frac{1}{b}}$.

Esempj. Si voglia integrare $dy=\frac{dx}{(a^2-x^2)x}$. Fo $\frac{dx}{(a^2-x^2)x}=\frac{Adx}{x}+\frac{Bdx}{a-x}+\frac{Ddx}{a+x}$, e trovo (179) $A=\frac{1}{a^2}$ $B=\frac{1}{2a^2}$, $D=-\frac{1}{2a^2}$; perciò $dy=\frac{dx}{a^2x}+\frac{dx}{2a^2(a-x)}-$

$\frac{dx}{2a^2(a+x)}$; onde $y=\frac{lx}{a^2}-\frac{l(a-x)}{2a^2}-\frac{l(a+x)}{2a^2}+\frac{lC}{a^2}=\frac{1}{a^2}\,l\,\frac{Cx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Si troverà pure $\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\,l\,\frac{C(a+x)}{a-x}$.

Sia $dy=\frac{(x^3+x^2+2)dx}{x(x-1)^2(x+1)^2}$. Decomposta la frazione in $\frac{Adx}{x}+\frac{A_1dx}{(x-1)^2}+\frac{A_2dx}{x-1}+\frac{B_1dx}{(x+1)^2}+\frac{B_2dx}{x+1}$, avremo, come si trovò (180. 1302), $A=2$, $A_1=1$, $A_2=-\frac{3}{4}$, $B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=-\frac{5}{4}$. Dunque $dy=\frac{2dx}{x}+\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{3dx}{4(x-1)}-\frac{dx}{2(x+1)^2}-\frac{5dx}{4(x+1)}$, ed $y=2lx-\frac{1}{x-1}-\frac{3}{4}l(x-1)+\frac{1}{2(x+1)}-\frac{5}{4}l(x+1)$.

Sia $dy=\frac{dx}{x(1+x)^2(1+x+x^2)}$, ove vedonsi riuniti i tre casi di Q con fattori reali eguali ed ineguali, e con fattori immaginarj (1303). Posto $x=\frac{z-1}{2}$ per togliere il fattore trinomio (181), troveremo $dy=\frac{16dz}{(z-1)(z+1)^2(z^2+3)}$. Pongasi dunque $\frac{1}{(z-1)(z+1)^2(z^2+3)}=\frac{C}{z-1}+\frac{D}{(z+1)^2}+\frac{D_1}{z+1}+\frac{Az+B}{z^2+3}$. Il metodo ordinario (179. 180) darà immediatamente $C=\frac{1}{16}$, $D=-\frac{1}{8}$. Il metodo differenziale (1302) darà in seguito $D_1=-\frac{1}{8}$; e di nuovo dal metodo ordinario mediante le formule $A=\frac{NT-MU}{T^2+U^2b}$, $B=\frac{MT+bNU}{T^2+U^2b}$, avremo A, B quando si saranno stabiliti i valori di M, N, T, U. Or poichè nel caso nostro abbiamo $P=1$, $S=(z-1)(z+1)^2$, e deve porsi $z=\pm\sqrt{3}\sqrt{-1}$, sarà secondo lo spirito del metodo $M=1$, $N=0$, $T=-4$, $U=-4$, e poichè $b=3$, avremo perciò $A=\frac{1}{16}$, $B=-\frac{1}{16}$. Da tutto ciò risulterà dunque $dy=\frac{dz}{z-1}-\frac{2dz}{(z+1)^2}-\frac{2dz}{z+1}+\frac{(z-1)dz}{z^2+3}$; e integrando, $y=l\frac{(z-1)\sqrt{(z^2+3)}}{(z+1)^2}+\frac{2}{z+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc.tang\,\frac{z}{\sqrt{3}}+Cost.=\ldots\ldots\, l\frac{x\sqrt{(x^2+x+1)}}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{\sqrt{3}}\,arc.tang\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$

1347. Dunque ogni differenziale frazionario e razionale s' integra o algebricamente, o per logaritmi, o per archi di circolo. La difficoltà consiste nel trovare i fattori di Q, difetto piuttosto dell' Algebra che del metodo d' integrazione. Notiamo alcuni casi in cui oltre quelli già contemplati in principio (1260), l' integrazione di un rotto irrazionale può ridursi a quella di un rotto razionale.

I°. Sia $dy=\frac{Xdx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$, ove X è una funzione razionale di x. Se c è positivo, si ponga $\frac{a}{c}=\alpha$, $\frac{b}{c}=\beta$, $c=\varkappa^2$, e $\sqrt{(\alpha+\beta x+x^2)}=x+z$. Avremo $x=\ldots$ $\frac{\alpha-z^2}{2z-\beta}$, $\sqrt{(a+bx+cx^2)}=\varkappa\sqrt{(\alpha+\beta x+x^2)}=\varkappa(x+z)=\varkappa\frac{\alpha-\beta z+z^2}{2z-\beta}$, $dx=-\ldots$ $\frac{2dz(\alpha-\beta z+z^2)}{(2z-\beta)^2}$, valori che sostituiti in dy cangeranno questo differenziale in un altro della forma Zdz, ove Z sarà una funzione razionale di z. Se c è negativo, nel qual caso $\varkappa$ sarebbe immaginario e Z irrazionale, sieno $x-h$, $x-h'$ i fattori reali di primo grado in cui potrà sempre decomporsi il trinomio $x^2-\beta x-\alpha$, e si ponga $h'-x=(x-h)z^2$. Sarà $x=\frac{hz^2+h'}{z^2+1}$, $dx=\frac{2zdz(h-h')}{(z^2+1)^2}$, $\sqrt{(a+bx-cx^2)}=\varkappa\sqrt{(x^2-\beta x-\alpha)}=\varkappa z(x-h)$, valori che come i precedenti cangeranno dy nella funzione razionale Zdz. Così se $X=1$, operando, troveremo nel primo caso $dy=\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=-\frac{2dz}{\varkappa(2z-\beta)}$, ed $y=-\frac{1}{\varkappa}l(2z-\beta)=-\frac{1}{\sqrt{c}}l(-\frac{b}{c}-2x+2\sqrt{\frac{a+bx+cx^2}{c}})+Cost.$; e nel secondo $dy=\frac{dx}{\sqrt{(a+bx-cx^2)}}=-\frac{2dz}{\varkappa(z^2+1)}$, ed $y=(1261.2°)-\frac{2}{\varkappa}arc.tang z=-\frac{2}{\sqrt{c}}arc.tang\sqrt{\frac{h'-x}{x-h}}+Cost.$

Parimente se $dy=\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}=\frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)}}$, e quindi $X=\frac{1}{1+x^2}$, $a=1$, $b=0$, $c=1$, avremo la trasformata $dy=-\frac{4zdz}{(1+z^2)^2}$, d' onde $y=\frac{2}{1+z^2}=\frac{1}{1+x^2-x\sqrt{(1+x^2)}}+C$, ovvero cambiando, come sempre è permesso, C in $C-1$ e riducendo, $y=\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)}}+C$, valore che direttamente si sarebbe incontrato, se senza far caso del metodo attuale, si fosse posto $x^2=\frac{1}{z-1}$ secondo il metodo altrove accennato (1260.3°). Si apprende intanto nuovamente di quì, che gli integrali ottenuti con metodi differenti possono diversificare in infiniti modi tra loro (1254); ma il divario non dipenderà che dalla differenza delle costanti.

Infine se $dy=\frac{dx}{(a+bx)\sqrt{(1-x^2)}}$, sarà c negativo, e poichè per x^2-1 abbiamo $h=-1$, $h'=1$, dovremo porre $x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$; dal che si avrà $y=-\ldots$ $\int\frac{2dz}{a+b+(a-b)z^2}=(1233.3°)-\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.tang z\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}=-\frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}arc.$ ✕

$tang\sqrt{\frac{(1-x)(a-b)}{(1+x)(a+b)}}=(1342)-\frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\,l\frac{\sqrt{(b^2-a^2)(1+x)}+(b-a)\sqrt{(1-x)}}{\sqrt{(b^2-a^2)(1+x)}-(b-a)\sqrt{(1-x)}}$

II°. Sia adesso $dy=\frac{dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}}$. Pongo $\frac{1}{x}\sqrt[2m]{(2x^m-1)}=u$; ed ho

$\frac{(1-x^m)^2}{x^{2m}}=1-u^{2m}$; $\frac{dx(1-x^m)}{x^{2m+1}}=u^{2m-1}du$. Di quì $\frac{dx}{x(1-x^m)}=\frac{u^{2m-1}du}{1-u^{2m}}$;

d' onde infine $dy=\frac{u^{2m-2}du}{1-u^{2m}}$ razionale.

III°. Sia infine $dy=\frac{x^{m-1}dx}{(1-x^m)\sqrt[2m]{(2x^m-1)}}$. Pongo $\sqrt[2m]{(2x^m-1)}=u$, ed ho

$1-x^m=\frac{1}{2}(1-u^{2m})$; $x^{m-1}dx=u^{2m-1}du$, e $dy=\frac{2u^{2m-2}du}{1-u^{2m}}$.

Metodi d' integrare per Serie

1348. Quando un differenziale non ammette integrazione esatta, si ricorre alle approssimazioni, e le serie sono allora l' ultimo compenso. Infatti riducendo in serie una funzione X della variabile x, si ha un seguito di termini monomj, i cui integrali riuniti danno un valore approssimato di $\int Xdx$. Per esempio, $\frac{dx}{a+x}=$ $\frac{dx}{a}-\frac{xdx}{a^2}+\frac{x^2dx}{a^3}-$ec.; dunque $\int\frac{dx}{a+x}=\frac{x}{a}-\frac{x^2}{2a^2}+\frac{x^3}{3a^3}-$ec. $+lC=$ (455) $l(1+\frac{x}{a})+lC=l\frac{C}{a}(a+x)=lC(a+x)$.

Così si ha $dy=\frac{dx}{1+x^2}=dx-x^2dx+x^4dx-x^6dx+$ec.; ed $y=x-\frac{x^3}{3}+\ldots$ $\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$ec. $=arc.tang x$ (822.1232.3°).

Così $dy=\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}=dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=dx(1+\frac{x^2}{2}+\frac{1.3x^4}{2.4}+\frac{1.3.5x^6}{2.4.6}+$ec.) (429); ed $y=x+\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}+$ec. $=arc.sen x$ (823.1232.1°).

1349. Bastino questi esempj; ma il seguente *Metodo d' integrar per parti* dà delle serie più convergenti.

La formula $d(Xx)=Xdx+xdX$ dà $\int Xdx=Xx-\int xdX$ (1263.2°). Sia $dX=$ $X'dx$; dunque $\int xdX=\int X'xdx$; e fatto $xdx=dz$, onde $\frac{x^2}{2}=z$, sarà $\int X'dz=$..

$X'z-\int zdX'=\frac{1}{3}(X'x^3-\int x^3 dX')$. Sia $dX'=X''dx$; dunque $\int x^3 dX'=\int X''x^3dx$, e fatto $x^2 dx=dz$, onde $\frac{x^3}{3}=z$, sarà $\int X''dz=X''z-\int zdX''=\frac{1}{3}(X''x^3-\int x^3dX'')$, ec. Sostituendo questi valori nella prima espressione si troverà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2}{2}X'+\frac{x^3}{2.3}X''-\frac{x^4}{2.3.4}X'''+\frac{x^5}{2.3.4.5}X^{\text{IV}}-$ec., ovvero supposta dx costante, onde $\frac{dX}{dx}=X'$, $\frac{ddX}{dx}=dX'$, $\frac{dX'}{dx}=X''=\frac{ddX}{dx^2}$, ec., si avrà $\int Xdx=Xx-\frac{x^2dX}{2.dx}+\frac{x^3ddX}{2.3dx^2}-\frac{x^4dddX}{2.3.4dx^3}+$ ec.

1350. Sia per esempio $X=m(a+x)^{m-1}$, onde $\frac{dX}{dx}=m(m-1)(a+x)^{m-2}$, $\frac{ddX}{dx^2}=m(m-1)(m-2)(a+x)^{m-3}$, ec. Dunque $\int Xdx=$ (1259) $(a+x)^m=C+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ ec. Fatto $x=0$, verrà $C=a^m$, ed $(a+x)^m=a^m+mx(a+x)^{m-1}-\frac{1}{2}m(m-1)x^2(a+x)^{m-2}+$ec.

1351. Sia $X=a^xla$; sarà $\frac{dX}{dx}=a^xl^2a$, $\frac{ddX}{dx^2}=a^xl^3a$, ec., il che dà $\int Xdx=$.. (1258) $a^x=C+a^xxla(1-\frac{1}{2}xla+\frac{1}{2.3}x^2l^2a-$ec.). Sia $x=0$, si avrà $C=1$, ed $a^x=1+a^xxla(1-\frac{1}{2}xla+$ec.); dividendo per a^x, verrà $1=a^{-x}+xla(1-\frac{1}{2}xla+$ ec.). Dunque $a^{-x}=1-xla(1-\frac{1}{2}xla+$ec.), e cangiata $-x$ in x, $a^x=1+xla+\frac{x^2l^2a}{2}$ +ec. (461).

Integrazione delle funzioni Differenziali Logaritmiche ed Esponenziali

1352. Vogliasi $\int Xdxl^nx$. Posto $lx=y$, e successivamente $Xdx=dz$, $zdy=du$, $udy=dt$, $tdy=ds$, ec., l' integrazione per parti (1349) dà $\int Xdxl^nx=y^nz-ny^{n-1}u+n(n-1)y^{n-2}t-n(n-1)(n-2)y^{n-3}s+$ec.$=l^nx\int Xdx-nl^{n-1}x\times\int\frac{dx}{x}\int Xdx+n(n-1)l^{n-2}x\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\int Xdx-n(n-1)(n-2)l^{n-3}x\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\times\int\frac{dx}{x}\int Xdx+$ec. Così se $n=3$, $X=x^4$, verrà $\int Xdx=\frac{x^5}{5}$, $\int\frac{dx}{x}\int Xdx=\frac{x^5}{5^2}$, ec., e $\int x^4dxl^3x=\frac{x^5}{5}(l^3x-\frac{3l^2x}{5}+\frac{6lx}{5^2}-\frac{6}{5^3})+C$. (1252.VI°)

1353. Se n sia negativa, fatto $lx=y$, e successivamente $d(Xx)=X'dx$, $d(X'x)=X''dx$, ec., verrà $dx=xdy$, e con lo stesso metodo si avrà $\int\frac{Xdx}{l^nx}=\int\frac{Xxdy}{y^n}$

$=-\frac{x}{(n-1)l^{n-1}x}\left\{X+\frac{X'lx}{n-2}+\frac{X''l^2x}{(n-2)(n-3)}+\text{ec.}\right\}+\frac{1}{(n-1)(n-2)\ldots2.1}\times$

$\int\frac{X^{(n-1)}dx}{lx}$. Così se $n=3$ ed $X=2x(lx-1)$, si ha $X'=2x(2lx-1)$, $X''=8xlx$, e $\int\frac{2xdx(lx-1)}{l^3x}=\frac{-x}{2l^2x}\left\{(2xlx-2x+2xlx(2lx-1)\right\}+\frac{1}{2}\int\frac{8xdxlx}{lx}=\frac{x^2}{l^2x}+C.$

1354. Debba ora integrarsi $a^{mx}Xdx$. Posto $a^{mx}dx=dz$, onde $\frac{a^{mx}}{mla}=z$ (1258), e fatto successivamente $dX=X'dx$, $dX'=X''dx$, ec., verrà col metodo stesso, $\int a^{mx}Xdx=\frac{a^{mx}}{mla}\left\{X-\frac{X'}{mla}+\frac{X''}{m^2l^2a}-\ldots\pm\frac{X^{(n)}}{m^nl^na},\right\}$ ove il segno di sopra è per n pari, ed n è determinata da $X^n=Costante$. Così se $m=3$, ed $X=3x^2(xla+1)$, si ha $X'=3x(3xla+2)$, $X''=6(3xla+1)$, $X'''=18la=C$, onde $n=3$, e $\int3a^{3x}x^2dx(xla+1)=\frac{a^{3x}}{3la}(3x^2(xla+1)-\frac{3x(3xla+2)}{3la}+\frac{6(3xla+1)}{9l^2a}-\frac{18la}{27l^3a})$ $=a^{3x}x^3+C.$

1355. Dunque $\int e^{mx}Xdx=\frac{e^{mx}}{m}\left\{X-\frac{X'}{m}+\ldots\pm\frac{X^{(n)}}{m^n}\right\}$. Così con $m=2$, ed $X=2(a-x)(a-x-1)$, verrà $X'=2(2x-2a+1)$, $X''=4=C$, onde $n=2$, e $\int2e^{2x}(a-x)(a-x-1)dx=\frac{e^{2x}}{2}(2(a-x)(a-x-1)-2x+2a)=e^{2x}(a-x)^2+C.$

1356. Per aver l' integrale di $\frac{a^x dx}{X}$ porremo il valore di a^x (1351), ed avremo $\int\frac{a^x dx}{X}=\int\frac{dx}{X}+la\int\frac{xdx}{X}+\frac{1}{2}l^2a\int\frac{x^2dx}{X}+\text{ec.}$ Di qui $\int\frac{e^x dx}{x}=C+lx+x+\frac{x^2}{4}+\text{ec.}$; e se $e^x=z$, si avrà $\int\frac{dz}{lz}=C+llz+lz+\frac{l^2z}{2.2}+\frac{l^3z}{3.2.3}+\text{ec.}$; e poichè $\int\frac{dz}{zlz}=llz$ (1225)$=y$, sarà $\int\frac{dz}{lz}=\int z.\frac{dz}{zlz}=\int zdy=zy-\int ydz=zllz-\int llzdz$, e $\int llzdz=zllz-\int\frac{dz}{lz}=zllz-C-llz-lz-\text{ec.}$

Integrazione delle funzioni differenziali, ove entrano Seni, Coseni, ec.

1357. Poichè $\int dx\cos x=\text{sen}\,x$, e $\int dx\,\text{sen}\,x=-\cos x$, sarà $\int dy\cos ny=\frac{\text{sen}\,ny}{n}$, e $\int dy\,\text{sen}\,ny=-\frac{\cos ny}{n}$, $\int dz\cos z\,\text{sen}^n z=\frac{\text{sen}^{n+1}z}{n+1}$, e $\int dz\,\text{sen}\,z\cos^n z=-$ . . .

$\frac{cos^{n+1}z}{n+1}$. Similmente $\int dy\, sen\, y\, cos\, ay = (795)\, \frac{1}{2}\int dy\, sen\,(a+1)y - \frac{1}{2}\int dy \times \ldots$ $sen(a-1)y = -\frac{cos(a+1)y}{2(a+1)} + \frac{cos(a-1)y}{2(a-1)}$. Sarebbe lo stesso per $dx\, sen\, x\, sen\, ax$, $dx\, cos\, x\, cos\, ax$, ec., e si tratterebbe colla stessa facilità $dx\, sen\, x\, sen\, ax\, cos\, bx$, ec., riducendo questi prodotti a seni o coseni semplici.

1358. Vogliasi $\int dx\, sen^n x$. Fatto $sen\, x = y$, onde $dx = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, sarà $\int dx \times sen^n x = \int \frac{y^n dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, che s'integrerà al solito (1335); dopo di che non resterà che restituire il valor di y. Così troveremo $\int dx\, sen^6 x = C - \frac{cos x}{6}(sen^5 x + \frac{5}{4} \times \ldots sen^3 x + \frac{5.3}{4.2} sen x) + \frac{5.3.1}{6.4.2} x$; e $\int dx\, sen^5 x = C - \frac{cos x}{5}(sen^4 x + \frac{4 sen^2 x}{3} + \frac{4.2}{3})$. Nel modo stesso potrà ottenersi $\int dx\, cos^n x$, ponendo $cos x = y$, il che dà $\int dx\, cos^n x = -\int \frac{y^n dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Facendo $x = 90^\circ - y$, e per conseguenza $dx = -dy$, $sen x = cos y$, $cos x = sen y$, avremo il valor di $\int dy\, cos^n y$; e si troverà per esempio $\int dy\, cos^6 y = C + \frac{1}{6} sen y (cos^5 y + \frac{5}{4} cos^3 y + \frac{5.3}{4.2} cos y) + \frac{5.3.1}{6.4.2} y$; e $\int dy\, cos^5 y = C + \frac{sen y}{5} \times (cos^4 y + \frac{4}{3} cos^2 y + \frac{4.2}{3})$. (1252.VII)

1359. Vogliasi anche $\int dy\, sen^m y\, cos^n y$. Fo $cos y = x$, ed ho $\int dy\, sen^m y \times cos^n y = -\int x^n dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}}$, che riduco (1334) o a $-\int dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \int dy\, sen^m y$ se n è pari, o a $-\int x dx (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} = \frac{sen^{m+1} y}{m+1}$ se n è impari, e restituiti i valori, ho $\int dy\, sen^m y\, cos^n y = C + \frac{sen^{m+1} y}{m+n} \left\{ cos^{n-1} y + \ldots \right.$ $\left. \frac{(n-1) cos^{n-3} y}{m+n-2} + \frac{(n-1)(n-3) cos^{n-5} y}{(m+n-2)(m+n-4)} + \text{ec.} \right\} + \frac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+2)} \times$ $\int dy\, sen^m y$ se n è pari, e se è impari $+ \frac{(n-1)(n-3)\ldots 2 sen^{m+1} y}{(m+n)(m+n-2)\ldots(m+3)}$. Così $\int dy \times cos^3 y\, sen^5 y = C + \frac{1}{6} sen^6 y (cos^2 y + \frac{1}{3}) = C + \frac{1}{8} sen^6 y (\frac{4}{3} - sen^2 y)$

1360. Consideriamo ora i rotti, nei quali entrano seni, ec.; 1°. $\int \frac{dy}{sen y} = \ldots$ $\int \frac{dy}{2 sen \frac{1}{2} y\, cos \frac{1}{2} y}$ (791.46^a) $= \int \frac{\frac{1}{2} dy}{cos^2 \frac{1}{2} y\, tang \frac{1}{2} y} = l tang \frac{1}{2} y$ (1231.1225). Fatto $y = 90^\circ - z$, avremo 2°. $\int \frac{dz}{cos z} = -l tang(45^\circ - \frac{1}{2} z) = -l cot(45^\circ + \frac{1}{2} z)$ (793.7°)

$= l\,tang(45^\circ + \frac{1}{2}z)$; 3°. $\int \frac{dy\cos y}{sen\,y} = \int \frac{d(sen\,y)}{sen\,y} = l\,sen\,y = \int dy \cot y$; 4°. $\int \frac{dy\,sen\,y}{\cos y}$ $= \int \frac{-d(\cos y)}{\cos y} = -l\cos y = l\sec y = \int dy\,tang\,y$; ec.

1361. Se cerchisi $\int \frac{dy}{sen^m y}$, fo $sen\,y = x$, ed ottengo $\int \frac{dy}{sen^m y} = \int \frac{dx}{x^m \sqrt{(1-x^2)}}$ che le formule del num°. 1337 sempre integreranno. Nel modo medesimo facendo $\cos y = x$ integreremo $\int \frac{dy}{\cos^m y}$. Dopo ciò sarà facile integrare $\frac{dy\cos^m y}{sen^n y}$, poichè se $m = 2k+1$, si ha $\frac{dy\cos^{2k+1} y}{sen^n y} = \frac{d(sen\,y)}{sen^n y}(1 - sen^2 y)^k$, che, fatto $sen\,y = z$, diventa $z^{-n} dz (1-z^2)^k$ integrabile (1260.1°), giacchè qui k è un numero intero e positivo. Se $m = 2k$, allora $\frac{dy\cos^{2k} y}{sen^n y} = \frac{dy(1-sen^2 y)^k}{sen^n y}$, espressione che sviluppata s'integrerà per mezzo della formula $\int \frac{dy}{sen^m y}$. Lo stesso sarebbe per $\int \frac{dy\,sen^m y}{\cos^n y}$.

1362. Sia $dz = \frac{dy}{a + b\cos y}$. Posto $\cos y = x$, ho $dy = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, e $z = -\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{(1-x^2)}} = (1347)\, \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\, arc.\,tang \sqrt{\frac{(1-x)(a-b)}{(1+x)(a+b)}}$. Or poichè in generale $arc.tang\,p = (787.14^a)\; arc.\cos \frac{1}{\sqrt{(1+p^2)}}$, avremo dunque altresì $z = \frac{2}{\sqrt{(a^2-b^2)}} arc.\cos \sqrt{\frac{(1+x)(a+b)}{2(a+bx)}}$. Fatto perciò $a^2 - b^2 = m^2$, sarà $\sqrt{\frac{(1+x)(a+b)}{2(a+bx)}} = \cos \frac{1}{2} mz = (797.91^a) \sqrt{\frac{1+\cos mz}{2}}$. Di qui $\cos mz = \frac{ax+b}{a+bx}$, e $z = \frac{1}{m} arc.\cos \times \ldots \frac{ax+b}{a+bx}$, cioè $\int \frac{dy}{a+b\cos y} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}} . arc.\cos \frac{a\cos y + b}{a + b\cos y}$, espressione osservabile.

Integrali definiti

1363. I metodi fin qui indicati per ottenere il valore esatto o approssimato dell' integrale $y = \int X dx$, mentre danno questo valore in termini finiti, lo lasciano per altro indeterminato, sia per motivo della costante arbitraria che indispensabilmente ne deve far parte (1254), sia perchè la variabile x non vi ha essa medesima alcun valore assegnato. Non così accade se in luogo dell' integrale preso in tutta l' estensione di cui è capace, se ne cerchi una semplice porzione chiusa fra limiti fissi e prescritti, come sarebbe da $x = a$ fino ad $x = b$. Infatti se P', P'' sieno i valori respettivi e particolari di $\int X dx$ quando vi si pone $x = a$, $x = b$, saranno $y' = P' + C$, $y'' = P'' + C$ quelli di y da $x = 0$ fino ad $x = a$, e da $x = 0$ fino ad $x = b$, ed $y'' - y' = P'' - P'$ quello della sola parte compresa fra $x = a$, ed $x = b$, espressione

che più non contiene l'arbitraria C, sparita in forza della sottrazione, e che è composta da P'', P' funzioni non più di x ma l'una di b l'altra di a. Così se per esempio vogliamo il valore di $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = arc.sen x + C$, preso da $x=\frac{1}{2}$ fino ad $x=1$, poichè con $x=\frac{1}{2}$ si ha $arc.sen x = arc.sen \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\pi$ (781.2°), e con $x=1$ si ha $arc.sen x = arc.sen 1 = \frac{1}{2}\pi$, avremo $P' = \frac{1}{6}\pi$, $P'' = \frac{1}{2}\pi$, e $P'' - P' = \frac{1}{3}\pi$, che sarà dunque il valore dell'integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ preso da $x=\frac{1}{2}$ fino ad $x=1$. In egual modo troveremo che l'integrale $\int \frac{dx}{1+x} = lC(1+x)$ (1259), preso da $x=0$ fino ad $x=1$, ha per valore il logaritmo iperbolico di 2 (1225). Ora a questi integrali compresi tra i limiti risultanti da due valori attribuiti alla variabile, si dà il nome d' *integrali definiti*, lasciandosi l'altro d' *integrali indefiniti* a quelli pei quali questa restrizione non abbia luogo; ed è chiaro che mentre gli ultimi hanno un valore indeterminato, i primi lo avranno sempre determinato e costante.

1364. La parte d'Analisi relativa a questo genere d'integrali è così feconda, che la piena collezione delle memorie già scritte in proposito dei medesimi si estenderebbe a molti volumi. Le più delle indagini vertono intorno al modo di assegnarne il valore, specialmente qualora quello dei correlativi integrali indefiniti non si conosca; come pure circa le singolari relazioni che risultano dai loro prodotti e dai loro quozienti; oltre l'uso prezioso che poi se ne fa nella soluzione di molte equazioni differenziali, nella dottrina delle serie, e nel rendere più che sia possibile prossimi al vero i valori degli integrali indefiniti, incapaci di essere espressi sotto forma finita e completa. Tutto ciò non avendo alcun rapporto immediato e necessario con quel poco che abbiamo in animo di soggiungere per dar fine a questi elementi, ci asterremo perciò dall'internarci maggiormente sul presente soggetto, avuto anche riguardo alla sua sublimità non compatibile con la natura di un'opera unicamente consacrata ad uno studio primordiale. Ci limiteremo adunque a darne i tre seguenti piccoli saggi.

I°. Vogliasi il prodotto dei due integrali $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$, $\int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^4)}}$ presi da $z=0$ fino a $z=1$. Le formule del num°. 1335 danno fra i limiti $x=0$, $x=1$, . . .

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3.5....(2r-1)}{2.4.6....2r} \times \frac{\pi}{2}, \quad \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2.4.6....2r}{3.5...(2r+1)}.$$

Dunque

$$\int \frac{x^{2r} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \cdot \int \frac{x^{2r+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{\pi}{2(2r+1)}.$$

Or si cangi x in z^2, e si ponga $r = -\frac{1}{4}$: avremo $\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^4)}} \cdot \int \frac{z^2 dz}{\sqrt{(1-z^4)}} = \frac{\pi}{4}$, valore richiesto, perchè in forza dell'equazione $z^2 = x$, ben si vede che z ha quì gli stessi limiti che ha x nel prodotto generico precedente, cioè 0 ed 1, come esige la proposta condizione. Abbiamo quì

dunque un esempio di un prodotto noto e finito proveniente da due fattori, niuno dei quali preso separatamente sarebbe integrabile.

II°. Vogliasi il valore dell'integrale $\int e^{-t^2}dt$, preso da $t=0$ fino a $t=\infty$. Si ponga $x=e^{-qt^2}$ nel prodotto generico di cui abbiamo fatt' uso di sopra; troveremo $4q^2\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-2qrt^2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}\cdot\int\frac{tdte^{-qt^2}.e^{-q(2r+1)t^2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}=\frac{\pi}{2(2r+1)}$, valore che avrà luogo da $t=0$ limite corrispondente a quello di $x=1$, fino a $t=\infty$ limite corrispondente ad $x=0$. Determiniamo frattanto le due arbitrarie q ed r per mezzo delle due equazioni 1ª. $q(2r+1)=1$, 2ª. $q=0$. La 1ª. darà $4q^2\int\frac{tdte^{-t^2}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}\times$ $\int\frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{(1-e^{-2qt^2})}}=\frac{1}{2}q\pi$; ovvero dividendo l' equazione intera per q, e quindi i due radicali per $2q$, $2\int\frac{tdte^{-t^2}}{\sqrt{\left(\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}\right)}}\cdot\int\frac{tdte^{-t^2(1+q)}}{\sqrt{\left(\frac{1-e^{-2qt^2}}{2q}\right)}}=\frac{\pi}{2}$. La 2ª. ridurrà le quantità sotto il segno radicale a $\frac{0}{0}=t^2$ (1297). Avremo dunque $2\int dte^{-t^2}.\int dte^{-t^2}=\frac{\pi}{2}=2(\int dte^{-t^2})^2$; d'onde infine $\int dte^{-t^2}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, ed il segno inferiore corrisponderà al limite $t=-\infty$.

III°. Sia $dy=dx\varphi x$, e si cerchi il valore approssimato dell'integrale $y=\int dx\varphi x$ da $x=a$ fino ad $x=a+m$, supponendo che già si conoscano i valori $A,B,C,E,..M$ di φx, dati da $x=a,=a+b,=a+c,=a+d,...=a+m$. Avremo prima di tutto (1363) $y=\int dx\varphi(a+m)-\int dx\varphi a$, ovvero poichè $x=a$ rende $dx=da$, $y=\int da\varphi(a+m)-\int da\varphi a$. Applicato il Teorema di Taylor (1281) allo sviluppo di $\int da\varphi(a+m)$, e fatto per comodo $da=1$, e rammentandoci che φx deve in ipotesi cangiarsi in A quando vi si pone $x=a$, e perciò $\varphi a=A$, troveremo

I°. $y=mA+\frac{m^2}{2}dA+\frac{m^3}{2.3}d^2A+\frac{m^4}{2.3.4}d^3A+$ ec. Avremo inoltre

$$B=\varphi(a+b)=A+bdA+\frac{b^2}{2}d^2A+\frac{b^3}{2.3}d^3A+\frac{b^4}{2.3.4}d^4A+\text{ec.}$$

$$C=\varphi(a+c)=A+cdA+\frac{c^2}{2}d^2A+\frac{c^3}{2.3}d^3A+\frac{c^4}{2.3.4}d^4A+\text{ec.}$$

$$E=\varphi(a+e)=A+edA+\frac{e^2}{2}d^2A+\frac{e^3}{2.3}d^3A+\frac{e^4}{2.3.4}d^4A+\text{ec.}$$

. . . .

$$M=\varphi(a+m)=A+mdA+\frac{m^2}{2}d^2A+\frac{m^3}{2.3}d^3A+\frac{m^4}{2.3.4}d^4A+\text{ec.}$$

Si ponga adesso II°. $y=Az+Bz_1+Cz_2+Ez_3+$ ec. $+Mz_m$. Se in questa

s' introducano i precedenti valori di B,C,E, ec. e quindi si confronti con la I^a. ciò che allora diverrà la II^a, otterremo l' equazioni

$$1^a.\ z+z_1+z_2+z_3+\text{ec.}=m; \qquad 2^a.\ bz_1+cz_2+ez_3+\text{ec.}=\tfrac{1}{2}m^2$$

$$3^a.\ b^2z_1+c^2z_2+e^2z_3+\text{ec.}=\frac{1}{3}m^3 \qquad 4^a.\ b^3z_1+c^3z_2+e^3z_3+\text{ec.}=\frac{1}{4}m^4,\ \text{ec.}$$

eguali in numero ai valori noti A,B,C, ec. di φx, e che serviranno a determinare altrettante delle quantità incognite z,z_1,z_2,z_3,ec., le quali sostituite quindi nella II^a., daranno quello di y tanto più esatto, quanti più saranno i suddetti noti valori di φx. Così se questi non sieno che due, cioè A, B, sarà $B=M$, $a+b=a+m$, quindi $b=m$; e per determinare y avremo le due sole equazioni $z+z_1=m$, $z_1=\frac{1}{2}m$, dalle quali traendosi $z=\frac{1}{2}m=z_1$, la II^a. dunque darà $y=\frac{1}{2}m(\varphi a+\varphi(a+m))$.

Che se si conoscano A, B, C, sarà $C=M$, $a+c=a+m$, e $c=m$; e qualora per maggior semplicità vogliasi supporre che x cresca di eguali intervalli, ed abbiasi perciò $a+b=a+\frac{1}{2}m$, e $b=\frac{1}{2}m$, potremo determinare z, z_1, z_2 per mezzo delle tre equazioni $z+z_1+z_2=m$, $\frac{1}{2}mz_1+mz_2=\frac{1}{2}m^2$, $\frac{1}{4}m^2z_1+m^2z_2=\frac{1}{3}m^3$ che daranno $z=\frac{1}{6}m$, $z_1=\frac{2}{3}m$, $z_2=\frac{1}{6}m$; e poichè $b=\frac{1}{2}m$, $c=m$ rendono $B=\varphi(a+\frac{1}{2}m)$, $C=\varphi(a+m)$, dunque $y=\dfrac{1}{6}m\left\{\varphi a+4\varphi(a+\frac{1}{2}m)+\varphi(a+m)\right\}$.

Parimente se si conoscano A,B,C,E, e quindi sia $a+e=a+m$, $e=m$, ed $E=\varphi(a+m)$, e si continui a supporre eguali gli aumenti di x, il che darebbe $b=\frac{1}{3}m$, $c=\frac{2}{3}m$, $B=\varphi(a+\frac{1}{3}m)$, $C=\varphi(a+\frac{2}{3}m)$, troveremo $y=\frac{1}{8}m\left\{\varphi a+3\varphi(a+\frac{1}{3}m)+3\varphi(a+\frac{2}{3}m)+\varphi(a+m)\right\}$; come in egual modo troveremo $y=\dfrac{m}{90}\left\{7\varphi a+32\varphi(a+\frac{1}{4}m)+12\varphi(a+\frac{1}{2}m)+32\varphi(a+\frac{3}{4}m)+7\varphi(a+m)\right\}$ se si conoscano A,B,C,E,F; ec.

1365 Questi successivi e sempre più approssimati valori di y conosciuti tra gli Analisti sotto il nome di *formule di Cotes*, sono d' un uso vantaggiosissimo nelle Matematiche applicate e specialmente nell'Astronomia. Per farne una facile applicazione sia $y=\int\dfrac{dx}{1+x}$, e vogliasi il valore approssimato di y da $x=0$ fino a $x=1$, che come sappiamo (1363) corrisponde al logaritmo iperbolico di 2, ossia a 0,69315 ec. Avremo $a=0$, $a+m=1$, e quindi $m=1$. Sarà inoltre $\varphi x=\dfrac{1}{1+x}$, e fatto successivamente $x=a=0$, $=a+m=1$, $=a+\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}$, $=a+\frac{1}{3}m=\frac{1}{3}$, ec., avremo $\varphi a=1$, $\varphi(a+m)=\frac{1}{2}$, $\varphi(a+\frac{1}{2}m)=\frac{2}{3}$, $\varphi(a+\frac{1}{3}m)=\frac{3}{4}$, ec; quindi le formule superiori daranno una dopo l'altra le seguenti approssimazioni: $y=0,75$, $y=0,694$, $y=0,6937$, $y=0,69317$, l'ultima delle quali non differisce dal vero che di circa due centomillesimi.

Condizioni d'integrabilità per le funzioni differenziali di qualunque ordine, e con qualunque numero di variabili; ed integrazione di quelle che vi soddisfanno

1366. Il differenziale Xdx di primo ordine, e in cui X sia funzione della sola x, potendosi o esattamente o per approssimazione decomporre in termini della forma $px^m dx$, è nell'uno o nell'altro modo sempre integrabile. Anzi, se dx sia costante, con gli stessi due metodi integreremo ancora Xdx^n. Infatti posto $\int Xdx = y + C$, sarà $dx\int Xdx =$ (1256) $\int Xdx^2 = ydx + Cdx$, e nuovamente integrando, $\int\int Xdx^2 = \int ydx + Cx + C'$. Del pari $dx\int\int Xdx^2 = \int\int Xdx^3 = dx \times \int ydx + Cxdx + C'dx$, e $\int\int\int Xdx^3 = \int dx \int ydx + Cx^2 + C'x + C''$, ec. Così, se $X = x^m$, avremo $y = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $\int ydx = \frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$, $\int dx \int ydx = \dots\dots$ $\frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)}$, e $\int\int\int x^m dx^3 = \frac{x^{m+3}}{(m+1)(m+2)(m+3)} + Cx^2 + C'x + C''$.

1367. Ma se dx non sia costante, o X sia funzione di più variabili, poichè allora i differenziali superiori al prim' ordine nel primo caso, e quelli di qualunque ordine nel secondo risultano da più termini legati fra di loro con rapporti dipendenti dalle leggi della differenziazione, non ogni espressione di tal genere a capriccio composta, rappresenterà differenziali esatti ed integrabili, ma quelle sole le quali risponderanno a determinate condizioni, che preme di stabilire.

1368. E prima di tutto in ogni termine d'un differenziale dell'ordine n le dimensioni formate dai differenziali delle variabili dovranno esser tutte del grado n, considerate $d^n x$, $d^n y$, ec. come dell' ordine stesso di dx^n, dy^n, ec. (1246). Infatti sia $u = \varphi(x, y)$: sarà $du = Adx + Bdy$ (1238), ove A, B non essendo che funzioni finite di x, y (*ivi*), i due termini non contengon dunque i differenziali dx, dy che alla prima dimensione. Sarà inoltre $d^2 u = Ad^2 x + dxdA + Bd^2 y + dydB$; ove il primo e terzo termine non contengono che $d^2 x$, $d^2 y$ differenziali di second' ordine e quindi della seconda dimensione; e negli altri due tanto dA, che dB come differenziali primi di funzioni finite di x, y, non contengono che dx, dy alla prima dimensione, dal cui prodotto per dx, dy risultano le dimensioni seconde dx^2, $dxdy$, dy^2. E così potremo ragionare rapporto a $d^3 u$, $d^4 u$, ec.

1369. Inoltre se $n = 1$, già sappiamo (1250.2°) che $d\varphi = Adx + Bdy + Cdz +$ ec. non può essere differenziale esatto, qualora non abbiasi $\left(\frac{dA}{dy}\right) = \left(\frac{dB}{dx}\right)$, ... $\left(\frac{dA}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dz}\right) = \left(\frac{dC}{dy}\right)$, ec. Verificandosi queste condizioni il differenziale potrà integrarsi con la regola nota (1262). Sia per esempio $d\varphi = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$

Avremo $A=\frac{y}{x^2+y^2}$, $B=\frac{-x}{x^2+y^2}$, e quindi $\frac{dA}{dy}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{dB}{dx}$; onde il dato differenziale è integrabile. Applicata la regola troveremo $\varphi=\ldots\ldots$ $\frac{1}{2}arc.tang\frac{x}{y}+\frac{1}{2}arc.cot\frac{y}{x}$ (1233.3°.4°). Si chiami frattanto z l'arco che ha per tangente $\frac{x}{y}$; sarà $\frac{x}{y}=tang z$, ed $\frac{y}{x}=cot z$, dal che si ha dunque $arc.cot\frac{y}{x}=\ldots$ $arc.tang\frac{x}{y}$, e quindi $\varphi=arc.tang\frac{x}{y}$, come già si sapeva (1243.3°).

1370. Ma sia n qualunque, e $d^n\varphi$ funzione delle variabili x, y e dei loro differenziali fino all'ordine n con dx costante. Facendo $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, ec., cioè $dy=pdx, d^2y=dpdx=qdx^2, d^3y=dqdx^2=rdx^3$, ec., $d^n\varphi$ diverrà funzione di x,y,p,q,r, ec., e del solo differenziale dx, che dovrà in tutti i termini trovarsi al medesimo grado n. Potrà dunque $d^n\varphi$ rappresentarsi generalmente con $6dx^n$, ove 6 sarà funzione delle sole quantità finite x, y, p, q, r, ec., il cui numero dovrà essere manifestamente $n+2$.

1371. Si supponga intanto che $6dx^n$ provenga da una, due o più differenziazioni o di una funzione finita o di una funzione differenziale di un ordine comunque minore di n; e sieno udx^{n-1}, $u'dx^{n-2}$, $u''dx^{n-3}$, ec. i suoi integrali primo, secondo, terzo, ec. D[illegible] per la possibilità di una, due o più integrazioni di $6dx^n$, dovranno verificarsi le equazioni $\int 6dx^n=udx^{n-1}$, $\int udx^{n-1}=u'dx^{n-2}$, $\int u'dx^{n-2}=u''dx^{n-3}$, ec., o più semplicemente $6dx=du$, $udx=du'$, $u'dx=du''$, ec.

Ora quanto alla prima, si ha (1248)

$$6dx=du=\left(\frac{du}{dx}\right)dx+\left(\frac{du}{dy}\right)dy+\left(\frac{du}{dp}\right)dp+\left(\frac{du}{dq}\right)dq+\text{ec., e quindi}$$

$$6=\left(\frac{du}{dx}\right)+\left(\frac{du}{dy}\right)p+\left(\frac{du}{dp}\right)q+\left(\frac{du}{dq}\right)r+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d6}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)q+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)r+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d6}{dp}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdp}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)p+\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)q+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)r+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d6}{dq}\right)=\left(\frac{d^2u}{dxdq}\right)+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)p+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)q+\left(\frac{du}{dp}\right)+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)r+\text{ec.}$$

ec. ec. ec.

$$\left(\frac{d6}{dy}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)dq+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d6}{dp}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdp}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)dy+\left(\frac{du}{dy}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)dq+\text{ec.}$$

$$\left(\frac{d\beta}{dq}\right)dx=\left(\frac{d^2u}{dxdq}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)dp+\left(\frac{du}{dp}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)dq+\text{ec.}$$

ec. ec. ec.

Ma essendo i coefficienti $\left(\frac{du}{dy}\right)$, $\left(\frac{du}{dp}\right)$, $\left(\frac{du}{dq}\right)$, ec. funzioni essi pure delle variabili contenute in u, si ha parimente

$$d\left(\frac{du}{dy}\right)=\left(\frac{d^2u}{dydx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dydp}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dydq}\right)dq+\text{ec.}$$

$$d\left(\frac{du}{dp}\right)=\left(\frac{d^2u}{dpdx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dpdy}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dp^2}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dpdq}\right)dq+\text{ec.}$$

$$d\left(\frac{du}{dq}\right)=\left(\frac{d^2u}{dqdx}\right)dx+\left(\frac{d^2u}{dqdy}\right)dy+\left(\frac{d^2u}{dqdp}\right)dp+\left(\frac{d^2u}{dq^2}\right)dq+\text{ec.}$$

dunque, poichè (1250.2°) $\left(\frac{d^2u}{dmdn}\right)=\left(\frac{d^2u}{dndm}\right)$, fatto per comodo $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=N$, $\left(\frac{d\beta}{dp}\right)=P$, $\left(\frac{d\beta}{dq}\right)=Q$, ec. avremo facilmente $N=\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dy}\right)$, $P=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}\times d\left(\frac{du}{dp}\right)$, $Q=\left(\frac{du}{dp}\right)+\frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dq}\right)$, ec.

1372. Ora se, come abbiamo osservato (1370), in βdx^n ossia in β le variabili x, y, p, q, r, ec. si trovano in numero di $n+2$, saranno $u+1$ in udx^{n-1} ossia in u: onde, ponendo successivamente $n=1$, $=2$, $=3$, ec., u sarà funzione soltanto di x, y nel primo caso, di x, y, p nel secondo, di x, y, p, q nel terzo, ec. ed avremo quindi per $n=1$, $P=\left(\frac{du}{dy}\right)$, $N=\frac{1}{dx}dP$, ed $N-\frac{1}{dx}dP=0$; per $n=2$, $Q=\left(\frac{du}{dp}\right)$, $P=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}dQ$, $N=\frac{1}{dx}dP-\frac{1}{dx^2}d^2Q$, ed $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}d^2Q=0$; per $n=3$, $R=\left(\frac{du}{dq}\right)$, $Q=\left(\frac{du}{dp}\right)+\frac{1}{dx}dR$, $P=\left(\frac{du}{dy}\right)+\frac{1}{dx}dQ-\frac{1}{dx^2}d^2R$, $N=\frac{1}{dx}dP-\frac{1}{dx^2}d^2Q+\frac{1}{dx^3}d^3R$, ed $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}d^2Q-\frac{1}{dx^3}d^3R=0$, e in generale, qualunque siasi il valore di n, $N-\frac{1}{dx}dP+\frac{1}{dx^2}\times d^2Q-\frac{1}{dx^3}d^3R+\frac{1}{dx^4}d^4S-\text{ec.}=0$, formula esprimente la condizione necessaria perchè possa aver luogo l' equazione $\beta dx=du$, ossia perchè possa integrarsi una prima volta la funzione βdx^n, o la data $d^n\varphi$ differenziale dell' ordine n. *Eulero* coi principj del Calcolo delle *variazioni*, del quale daremo noi pure in ultimo qualche accenno, è pervenuto a dimostrare altresì che questa condizione è unica, di modo che quando sia soddisfatta, la funzione $d^n\varphi$ è senza dubbio una prima volta integrabile.

1373. Ma perchè possa integrarsi una seconda volta, e sussistere ancora l'altra equazione $udx = du'$, osserveremo che la forma di questa equazione ricade in quella della precedente, cangiatovi solo 6 in u; dunque potrà concludersi la condizione per la sussistenza di questa, introducendo lo stesso cangiamento nella formula già trovata per la sussistenza dell'altra; il che darà per nuovo condizione $\left(\frac{du}{dy}\right) - \frac{1}{dx}d\left(\frac{du}{dp}\right) + \frac{1}{dx^2}d^2\left(\frac{du}{dq}\right) - \frac{1}{dx^3}d^3\left(\frac{du}{dr}\right) +$ ec. $= 0$. Ma dai valori già trovati per P, Q, ec. è facile dedurre che $\left(\frac{du}{dy}\right) = P - \frac{1}{dx}dQ + \frac{1}{dx^2}d^2R - \frac{1}{dx^3}d^3S +$ ec.; $\left(\frac{du}{dp}\right) = Q - \frac{1}{dx}dR + \frac{1}{dx^2}d^2S -$ ec.; $\left(\frac{du}{dq}\right) = R - \frac{1}{dx}dS +$ ec.; sostituendo adunque si troverà $P - \frac{2}{dx}dQ + \frac{3}{dx^2}d^2R - \frac{4}{dx^3}d^3S +$ ec. $= 0$, condizione necessaria perchè possa integrarsi una seconda volta il proposto differenziale.

Con simile raziocinio si troveranno per condizioni d'integrazioni ulteriori $Q - \frac{3}{dx}dR + \frac{6}{dx^2}d^2S -$ ec. $= 0$; $R - \frac{4}{dx}dS + \frac{10}{dx^2}d^2T -$ ec. $= 0$, con legge assai manifesta.

1374. Frattanto si concepirà facilmente: 1°. che queste equazioni eguaglieranno in numero l'ordine della proposta; 2°. che se oltre x, y si abbiano in $d^n\varphi$ le variabili z, ω, ec., ponendo $\frac{dz}{dx} = p'$, $\frac{dp'}{dx} = q'$, ec., $\frac{d\omega}{dx} = p''$, $\frac{dp''}{dx} = q''$, ec., sarà 6 funzione di x, y, p, q, ec., z, p', q', ec., ω, p'', q'', ec., e fatto $\left(\frac{d6}{dz}\right) = N'$, $\left(\frac{d6}{dp'}\right) = P'$, $\left(\frac{d6}{dq'}\right) = Q'$, ec., $\left(\frac{d6}{d\omega}\right) = N''$, $\left(\frac{d6}{dp''}\right) = P''$, ec., oltre le stabilite equazioni tra N, P, Q, ec., dovranno sussisterne delle simili fra N', P', Q', ec., N'', P'', Q'', ec. Infatti poichè z, ω, ec. sono indipendenti da y, e come costanti rapporto a questa variabile, la loro presenza nella funzione non distrugge nè altera le condizioni, che unicamente si riferiscono ad y; e dall'altro canto se queste si verificano riguardo ad y, che in somma non è che una variabile qualunque, debbon dunque verificarsi anche per z, ω, ec. 3°. Perciò le equazioni di condizione per ciascun ordine differenziale son tante quante le variabili meno la x, il cui differenziale è costante. 4°. E questo numero e le stesse equazioni condizionali avran luogo ancor che manchi dx, e per conseguenza x nel differenziale proposto; mentre ciò non impedisce, che possa farsi $dy = pdx$, $dp = qdx$, ec., ed aversi $d^n\varphi = 6dx^n$ con tutto il restante. 5.° Potremo perciò usarle anche nel caso di dx variabile, o di $d^n\varphi$ funzione della sola x, ponendo $x = \nu$, e trattando ν al pari delle variabili y, z, ec.

1375. Ma si venga agli esempj, e sia I°. $d^2\varphi = (xd^2y + 2dxdy)\cos y - \ldots xdy^2 \operatorname{sen} y$. Avremo (1370) $6 = (qx + 2p)\cos y - p^2 x \operatorname{sen} y$; onde $N = -(qx + 2p)\times$

$seny - p^2 x\cos y$; $P = 2\cos y - 2px\,sen\,y$; $\frac{dP}{dx} = -2(2p+qx)seny - 2p^2 x\cos y$; $Q = x\cos y$; $\frac{2dQ}{dx} = 2\cos y - 2px\,sen\,y$; $\frac{d^2Q}{dx^2} = -(2p+qx)seny - p^2 x\cos y$, ove è evidente che $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$, come pure $P - \frac{2dQ}{dx} = 0$; e perciò l'espressione data è due volte integrabile (1373).

II°. Sia $d^3\varphi = y\,dxd^2z + xdyd^2z + xyd^3z$. Dunque $6 = q'y + pq'x + r'xy$, $N = q' + r'x$, $P = q'x$, $\frac{dP}{dx} = q' + r'x$, $Q = 0 = \frac{2dQ}{dx} = \frac{d^2Q}{dx^2}$, $R = 0 = \frac{3dR}{dx} = \frac{3d^2R}{dx^2} = \frac{d^3R}{dx^3}$, $N' = 0$, $P' = 0 = \frac{dP'}{dx}$, $Q' = y + px$, $\frac{2dQ'}{dx} = 4p + 2qx$, $\frac{d^2Q'}{dx^2} = 3q + rx$, $R' = xy$, $\frac{3dR'}{dx} = 3y + 3px$, $\frac{3d^2R'}{dx^2} = 6p + 3qx$, $\frac{d^3R'}{dx^3} = 3q + rx$. Han dunque luogo le equazioni $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} = 0$, $N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} - \frac{d^3R'}{dx^3} = 0$, ma non già le rimanenti $P - \frac{2dQ}{dx} + \frac{3d^2R}{dx^2} = 0$, $P' - \frac{2dQ'}{dx} + \frac{3d^2R'}{dx^2} = 0$, ec., onde il proposto differenziale è una sola volta integrabile (1372).

III°. Sia $d^2\varphi = 6ydx^2 + 12xdxdy + 3x^2d^2y + 6xyd^2x$, cangiato x in v (1374.5°), avremo $d^2\varphi = 6ydv^2 + 12vdvdy + 3v^2d^2y + 6vyd^2v$, e sarà $6 = 6p'^2y + 12pp'v + 3qv^2 + 6q'vy$; onde $N = 6p'^2 + 6q'v$, $P = 12p'v$, $\frac{dP}{dx} = 12q'v + 12p'^2$, $Q = 3v^2$, $\frac{2dQ}{dx} = 12p'v$, $\frac{d^2Q}{dx^2} = 6q'v + 6p'^2$, $N' = 12pp' + 6qv + 6q'y$, $P' = 12\times p'y + 12pv$, $\frac{dP'}{dx} = 24pp' + 12q'y + 12qv$, $Q' = 6vy$, $\frac{2dQ'}{dx} = 12pv + 12p'y$, $\frac{d^2Q'}{dx^2} = 6qv + 12pp' + 6q'y$: perciò verificandosi le equazioni $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$, $P - \frac{2dQ}{dx} = 0$, $N' - \frac{dP'}{dx} + \frac{d^2Q'}{dx^2} = 0$, $P' - \frac{2dQ'}{dx} = 0$, l'espressione è due volte integrabile.

IV°. Sia $d^3\varphi = 12dxd^2x + 4xd^3x = 12dvd^2v + 4vd^3v$. Dunque $6 = 12pq + 4rv$, $N = 4r$, $P = 12q$, $\frac{dP}{dx} = 12r$, $Q = 12p$, $\frac{2dQ}{dx} = 24q$, $\frac{d^2Q}{dx^2} = 12r$, $R = 4v$, $\frac{3dR}{dx} = 12p$, $\frac{3d^2R}{dx^2} = 12q$, $\frac{d^3R}{dx^3} = 4r$, valori che sostituiti nelle tre prime equazioni di condizione, mostrano che la funzione data può tre volte integrarsi.

1376. Stabilite in tal guisa le condizioni d'integrabilità, facili sono i metodi per integrare la funzione $d^n\varphi$ quando vi soddisfaccia. Sia $n = 2$ e dx costante, cioè $d^2\varphi = (1368)Edx^2 + Fdxdy + Gdxdz + \text{ec.} + Hd^2y + Ld^2z + \text{ec.}$, e se ne

voglia l' integrale primo $d\varphi$. Fatto $d\varphi = Adx + Bdy + Cdz +$ ec., avremo $d^2\varphi = \left(\frac{dA}{dx}\right)dx^2 + \left(\left(\frac{dA}{dy}\right) + \left(\frac{dB}{dx}\right)\right)dxdy + \left(\left(\frac{dA}{dz}\right) + \left(\frac{dC}{dx}\right)\right)dxdz +$ ec. $+ Bd^2y$ $Cd^2z +$ ec. Dunque 1°. $B = H$, $C = L$, ec., cioè i coefficienti dei differenziali variabili dy, dz, ec. in $d\varphi$ son gli stessi che quelli di d^2y, d^2z, ec. in $d^2\varphi$; onde per aver $d\varphi$ non resta che trovare A, se pur dx non fosse variabile, poichè in tal caso è manifesto che avremo A dal coefficiente di d^2x. Ora 2.° $\left(\frac{dA}{dx}\right) = E$, $\left(\frac{dA}{dy}\right) + \left(\frac{dB}{dx}\right) = F$, $\left(\frac{dA}{dz}\right) + \left(\frac{dC}{dx}\right) = G$, ec., e di qui $\left(\frac{dA}{dx}\right)dx + \ldots \left(\frac{dA}{dy}\right)dy + \left(\frac{dA}{dz}\right)dz +$ ec. $= dA = Edx + \left(F - \left(\frac{dB}{dx}\right)\right)dy + \left(G - \ldots \left(\frac{dC}{dx}\right)\right)dz +$ ec., valore che integrato (1262) determina A. Nell' esempio I°. (1375) abbiamo $E = 0$, $F = 2\cos y$, $H = x\cos y = B$: dunque $dA = dy\cos y$, $A = \operatorname{sen} y$, e $d\varphi = dx\operatorname{sen} y + xdy\cos y = (1262)\, d(x\operatorname{sen} y)$. Ma nel III°., ove dx è variabile, dai coefficienti di d^2x e d^2y avremo immediatamente $d\varphi = 6xydx + 3x^2dy = d(3x^2y)$.

1377. Sia $n = 3$, e come sopra dx costante, cioè, limitandoci per semplicità a due sole variabili, $d^3\varphi = (1368)\ Ed^3y + Fdxd^2y + Gdyd^2y + Hdx^3 + Ldx^2dy + Kdxdy^2 + Idy^3$. Supponendo che $d^2\varphi = Ad^2y + Bdx^2 + Cdy^2 + Ddxdy$ ne sia l' integrale, avremo differenziando, $d^3\varphi = Ad^3y + \left(\left(\frac{dA}{dx}\right) + D\right)dxd^2y + \left(\left(\frac{dA}{dy}\right) + 2C\right)dyd^2y + \left(\frac{dB}{dx}\right)dx^3 + \left(\left(\frac{dB}{dy}\right) + \left(\frac{dD}{dx}\right)\right)dx^2dy + \left(\left(\frac{dC}{dx}\right) + \left(\frac{dD}{dy}\right)\right) \times dxdy^2 + \left(\frac{dC}{dy}\right)dy^3$. Dunque $A = E$, $2C = G - \left(\frac{dA}{dy}\right)$, $D = F - \left(\frac{dA}{dx}\right)$, $\left(\frac{dB}{dx}\right) = H$, $\left(\frac{dB}{dy}\right) = L - \left(\frac{dD}{dx}\right)$. Dalle tre prime equazioni si hanno i valori di A, C, D; l'ultime danno $\left(\frac{dB}{dx}\right)dx + \left(\frac{dB}{dy}\right)dy = dB = Hdx + Ldy - \left(\frac{dD}{dx}\right)dy$, differenziale del prim'ordine, che integrato (1262), farà conoscer B. Nel modo stesso si avranno gl' integrali degli ordini superiori.

Integrazione delle equazioni Differenziali

Come i differenziali delle funzioni differiscono da quelli delle equazioni (1266), così ne differiscono gli integrali. Per integrare una funzione è necessario rimontare a quell' espressione finita, la cui differenziazione renda la data. Per integrare un' equazione basta che in qualche modo si giunga a determinare il rapporto finito delle variabili. Il vocabolo *integrazione* ha dunque in questo caso

un senso molto più esteso, ed equivale a ciò che in Algebra si chiamò *risoluzione;* nel qual significato le regole che abbiamo date per le semplici funzioni non possono esser nè sufficienti, nè sempre applicabili all' integrazione dell' equazioni. Questa Teoria è d' una vastità immensa; noi non ne daremo che pochi accenni.

1378. Sia l' equazione $Adx+Bdy=0$ del primo ordine e a due sole variabili. Questa s' integra generalmente 1°. se $\left(\frac{dA}{dy}\right)=\left(\frac{dB}{dx}\right)$, o il di lei primo membro è un differenziale esatto (1250.2°); 2°. se possa giungersi a separare l'una dall' altra le due variabili in modo che A resti funzione della x, B della sola y, mentre allora $\left(\frac{dA}{dy}\right)=0=\left(\frac{dB}{dx}\right)$; 3°. se si trovi un moltiplicatore M atto a render differenziale esatto il primo membro della proposta.

1379. Nel primo caso l' integrazione si riduce a quella delle funzioni, e l'equazione si chiama *integrabile per se stessa*, e anche *reale*, denominazione che ritiene del pari tutte le volte che può comunque integrarsi.

1380. La separazione riesce molto comodamente, 1°. se $A=XY$, $B=X'Y'$, nel qual caso si ha $\frac{Xdx}{X'}+\frac{Y'dy}{Y}=0$, equazione separata; 2°. se A, B son funzioni omogenee di x, y, o allo stesso numero di dimensioni; poichè, fatto $x=yz$, sarà $\frac{B}{A}$ una funzione Z di z, e si avrà $dx+Zdy=0=zdy+ydz+Zdy$, e separando, $\frac{dz}{Z+z}=-\frac{dy}{y}$. Così $(ax+by)dx=(mx+ny)dy$, fatto $x=yz$, onde $\frac{B}{A}=Z=\frac{-mz-n}{az+b}$, diviene $-\frac{dy}{y}=\frac{(az+b)dz}{az^2+(b-m)z-n}$, equazione facile ad integrarsi (1345). Parimente $xdy-ydx=dx\sqrt{(x^2+y^2)}$, fatto $y=xz$, diverrà $dx\sqrt{(1+z^2)}-xdz=0$; d' onde $\frac{dx}{x}=\frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)}}$, e integrando, $lx=$ ... (1340) $lC(z+\sqrt{(1+z^2)})=l\frac{C}{x}(y+\sqrt{(x^2+y^2)})=l\frac{-Cx}{y-\sqrt{(x^2+y^2)}}$, ossia, tolti i logaritmi, $y-\sqrt{(x^2+y^2)}=C$, integrale cercata.

1381. Negli altri casi o la separazione è affatto impossibile, o si esigono delle artificiose sostituzioni per ottenerla. D' ordinario si sostituisce con frutto eguagliando ad una nuova variabile i termini che ammettono integrazione; ma non vi è regola generale per sostituire, e poichè il molto esercizio supplisce in questi casi alle regole, porremo qui varj esempj di sostituzioni, con cui si giunge a separar le variabili in diverse equazioni del prim' ordine.

I°. $(a+bx+cy)dx=(e+fx+gy)dy$; supponendo A, B tali, che sia $a+bA+cB=0=e+fA+gB$, si ponga $x=t+A$, $y=u+B$, troveremo, dopo aver

sostituito e ridotto, $(bt+cu)dt=(ft+gu)du$, equazione omogenea (1380.2°).

II°. $(2y+x)dy+ydx=(a+x+y)Ydy$; fatto $x+y=z$, viene $ydz+zdy=(a+z)Ydy$; fatto $yz=u$, viene $du-\frac{uYdy}{y}=aYdy$; fatto $\frac{Ydy}{y}=\frac{dq}{q}$, viene $\frac{qdu-udq}{q^2}=\frac{aYdy}{q}$; fatto $\frac{u}{q}=p$, viene infine $dp=\frac{aYdy}{q}$.

III°. $\frac{(2x^2+y^2)dx+xydy}{x^4+x^2y^2+a^4}=\frac{xdx+ydy}{a^2\sqrt{(x^2+y^2)}}$; fatto $x^2+y^2=z^2$, viene $\frac{z(xdz+zdx)}{x^2z^2+a^4}=\frac{dz}{a^2}$; fatto $zx=p$, viene $\frac{a^2dp}{p^2+a^4}=\frac{dz}{z}$.

IV°. $(a^2-x^2)dy+yxdx=adx\sqrt{(x^2+y^2-a^2)}$; fatto $a^2-x^2=\frac{y^2}{u^2}$, onde $-xdx=\frac{uydy-y^2du}{u^3}$, verrà $\frac{y^2du}{u^2}=adx\sqrt{(u^2-1)}$, che facilmente si separa.

V°. $\frac{Ydy}{x^2}=aYdy-\frac{dx}{x}$, fatto $aYdy=\frac{dz}{z}$, viene $\frac{Ydy}{x^3}=\frac{xdz-zdx}{zx^2}$; fatto $\frac{z}{x}=p$, viene $\frac{Ydy}{z^2}=\frac{dp}{p^3}$.

VI°. $mydx+nxdy=y^rdy$, ovvero $xy\left(\frac{mdx}{x}+\frac{ndy}{y}\right)=y^rdy$; fatto $mlx+nly=lp$, $x^my^n=p$, viene $\frac{dp}{p}\sqrt[m]{\frac{p}{y^n}}=y^{r-1}dy$, cioè $\frac{dp}{\sqrt[m]{p^{m-1}}}=dy\sqrt[m]{y^{n+m(r-1)}}$.

VII°. $dy+y^2dx=ax^mdx$. Se $m=0$, avremo $\frac{dy}{a-y^2}=dx$ ed $x=\frac{1}{2\sqrt{a}}\times l\frac{C(\sqrt{a}+y)}{\sqrt{a}-y}$ (1346); se $m=-2$, fatto $y=\frac{1}{z}$, l'equazione diverrà omogenea, ed in conseguenza separabile (1380.2°); e può anche divenirlo in un' infinità di altri valori di m. Infatti ponendo successivamente $x=t^{\frac{1}{m+1}}$, $=t^{-1}$, $y=\frac{a}{(m+1)z}$, $=t-t^2z$, avremo le trasformate $dz+z^2dt=\frac{a}{(m+1)^2}t^{-\frac{m}{m+1}}dt$, $dz+z^2dt=at^{-m-4}dt$, le quali essendo simili alla proposta, ci dicono che se abbia luogo la separazione in un caso qualunque, per esempio quando $m=n$, deve averlo ancora quando $m=-\frac{n}{n+1}$, e quando $m=-n-4$: ma riesce quando $m=0$, dunque usando alternativamente i due valori di m si troverà aver luogo anche nei casi di $m=-4$, $=-\frac{4}{3}$, $=-\frac{8}{3}$, $=-\frac{8}{5}$, ec., ed in generale quando sia $m=\frac{-4i}{2i\pm1}$, essendo i un numero intero e positivo.

1382. Si avvertirà infine, che deve riguardarsi come non integrabile l'equazione $Xdx = Ydy$, benchè separata, quando verun dei due integrali $\int Xdx$, $\int Ydy$ può aversi algebricamente: se pur non riesca per altre vie d' incontrare una qualche equazione finita ed algebrica, che soddisfaccia alla proposta e che possa dirsene l' integrale, come in qualche caso succede. Sia per esempio . . . $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, a cui si riduce l' altra $\frac{dx}{\sqrt{(a^2+bx+cx^2)}} = \ldots$ $\frac{dy}{\sqrt{(a^2+by+cy^2)}}$. Moltiplicando per xy, ed integrando quindi per parti, si ha $y\sqrt{(a^2+x^2)} - \int dy\sqrt{(a^2+x^2)} = x\sqrt{(a^2+y^2)} - \int dx\sqrt{(a^2+y^2)}$. Ma $\int dx \times \sqrt{(a^2+y^2)} = \int dy\sqrt{(a^2+x^2)}$: dunque $y\sqrt{(a^2+x^2)} = x\sqrt{(a^2+y^2)}$.

Sia $\frac{dx}{\sqrt{(a+cx^2+fx^4)}} = \frac{dy}{\sqrt{(a+cy^2+fy^4)}}$; si ponga $a+cx^2+fx^4 = \frac{dx^2}{dt^2}$, $a+cy^2+fy^4 = \frac{dy^2}{dt^2}$. La differenza di quest' ultime equazioni, fattovi $x+y=p$, $x-y=q$, darà $\frac{dpdq}{dt^2} = cpq + \frac{1}{2}fpq(p^2+q^2)$, e dalla somma dei lor differenziali presi con dt costante, e respettivamente divisi l' uno per dx, l' altro per dy, avremo $\frac{d^2p}{dt^2} = cp + \frac{1}{2}fp(p^2+3q^2) = \frac{dpdq}{qdt^2} + fpq^2$. Dunque $\frac{2d^2pdp}{q^2dt^2} - \frac{2dp^2dq}{q^3dt^2} = 2fpdp$, e integrando con dt costante, $\frac{dp^2}{q^2dt^2} = fp^2 + C$. Posti dunque i valori di p, q e $\frac{dp}{dt} = \sqrt{(a+cx^2+fx^4)} + \sqrt{(a+cy^2+fy^4)}$, avremo per l' integrale cercato, $\sqrt{(a+cx^2+fx^4)} + \sqrt{(a+cy^2+fy^4)} = (x-y)\sqrt{(C+f(x+y)^2)}$. Nello stesso preciso modo s' integrerebbe l' equazione $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2+dx^3+fx^4)}} = \ldots$ $\frac{dy}{\sqrt{(a+by+cy^2+dy^3+fy^4)}}$.

1383. E nella maniera medesima integreremo pure l' equazione $\frac{dx}{\sqrt{(1-e^2sen^2x)}} = \frac{dy}{\sqrt{(1-e^2sen^2y)}}$. Poste come sopra $1-e^2sen^2x = \frac{dx^2}{dt^2}$, $1-e^2sen^2y = \frac{dy^2}{dt^2}$, ed $x+y=p$, $x-y=q$, il giro medesimo d' operazioni ci darà $\frac{dpdq}{dt^2} = e^2(sen^2y - sen^2x) = e^2(senx+seny)(seny-senx) = (796.80^2)$ $-4e^2sen\frac{1}{2}pcos\frac{1}{2}qsen\frac{1}{2}qcos\frac{1}{2}p = (794.42^2) - e^2senpsenq$; $\frac{d^2p}{dt^2} = -e^2(senxcosx + senycosy) = -\frac{1}{2}e^2(sen2x + sen2y) = -e^2senpcosq$; d' onde $\frac{d^2p}{dqdp} = \frac{cosq}{senq}$, ossia $\frac{d^2p}{dp} = \frac{dqcosq}{senq}$, e in-

tegrando $ldp = lCsenq$, ossia, dividendo per la costante dt, $\frac{dp}{dt} = \frac{Csenq}{dt} = Csenq$.

Ed infine posti per q e $\frac{dp}{dt}$ i loro valori, $\sqrt{(1-e^2 sen^2 x)} + \sqrt{(1-e^2 sen^2 y)} = Csen(x-y)$. Avvertiremo passando che gl'integrali della forma $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2 sen^2 x)}}$ sono un caso particolare di quelli della forma $\int \frac{A+Bsen^2 x}{C+Dsen^2 x} \times \frac{dx}{\sqrt{(1-e^2 sen^2 x)}}$, celebri per le belle proprietà che vi ha scoperte *Le-Gendre*, il quale ha dato ad essi il nome di *trascendenti Ellittiche*, perchè in certi casi possono esprimersi per archi d'Ellisse.

1384. Per i casi che non ammettono separazione resterebbe il ricorso al moltiplicatore M (1378 3.°). E realmente può dimostrarsi, che non solo questo moltiplicatore ha sempre luogo per rapporto all'equazione $Adx+Bdy=0$, ma che possono trovarsene infiniti altri della forma φM, tutti idonei a rendere integrabile la data, quando non lo sia da se stessa. Infatti si ponga $\frac{A}{B} = \left(\frac{dM}{dx}\right) : \left(\frac{dM}{dy}\right)$, e qualora si moltiplichi la proposta per φM, avremo $\varphi M(Adx+Bdy) = 0 = \varphi M\left(\frac{A}{B}dx+dy\right) = \varphi M\left(\left(\frac{dM}{dx}\right)dx : \left(\frac{dM}{dy}\right) + dy\right) = \varphi M\left(\left(\frac{dM}{dx}\right)dx + \left(\frac{dM}{dy}\right)dy\right) = dM\varphi M$ differenziale esatto: dal che si può anche concludere, che *ogni equazione di prim'ordine a due variabili è sempre di sua natura integrabile*, teorema degno d'osservazione. Ma frattanto la difficoltà di risolver l'equazione a differenze parziali $A\left(\frac{dM}{dy}\right) - B\left(\frac{dM}{dx}\right) = 0$, che determina M, rende assai poco praticabile e di quasi niuna risorsa nell'attuale stato dell'Analisi questo metodo d'integrare, se pure o non si presenti M da se stesso, o non si usi per trovarlo una di quelle solite industrie, con le quali non di rado suppliamo tanto felicemente alla mancanza delle regole generali.

1385. Se peraltro A contenga y al primo grado soltanto, e B non contenga che x, e quindi $\left(\frac{dA}{dy}\right) - \frac{dB}{dx}$ sia funzione della sola x, sarà sempre possibile trovare un fattore M, semplicemente funzione della sola x, che renda esatto il dato differenziale. Infatti poichè $AMdx+BMdy=0$ deve supporsi integrabile in forza del moltiplicatore M, ed M si vuole funzione della sola x, sarà dunque (1369) $\left(\frac{d(AM)}{dy}\right) = \left(\frac{d(BM)}{dx}\right)$, cioè $M\left(\frac{dA}{dy}\right) + A\left(\frac{dM}{dy}\right) = M\left(\frac{dB}{dx}\right) + B\left(\frac{dM}{dx}\right)$. Ma essendo in ipotesi B ed M funzioni della sola x, sarà

$\left(\frac{dM}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dB}{dx}\right)=\frac{dB}{dx}$, $\left(\frac{dM}{dx}\right)=\frac{dM}{dx}$: avremo dunque $M\left(\frac{dA}{dy}\right)=M\frac{dB}{dx}+B\frac{dM}{dx}$, d'onde $\frac{dM}{M}+\frac{dB}{B}=\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}$, ove, per la prima delle due condizioni assegnate, il coefficiente $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ è necessariamente funzione della sola x. Frattanto integrando otterremo $lM+lB=\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}$, ovvero $lM+lB=\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}\times le=le^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$, e tolti i logaritmi, $MB=e^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$, d'onde infine $M=\frac{1}{B}e^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$ valor cercato. Sia per es. $ydx+pdy=Xdx$ con p ed X funzioni della sola x. Avremo $A=y-X$, $B=p$, onde $\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}=\int\frac{dx}{p}$, ed $M=\frac{1}{p}e^{\int dx:p}$, fattore che rende integrabile la data. Infatti posto $dx=pdz$, essa diverrà $ye^z dz+e^z dy-Xe^z dz=0$, e integrando, $ye^z-\int Xe^z dz=C$, cioè $y=e^{-\int dx:p}\left(\int\frac{Xdx}{p}e^{\int dx:p}+C\right)$ Così se sia $p=1$, $X=x^2$, avremo $y=e^{-x}(\int e^x x^2 dx+C)=$ (1355) $Ce^{-x}+x^2-2x+2$. Si noti che a quest'equazione si riducono 1.ª $pydx-dy+Xy^{n+1}dx=0$; 2.ª $py^{m+1}dx-y^m dy+Xy^n dx=0$; 3.ª $pXy^{m+1}dx-Xy^m dy+X'y^n dx=0$, col fare $y^{-n}=u$ nella 1.ª, $y^{m-n+1}=u$ nella 2.ª, $X':X=X''$ nella 3.ª.

Dipende infine da questa stessa equazione l'integrale di $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\ldots+\frac{sd^ny}{dx^n}=X$, ove a, b, c, ec. si suppongon costanti e che, sebbene non molto propriamente, dicesi *equazione lineare*, perchè i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. non vi oltrepassano la prima dimensione.

1386. Infatti se l'equazione sia di prim'ordine, cioè $n=1$, avremo $y+\frac{ady}{dx}=X$, onde $p=a$ ed $y=\frac{e^{-x:a}}{a}(\int Xe^{x:a}dx+C)$, e mancando X, $y=Ce^{-x:a}$.

1387. Se l'equazione sia di second'ordine, ovvero $n=2$ ed $y+\frac{ady}{dx}+\ldots\frac{bd^2y}{dx^2}=X$, fatto $p=\frac{dy}{dx}$, ovvero $mp-\frac{mdy}{dx}=0$ (m è indeterminata), e sommata questa con la data, viene I.° $y+(a+m)p-(mdy-bdp)\frac{1}{dx}=X$, ove suppongo (giacchè l'indeterminata m lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y+(a+m)p$ sia l'integrale della seconda $mdy-bdp$; dunque $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\int(mdy-bdp)=y-\frac{bp}{m}$; onde $a+m=-\frac{b}{m}$, e II.° $m^2+am+b=0$, con che

avremo m. Fatto ora III. $y+(a+m)p=u=y-\frac{bp}{m}$, e perciò $du=dy-\frac{bdp}{m}$, ovvero $mdu=mdy-bdp$, la I. diverrà $u-\frac{mdu}{dx}=X$, che integrata ci dà (1386) IV. $u=-\frac{e^{x:m}}{m}(\int Xe^{-x:m}dx+C)$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m, che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la terza si scioglierà nelle due $y+(a+m')p=u'$, $y+(a+m'')p=u''$, dalle quali si ha la V. $y=\frac{(a+m')u''-(a+m'')u'}{m'-m''}$. Si osservi che qualora si abbia $b=\frac{a^2}{4}$, la III. non darà che una sola equazione, la quale peraltro essendo fra y, p ed u, cioè fra y, $\frac{dy}{dx}$ ed una funzione di x, può sempre integrarsi (1386).

1388. Se $n=3$ ed $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}=X$, fatto $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q$, e perciò $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$, l' equazione diverrà $y+ap+bq+\frac{cdq}{dx}=X$, che sommata con le due $mp-\frac{mdy}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$ (k è una nuova indeterminata) dà I^a. $y+(a+m)p+(b+k)q-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=X$. Frattanto poichè m e k sono indeterminate, le suppongo tali che soddisfacciano alle equazioni II^a. $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\times\int(mdy+kdp)=y+\frac{kp}{m}$, III^a. $(b+k)q=-\frac{1}{m}\int cdq=-\frac{cq}{m}$. La II^a. dà $a+m=\frac{k}{m}$, e la III^a. $b+k=-\frac{c}{m}$. Dunque $am+m^2=k=-b-\frac{c}{m}$, cioè IV^a. $m^3+am^2+bm+c=0$, equazione che risoluta farà conoscere m, ed in conseguenza anche k. Si faccia adesso V^a. $y+(a+m)p+(b+k)q=u$, sarà $-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=-\frac{mdu}{dx}$, e quindi la I^a. diverrà VI^a. $u-\frac{mdu}{dx}=X$, e di qui u. Ma siccome la IV^a. dà tre valori m', m'', m''' di m, d'onde se ne ha tre altri k', k'', k''' di k, e questi posti nella VI^a. ne danno altrettanti u', u'', u''' di u; la V^a. dunque si scioglierà nelle tre VII^a. $y+(a+m')p+(b+k')q=u'$, VIII^a. $y+(a+m'')p+(b+k'')q=u''$, IX^a. $y+(a+m''')p+(b+k''')q=u'''$, per mezzo delle quali eliminando p e q si avrà immediatamente y dato per u', u'', u''', e dei coefficienti costanti. Che se dalla IV^a. si abbiano due soli valori m', m'' di m, essendo il terzo eguale all' uno o all' altro di questi due, si avranno altresì due soli valori u', u'' di u, e la V^a. sarà risolubile nelle sole VII^a. e VIII^a. per mezzo delle quali eliminando q, si avrà un' equazione tra y, p ed u', u'', cioè tra

$\left(\frac{dM}{dy}\right)=0$, $\left(\frac{dB}{dx}\right)=\frac{dB}{dx}$, $\left(\frac{dM}{dx}\right)=\frac{dM}{dx}$: avremo dunque $M\left(\frac{dA}{dy}\right)=M\frac{dB}{dx}+B\frac{dM}{dx}$, d'onde $\frac{dM}{M}+\frac{dB}{B}=\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}$, ove, per la prima delle due condizioni assegnate, il coefficiente $\left(\frac{dA}{dy}\right)$ è necessariamente funzione della sola x. Frattanto integrando otterremo $lM+lB=\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}$, ovvero $lM+lB=\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}\times le=le^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$, e tolti i logaritmi, $MB=e^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$, d'onde infine $M=\frac{1}{B}e^{\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}}$ valor certo. Sia per es. $ydx+pdy=\mathrm{X}dx$ con p ed X funzioni della sola x. Avremo $A=y-\mathrm{X}$, $B=p$, onde $\int\left(\frac{dA}{dy}\right)\frac{dx}{B}=\int\frac{dx}{p}$, ed $M=\frac{1}{p}e^{\int dx:p}$, fattore che rende integrabile la data. Infatti posto $dx=pdz$, essa diverrà $ye^z dz+e^z dy-\mathrm{X}e^z dz=0$, e integrando, $ye^z-\int\mathrm{X}e^z dz=C$, cioè $y=e^{-\int dx:p}\left(\int\frac{\mathrm{X}dx}{p}e^{\int dx:p}+C\right)$ Così se sia $p=1$, $\mathrm{X}=x^2$, avremo $y=e^{-x}(\int e^x x^2 dx+C)=$ (1355) $Ce^{-x}+x^2-2x+2$. Si noti che a quest'equazione si riducono 1.ª $pydx-dy+\mathrm{X}y^{n+1}dx=0$; 2.ª $py^{m+1}dx-y^m dy+\mathrm{X}y^n dx=0$; 3.ª $p\mathrm{X}y^{m+1}dx-\mathrm{X}y^m dy+\mathrm{X}'y^n dx=0$, col fare $y^{-n}=u$ nella 1.ª, $y^{m-n+1}=u$ nella 2.ª, $\mathrm{X}':\mathrm{X}=\mathrm{X}''$ nella 3.ª.

Dipende infine da questa stessa equazione l'integrale di $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\ldots+\frac{sd^ny}{dx^n}=\mathrm{X}$, ove a, b, c, ec. si suppongon costanti e che, sebbene non molto propriamente, dicesi *equazione lineare*, perchè i coefficienti differenziali $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, ec. non vi oltrepassano la prima dimensione.

1386. Infatti se l'equazione sia di prim'ordine, cioè $n=1$, avremo $y+\frac{ady}{dx}=\mathrm{X}$, onde $p=a$ ed $y=\frac{e^{-x:a}}{a}(\int\mathrm{X}e^{x:a}dx+C)$, e mancando X, $y=Ce^{-x:a}$.

1387. Se l'equazione sia di second'ordine, ovvero $n=2$ ed $y+\frac{ady}{dx}+\ldots\frac{bd^2y}{dx^2}=\mathrm{X}$, fatto $p=\frac{dy}{dx}$, ovvero $mp-\frac{mdy}{dx}=0$ (m è indeterminata), e sommata questa con la data, viene I.° $y+(a+m)p-(mdy-bdp)\frac{1}{dx}=\mathrm{X}$, ove suppongo (giacchè l'indeterminata m lo permette) che un m^{plo} della prima parte $y+(a+m)p$ sia l'integrale della seconda $mdy-bdp$; dunque $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\int(mdy-bdp)=y-\frac{bp}{m}$; onde $a+m=-\frac{b}{m}$, e II.° $m^2+am+b=0$, con che

avremo m. Fatto ora III. $y+(a+m)p=u=y-\frac{bp}{m}$, e perciò $du=dy-\frac{bdp}{m}$, ovvero $mdu=mdy-bdp$, la I. diverrà $u-\frac{mdu}{dx}=X$, che integrata ci dà (1386) IV. $u=-\frac{e^{x:m}}{m}(\int Xe^{-x:m}dx+C)$. Quindi poichè dalla II. nascono due valori m', m'' di m, che posti nella IV. ne danno due u', u'' di u, la terza si scioglierà nelle due $y+(a+m')p=u'$, $y+(a+m'')p=u''$, dalle quali si ha la V. $y=\frac{(a+m')u''-(a+m'')u'}{m'-m''}$. Si osservi che qualora si abbia $b=\frac{a^2}{4}$, la III. non darà che una sola equazione, la quale peraltro essendo fra y, p ed u, cioè fra y, $\frac{dy}{dx}$ ed una funzione di x, può sempre integrarsi (1386).

1388. Se $n=3$ ed $y+\frac{ady}{dx}+\frac{bd^2y}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}=X$, fatto $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}=q$, e perciò $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{dq}{dx}$, l' equazione diverrà $y+ap+bq+\frac{cdq}{dx}=X$, che sommata con le due $mp-\frac{mdy}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$ (k è una nuova indeterminata) dà I^a. $y+(a+m)p+(b+k)q-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=X$. Frattanto poichè m e k sono indeterminate, le suppongo tali che soddisfacciano alle equazioni II^a. $y+(a+m)p=\frac{1}{m}\times\int(mdy+kdp)=y+\frac{kp}{m}$, III^a. $(b+k)q=-\frac{1}{m}\int cdq=-\frac{cq}{m}$. La II^a. dà $a+m=\frac{k}{m}$, e la III^a. $b+k=-\frac{c}{m}$. Dunque $am+m^2=k=-b-\frac{c}{m}$, cioè IV^a. $m^3+am^2+bm+c=0$, equazione che risoluta farà conoscere m, ed in conseguenza anche k. Si faccia adesso V^a. $y+(a+m)p+(b+k)q=u$, sarà $-\frac{1}{dx}(mdy+kdp-cdq)=-\frac{mdu}{dx}$, e quindi la I^a. diverrà VI^a. $u-\frac{mdu}{dx}=X$, e di qui u. Ma siccome la IV^a. dà tre valori m', m'', m''' di m, d'onde se ne ha tre altri k', k'', k''' di k, e questi posti nella VI^a. ne danno altrettanti u', u'', u''' di u; la V^a. dunque si scioglierà nelle tre VII^a. $y+(a+m')p+(b+k')q=u'$, VIII^a. $y+(a+m'')p+(b+k'')q=u''$, IX^a. $y+(a+m''')p+(b+k''')q=u'''$, per mezzo delle quali eliminando p e q si avrà immediatamente y dato per u', u'', u''', e dei coefficienti costanti. Che se dalla IV^a. si abbiano due soli valori m', m'' di m, essendo il terzo eguale all' uno o all' altro di questi due, si avranno altresì due soli valori u', u'' di u, e la V^a. sarà risolubile nelle sole VII^a. e VIII^a. per mezzo delle quali eliminando q, si avrà un' equazione tra y, p ed u', u'', cioè tra

y, $\frac{dy}{dx}$ ed una funzione X di x, che essendo lineare del primo ordine, è perciò sempre integrabile (1386). Se poi tutti i tre valori di m dati dalla IV^a, sieno eguali, non si cangerà in modo alcuno la V^a. Ma siccome questa è tra y, p, q ed u, cioè tra y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ ed X, è dunque lineare del secondo ordine, e perciò sempre completamente integrabile (1387).

1389. Or questo metodo, che a cagione delle indeterminate m, ec. introdotte nell'equazioni, si chiama *dei Coefficienti indeterminati*, vale anche per l'equazioni lineari di qualunque ordine n^{simo}, le quali sommate con un numero $n-1$ d'equazioni $mp-\frac{mdr}{dx}=0$, $kq-\frac{kdp}{dx}=0$, $gr-\frac{gdq}{dx}=0$, ec., s'integreranno con la stessa facilità: il giro però sarà in queste più lungo, attese l'equazioni $n-1$, da cui debbon dedursi i valori delle indeterminate k, g, ec. dati per m, e quelle del grado n^{simo}, dalla cui risoluzione dipendono m', m'', m''', ec., e quindi u', u'', u''', ec. Si avverta che se manchi y nell'equazione si potrà porre $\frac{dy}{dx}=z$, e in conseguenza $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dz}{dx}$, ec. Ma proponiamoci qualche esempio.

I. Sia $y-\frac{dy}{6dx}-\frac{d^2y}{6dx^2}=2x$: avremo $a=-\frac{1}{6}$, $b=-\frac{1}{6}$, $X=2x$, $m'=\frac{1}{2}$, $m''=-\frac{1}{3}$, $u'=-Ce^{2x}+2x+1$, $u''=C'e^{-3x}+2x-\frac{2}{3}$ (1387), ed $y=C'e^{-3x}-Ce^{2x}+2x+\frac{1}{3}$, soppressi come inutili i coefficienti numerici delle costanti (1254. 2°.), il che praticheremo anche negli esempj che seguono. Prendendo dal valor trovato di y quelli di $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$, e tutto sostituendo nella data, questa è pienamente soddisfatta, il che verifica l'oper[…]one.

II. Sia $y-\frac{6dy}{dx}+\frac{12d^2y}{dx^2}-\frac{8d^3y}{dx^3}=0$. La IV^a (1388) diverrà $m^3-6m^2+12m-8=0=(m-2)^3$. Dunque $m=2$, e l'equazione ha tutte le radici eguali. Poichè frattanto $k=am+m^2=-8$, sostituiti nella V^a. i valori di m, k, a, b, u, avremo $y-\frac{4dy}{dx}+\frac{4d^2y}{dx^2}=Ce^{\frac{1}{2}x}$, lineare del 2°. ordine. In questa per determinare m avremo l'equazione (1387) $m^2-4m+4=0=(m-2)^2$, onde $m=2$, e le due radici sono eguali. Dunque (*ivi*) $y-2p=u$, ossia $y-\frac{2dy}{dx}=e^{\frac{1}{2}x}(C'-\frac{1}{2}\times\int e^{-\frac{1}{2}x}\times Ce^{\frac{1}{2}x}dx)=e^{\frac{1}{2}x}(C'-Cx)$, lineare del prim' ordine, nella quale $a=-2$, $X=e^{\frac{1}{2}x}(C'-Cx)$. Si avrà dunque (1386) $y=e^{\frac{1}{2}x}\left(\int\frac{e^{\frac{1}{2}x}(Cx-C')dx}{e^{\frac{1}{2}x}}+C''\right)=e^{\frac{1}{2}x}(Cx^2-C'x+C'')$.

III. Sia $y-\frac{5dy}{dx}+\frac{7d^2y}{dx^2}-\frac{3d^3y}{dx^3}=0$. Si avrà dunque $m^3-5m^2+7m-3=0$, equazione, le cui radici ineguali sono $m'=1$, $m''=3$. Sarà dunque $k'=-4$, $k''=-6$, $u'=C'e^x$, $u''=C''e^{\frac{1}{3}x}$, e la V^a. si risolverà nelle due $y-4p+3q=u'$, $y-2p+q=u''$. Eliminando q, si trova $y-p=\frac{1}{2}(3u''-u')$, ossia $y-\frac{dy}{dx}=C''e^{\frac{1}{3}x}-C'e^x$, lineare del prim' ordine, nella quale avendosi $a=-1$, sarà $y=e^x\times\ldots$ $\left(\int\frac{C'e^x-C''e^{\frac{1}{3}x}}{e^x}dx+C\right)=e^x\left(C'x+C''e^{-\frac{2}{3}x}+C\right)$.

IV. Si debba sommare la serie infinita $y=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+$ec. Avremo $y-\frac{d^2y}{dx^2}=0$, e perciò $y=Ce^x+C'e^{-x}$. Per determinare le costanti si osservi che quando $x=0$, viene $y=C+C'=1$, $dy(=Ce^xdx-C'e^{-x}dx)=0=C-C'$; dunque $C=C'=\frac{1}{2}$, ed $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=cos-x\sqrt{-1}$ (815).

1390. Infine se la proposta $Adx+Bdy=0$ sia ribelle a tutti i metodi precedenti, ricorreremo al consueto compenso delle approssimazioni, ponendo $y=D+Ex+Fx^2+Gx^3+$ ec. Questa differenziata darà $\frac{dy}{dx}=E+2Fx+3Gx^2+$ ec $=-\frac{A}{B}$; d' onde, sostituito in A, B il valor supposto di y, e il tutto mandato a zero, si avranno gli opportuni valori dei coefficienti. Per tal guisa dall'equazione di *Newton* $dy=dx-3xdx+ydx+x^2dx+xydx$ otterremo $y=D+(D+1)x+(D-1)x^2+\frac{2D+1}{3}x^3+$ ec.

1391. Sia adesso l'equazione di prim' ordine a tre variabili $Pdx+Qdy+Rdz=0$. Poichè z è indipendente da x, y (1269), consideriamola come costante per rapporto a queste variabili. L'equazione si ridurrà allora a $Pdx+Qdy=0$, il cui integrale completo conterrà una costante, che potrà esser'una funzione $\varphi(z)$ di z. Differenziato quest' integrale anche per z, risulterà un'equazione che, tolti i rotti, avrà la forma $Pdx+Qdy+(S-T\varphi'(z))dz=0$, e paragonata colla proposta darà $S-T\varphi'(z)=R$, e $\varphi(z)=\int dz\varphi'(z)=\int\frac{(S-R)dz}{T}$, ove la quantità sotto il segno dovrà esser nulla, o semplicemente funzione di z, qualora sia integrabile la proposta. Così avendo $ydx(y+z)+zdy(x+z)+ydz(y-x)=0$, porremo $ydx(y+z)+zdy(x+z)=0$, e integrando, $ly(x+z)-l(y+z)=\varphi(z)$. Di qui $zdy(x+z)+ydx(y+z)+ydz(y-x-(x+z)(y+z)\varphi'(z))=0$. Dunque $S-R=0$; per conseguenza $\varphi(z)=C$, e $y(x+z)=C(y+z)$ sarà l'integrale della data. Ma se sia

proposta $zdx+xdy+ydz=0$, troveremo $S-R=xlx-y$, onde quest' equazione non è integrabile. Se l' integrazione di $Pdx+Qdy=0$ riescisse difficoltosa, potrà tentarsi quella di $Pdx+Rdz=0$, ovvero di $Qdy+Rdz=0$, eguagliando la costante a $\varphi(y)$ nella prima, a $\varphi(x)$ nella seconda.

1392. Si terrà l' andamento stesso per l' equazione a quattro variabili $Pdx+Qdy+Rdz+Sd\omega=0$, integrando prima $Pdx+Qdy+Rdz=0$, come se fosse costante ω, e chiamando $\varphi(\omega)$ l' arbitraria dovuta a quest' integrale, che differenziato e paragonato in seguito con la proposta farà conoscere $\varphi(\omega)$. Ed egualmente si tratteranno l' equazioni a un più gran numero di variabili.

1393. Per l' equazioni differenziali d' ordine superiore al primo e non lineari, non si conosce attualmente verun metodo generale d' integrazione, e questa teoria è pur troppo imperfetta finora. Poniamo alcuni pochi casi, nei quali, supposte due variabili sole, e usando qualche artifizio, riesce integrare.

I. $\frac{y^2dx-xydy}{\sqrt{(y^4dx^2-2xy\,dxdy+y^2dy^2)}}=Y$: fatto $\frac{x}{y}=z$; onde $x=yz$, e $dx=ydz+zdy$, si ha $\frac{y^2dz}{\sqrt{(y^2dz^2-z^2dy^2+dy^2)}}=Y$; quadrando, riducendo allo stesso denominatore e separando, viene $\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)}}=\frac{Ydy}{\sqrt{(y^4-Y^2y^2)}}$.

II. $dy^{m-2}d^2y=Ydx^m$, ove è costante dx: fatto $dy=zdx$, si otterrà $z^{m-1}dz=Ydy$.

III. $Ydx^2-mdy^2-nyddy=0$, ove dx è costante: fatto $dx=zdy\sqrt[n]{y^m}$, onde $0=(dydz+zd^2y)\sqrt[n]{y^m}+\frac{mzdy^2}{n}\sqrt[n]{y^{m-n}}$, cioè $nyddy=-mdy^2-\frac{nydydz}{z}$, viene $Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}=-\frac{ndz}{z^3}$, e $dx=dy\sqrt[n]{y^m}\sqrt{\frac{n}{2(\int Ydy\sqrt[n]{y^{2m-n}}+C)}}$.

IV. Se sia $\varphi\left(x,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, fatto $\frac{dy}{dx}=p$, e perciò $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}$, sarà $\frac{dp}{dx}=f(x,p)$, equazione di prim' ordine, che integrata ne darà una dello stesso ordine fra x e p, cioè tra x e $\frac{dy}{dx}$, che pure integrata farà conoscere y. Sia per esempio $\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{d^2y}{dx^2}X$: si troverà $\frac{dp}{dx}=\frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{X}$, e per il primo integrale (1347. I°) $\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}=\int\frac{dx}{X}+C$. Fatto $\int\frac{dx}{X}+C=V$, si avrà per l' integrale secondo $y=\int\frac{Vdx}{\sqrt{(1-V^2)}}+C'$; onde, se $X=\frac{a}{2x}$, sarà $y=\int\frac{(x^2+C)dx}{\sqrt{(a^2-(x^2+C)^2)}}+C$. Nel modo stesso si tratterà $\varphi\left(y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0$, eguagliando p a $\frac{dx}{dy}$.

V. L'equazioni di second' ordine, omogenee rapporto ad x, y ed ai differenziali dx, dy, d^2y valutati per una dimensione, possono sempre ridursi al primo con le sostituzioni $y=ux$ e $qx=z$, che atteso $dy=pdx$ e $dp=qdx=\frac{zdx}{x}$, danno $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}=\frac{dp}{z}$: così $aydx^2-bxdxdy+gy^2d^2y=0$ diventa $au-bp+gu^2qx=0=au-bp+gu^2z$, onde $z=\frac{bp-au}{gu^2}$, $\frac{du}{p-u}=\frac{gu^2dp}{bp-au}$, e $dp=\frac{(bp-au)du}{(p-u)gu^2}$, equazione del prim' ordine, che se possa separarsi (come nel caso di $a=b$), separerà anche l'altra $\frac{dx}{x}=\frac{du}{p-u}$. Anzi tali equazioni si ridurranno, sol che sieno omogenee riguardo ad y, dy, d^2y, qual'è $yd^2y-dy^2-Xydxdy=0$; poichè fatto $p=\frac{dy}{dx}=uy$, $q=\frac{dp}{dx}=yz$, onde $dy=u\ dx$, $dp=y\,zdx=udy+ydu$, $\frac{dy}{y}=udx=\frac{zdx-du}{u}$, essa diventa $qydx^2-p^2dx^2-Xypdx^2=0=z-u^2-uX$, che dà $u^2dx=(u^2+uX)dx-du$, onde $\frac{du}{u}=Xdx$, equazione separata, che separa anche $\frac{dy}{y}=udx$.

VI. Se sia $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{dp}{dx}=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{dq}{dx}=\frac{d^3y}{dx^3}$, $s=\frac{dr}{dx}=\frac{d^4y}{dx^4}$, ec., verrà I°. $x=\int\frac{dy}{p}$; II°. $x=\int\frac{dp}{q}$, ed $y=\int pdx=\int\frac{pdp}{q}$; III°. $x=\int\frac{dq}{r}$, ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}$; IV°. $x=\int\frac{dr}{s}$, ed $y=\int pdx=\int dx\int qdx=\int dx\int dx\int rdx=\int\frac{dr}{s}\int\frac{dr}{s}\int\frac{rdr}{r}$ ec., formule integrabili se p sia funzione di y, q di p, r di q, s di r, ec. Così per l'equazione $1=\frac{d^2y}{dx^2}\times\frac{d^3y}{dx^3}$, cioè $1=qr$ o $r=\frac{1}{q}$, la III°. dà $x=\int qdq=\frac{1}{2}q^2+C$, $\int q^2dq=\frac{1}{3}q^3+C'$, ed $y=\frac{1}{3.5}q^5+\frac{1}{3}C'q^2+C''=\frac{(2x-C)^{\frac{5}{2}}}{3.5}+C(2x-C)+C''$.

Riprese anche le formule $\frac{dy}{dx}=p$, $\frac{dp}{dx}=q$, $\frac{dq}{dx}=r$, ec. verrà I°. $\frac{dpdy}{dx}=pdp=qdy$, $\frac{1}{2}p^2=\int qdy$, $p=\frac{dy}{dx}=\sqrt{2\int qdy}$, ed $x=\int\frac{dy}{\sqrt{2\int qdy}}$; II°. $\frac{dqdp}{dx}=qdq=rdp$, $\frac{1}{2}q^2=\int rdp$, $q=\frac{dp}{dx}=\sqrt{2\int rdp}$, $x=\int\frac{dp}{\sqrt{2\int rdp}}$, e come sopra, $y=\int\frac{pdp}{q}$

$=\int\frac{pdp}{\sqrt{2\int rdp}}$; III^a. $\frac{drdq}{dx}=rdr=sdq$, $\frac{1}{2}r^2=\int sdq$, $r=\frac{dq}{dx}=\sqrt{2\int sdq}$, $x=\ldots$, $\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}$, e come sopra, $y=\int\frac{dq}{r}\int\frac{qdq}{r}=\int\frac{dq}{\sqrt{2\int rdq}}.\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$, ec., formule integrabili, se q sia funzione di y, r di p, s di q, ec. Così per l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dy}{dx}$, cioè $r=p$, e $\int rdp=\frac{1}{2}p^2+C$, la II^a. dà $x=\int\frac{dp}{\sqrt{(p^2+C)}}=$ (1340) $l(p+\sqrt{(p^2+C)})-lC'=xle$, $C'e^x-p=\sqrt{(p^2+C)}$, $p=C'e^x-Ce^{-x}$, ed $y=\int\frac{pdp}{\sqrt{(p^2+C)}}=\sqrt{(p^2+C)}+C''=C'e^x+Ce^{-x}+C''$.

VII. Infine se l'ordine della data sia n, e si abbiano n equazioni non identiche d'ordine inferiore, eliminando i differenziali, come altrove si eliminarono le costanti (1272), avremo un'equazione tra le variabili x ed y, che sarà l'integrale finito della proposta. Si è di già praticato questo naturalissimo metodo integrando le lineari (1385). È poi da osservarsi, che qualunque equazione dell'ordine n ha sempre un numero n d'integrali primi dell'ordine n. Infatti potendosi da un'equazione finita dedurne $n-1$ differenziali dell'ordine $n-1$, tutte diverse fra loro per una qualche costante (1273); se col mezzo delle respettive differenziali si elimini da ciascuna questa costante, svanirà ogni divario, e risulterà da tutte un'equazione medesima dell'ordine n, che avrà dunque per integrale immediato ciascuna delle suddette equazioni. Così dall'equazione $y-ax-bx^2=0$, differenziata ed eliminatane prima a poi b, provengono le due altre $y-\frac{xdy}{dx}+bx^2=0$, $2y-\frac{xdy}{dx}-ax=0$, dalle quali differenziate e spogliate delle loro costanti deriva l'unica $2y-\frac{2xdy}{dx}+\frac{x^2d^2y}{dx^2}=0$, che in conseguenza ha l'una e l'altra di esse per integrale.

1394. Del rimanente i soliti metodi di approssimazione sono di non piccolo soccorso anche nell'equazioni d'ordine superiore. Con questi *Eulero* integrò l'equazione $\frac{d^2y}{dx^2}+ax^my=0$, da cui dipende l'altra più generale $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ coi coefficienti P, Q variabili. Ma la brevità a cui siamo necessariamente tenuti, non ci dà luogo a diffonderci in tali ricerche.

Integrazione dell'equazioni a differenze parziali

1395. Abbiamo già trovato (1272) come l'equazioni a differenze parziali si formino. Vediamo adesso come possano integrarsi, o per qual mezzo si giunga a stabilire il rapporto finito delle loro variabili.

1396. Cominciando dal caso più semplice, sia l'equazione del prim'ordine e lineare $\left(\frac{dz}{dx}\right)+M\left(\frac{dz}{dy}\right)-N=0$, ove M, N son funzioni di x, y, z; e $F(x, y,$

$z)=0$ ne sia il richiesto integrale. Dunque $z=f(x,y)$, $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\ldots\left(\frac{dz}{dy}\right)dy$ (1248), e $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}-\frac{dz}{dx}=0$, equazione, che confrontata con la proposta, dà $M=\frac{dy}{dx}$, $N=\frac{dz}{dx}$, ossia $Mdx-dy=0$, $Ndx-dz=0$. Si suppongano $P=a$, $Q=b$ gl' integrali completi di queste due nuove equazioni, a, b essendo le opportune costanti arbitrarie. Potremo dunque dedurne i valori di x, y dati per z, a, b, che sostituiti nell' integrale $F(x, y, z)=0$, lo cambieranno in funzione delle costanti a, b e della sola variabile z. Ma allora z risulterebbe costante (227); dunque dopo la sostituzione non resterà in $F(x,y,z)$ neppur la variabile z, che dovrà svanir da se stessa: onde l' integrale cercato sarà funzione delle sole costanti a, b, o dei loro valori P, Q, e potrà rappresentarsi con $F(P,Q)=0$, o con $Q=\varphi(P)$.

Esemp. Debba integrarsi $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{y}{x}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{z}{y}-g\sqrt{(x^2+y^2)}=0$. Avremo $M=\frac{y}{x}$, $N=-\frac{z}{y}+g\sqrt{(x^2+y^2)}$; e in conseguenza $\frac{ydx}{x}-dy=0$, $-\frac{zdx}{y}+g\sqrt{(x^2+y^2)}dx-dz=0$. La prima integrata dà $\frac{x}{y}=a=P$. La seconda divien dunque $-azdx+\frac{gx^2dx}{a}\sqrt{(1+a^2)}-xdz=0$, che integrata dà (1381. VI) $z=\frac{gx^2\sqrt{(1+a^2)}}{a(a+2)}+b=\frac{gxy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}+b$, e $b=Q=z-\frac{gxy\sqrt{(x^2+y^2)}}{x+2y}=\varphi(P)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$.

Si voglia integrare $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\frac{my}{nx}\left(\frac{dz}{dy}\right)-\frac{mz}{x}=0$. Sarà $M=\frac{my}{nx}$, $N=\frac{mz}{x}$; onde $\frac{my}{nx}-\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{mz}{x}-\frac{dz}{dx}=0$. La prima si riduce ad $\frac{mdx}{nx}=\frac{dy}{y}$, d'onde si ha $ly-lx^{\frac{m}{n}}=la$, ossia $y=ax^{\frac{m}{n}}$; e la seconda ad $\frac{mdx}{x}-\frac{dz}{z}=0$, che rende $lx^m-lz=lb$, ed $x^m=bz$: dunque $a=P=yx^{-\frac{m}{n}}$, e $b=Q=x^mz^{-1}=\varphi(P)=\varphi\left(\frac{y}{x^{\frac{m}{n}}}\right)$.

1397. Se $M=0$ e sia $\left(\frac{dz}{dx}\right)=N$, l' equazione $Mdx-dy=0$ darà $y=a=Cost$. Perciò nell' altra equazione $Ndx-dz=0$ dovrà supporsi costante y: onde esprimendo con $\int^x Ndx$ l' integrale parziale per x di Ndx, avremo $Q=b=z-\int^x Ndx$, e poichè $P=y$, sarà $z=\int^x Ndx+\varphi y$; cioè *l' equazione* $\left(\frac{dz}{dx}\right)=N$,

ove N *è funzione di* x, y, z, *s' integra come se fosse a differenze ordinarie, purchè vi si riguardi* y *come costante, e in luogo della costante consueta si aggiunga la funzione indeterminata* φy.

1398. Con la stessa facilità s' integra l' equazione a quattro variabili $\left(\frac{dz}{dx}\right)+L\left(\frac{dz}{dy}\right)+M\left(\frac{dz}{du}\right)=N$. Poichè suppostane l' integrale $F(x, y, z, u)=0$, e quindi $z=f(x, y, u)$, $dz=\left(\frac{dz}{dx}\right)dx+\left(\frac{dz}{dy}\right)dy+\left(\frac{dz}{du}\right)du$, $\frac{dz}{dx}=\left(\frac{dz}{dx}\right)+\left(\frac{dz}{dy}\right)\frac{dy}{dx}+\left(\frac{dz}{du}\right)\frac{du}{dx}$; il confronto di questa con la data darà $L=\frac{dy}{dx}$, $M=\frac{du}{dx}$, $N=\frac{dz}{dx}$. Supposti $P=a$, $Q=b$, $R=c$ gl' integrali di queste equazioni o di altre che ne dipendano, potran dedursene i valori di x, y, u dati per z, a, b, c, che sostituiti in $F(x, y, z, u)=0$, per la ragione stessa data già sopra, faranno svanire anche z, e daranno per l' integrale richiesto $F(a, b, c)=F(P, Q, R)=0$, ossia $R=\varphi(P, Q)$.

Es. Sia $(2z-2y)\left(\frac{dz}{dx}\right)-\left(\frac{dz}{dy}\right)-(x+2z^2-2yz)\left(\frac{dz}{du}\right)-1=0$. Dunque $L=-\frac{1}{2z-2y}$, $M=-\frac{x+2z^2-2yz}{2z-2y}$, $N=\frac{1}{2z-2y}$. Sarà in conseguenza $(2z-2y)dy+dx=0$, $(2z-2y)du+(x+2z^2-2yz)dx=0$, $(2z-2y)dz-dx=0$; d' onde $dz+dy=0$, $du+xdz+zdx=0$, $2zdz+2ydy-dx=0$. Dunque $P=z+y$, $Q=u+xz$, $R=z^2+y^2-x$, e per integrale cercato $z^2+y^2-x=\varphi(z+y, u+xz)$.

1399. Passando all' equazioni lineari di second' ordine, sia da integrarsi I^a. $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+g\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+h\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)=R$, ove g ed h sono costanti ed R è funzione di x, y. Pongo II^a. $\left(\frac{dz}{dx}\right)+m\left(\frac{dz}{dy}\right)=V$ (m è indeterminata), e differenziandola prima per x, poi per y, moltiplicando i differenziali respettivi per $\frac{1}{dx}$, $\frac{h}{mdy}$, e sostituendo nella I^a. i valori di $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$ e di $h\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, essa (se si faccia III^a. $g-m-\frac{h}{m}=0$) diverrebbe IV^a. $\left(\frac{dV}{dx}\right)+\frac{h}{m}\left(\frac{dV}{dy}\right)=R$. Ma qui bisogna osservare che la III^a. dà due valori m', m'' di m, e che $m'm''=h$; cangiato dunque m in m' nella II^a. e IV^a., avremo le due equazioni di prim' ordine $\left(\frac{dz}{dx}\right)+\ldots m'\left(\frac{dz}{dy}\right)=V$, $\left(\frac{dV}{dx}\right)+m''\left(\frac{dV}{dy}\right)=R$, che daran luogo ai due sistemi d' equa-

zioni a differenze ordinarie (1396) 1°. $m'dx-dy=0$, $Vdx-dz=0$; 2°. $m''dx-dy=0$, $Rdx-dV=0$. Dall'ultimo abbiamo $y-m''x=a$, $V-\int Rdx=b$; onde (ivi) $V=\int Rdx+\varphi(y-m''x)$, purchè in R si ponga $y=a+m''x$, il che cangerà R in funzione della sola x. Il primo darà $y-m'x=a'$, $z-\int Vdx=b'$ e $z=\int Vdx+f(y-m'x)$, purchè in V si ponga $y=a'+m'x$. Sostituendo dunque il valor di V, e osservando che $\int dx\varphi(y-m''x)=\int dx\varphi(a'+m'x-m''x)='\varphi(a'+m'x-m''x)='\varphi(y-m''x)$, cangiata $'\varphi$ in φ, $z=\int dx\int Rdx+\varphi(y-m''x)+f(y-m'x)$, purchè nella prima integrazione si ponga $y=a+m''x$, e nella seconda $y=a'+m'x$. Che se $m'=m''$, sarà $\int dx\varphi(y-m''x)=\int dx\varphi(a'+m'x-m''x)=\int dx\varphi a'=x\varphi a'=x\varphi(y-m'x)$, $z=\int dx\int Rdx+x\varphi(y-m'x)+f(y-m'x)$.

1400. Sia adesso $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+A\left(\frac{dz}{dx}\right)+B\left(\frac{dz}{dy}\right)+Cz+V=0$, coi coefficienti A, B, C, V funzioni di x, y. Suppongo $z=e^{\alpha}\beta$, e che α, β sieno funzioni di x, y, determinate dalle due condizioni 1ª. $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B=0$, 2ª. $\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right)\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=-Ve^{-\alpha}$, oppure dalle due altre 3ª. $\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A=0$, 4ª. $\left(\frac{d^2\beta}{dxdy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\right)\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=-Ve^{-\alpha}$. Introdotto nella data il valor supposto di z, e in luogo di $\left(\frac{d^2\alpha}{dxdy}\right)$ l'uno o l'altro dei due valori $-\left(\frac{dB}{dy}\right)$, $-\left(\frac{dA}{dx}\right)$ dati o dalla 1ª. o dalla 3ª. condizione, troveremo nel primo caso $C=AB+\left(\frac{dB}{dy}\right)$, e nel secondo $C=AB+\left(\frac{dA}{dx}\right)$. Onde se tra i coefficienti A, B, C della proposta sussista uno di questi rapporti, essa sarà integrabile, ed avremo $z=e^{\alpha}\beta$, ove se avrà avuto luogo il primo dei due rapporti, dovremo fare $\alpha=-\int^x Bdx+\varphi(y)$, valore dato dalla prima condizione (1396); se il secondo, dovremo porre $\alpha=-\int^y Ady+\varphi(x)$ dato dalla 3ª.; quanto poi a β si avrà o dalla 2ª. o dalla 4ª. condizione, ponendo nella 2ª. $\left(\frac{d\beta}{dx}\right)=u$, nella 4ª. $\left(\frac{d\beta}{dy}\right)=u'$, con che la 2ª. diverrà $\left(\frac{du}{dy}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)+A\right)u=-Ve^{-\alpha}$, e sarà (1396) $\beta=\int^x udx+f(y)$, e dalla 4ª. avremo $\left(\frac{du'}{dx}\right)+\left(\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)+B\right)u'=-Ve^{-\alpha}$, e $\beta=\int^y u'dy+f(x)$.

Es. Abbiasi $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)-\frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dx}\right)-\frac{1}{x-y}\left(\frac{dz}{dy}\right)+\frac{2z}{(x-y)^2}=0$; ove si verifica il secondo dei due rapporti fra i coefficienti. Dunque poichè $A=B=-\frac{1}{x-y}$ e $V=0$, avremo dalla condizione 3ª. $\alpha=\int^y\frac{dy}{x-y}+\varphi(x)=-l(x-y)+$

$l\varphi(x)=l\,\frac{\varphi(x)}{x-y}$. In conseguenza $\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)=\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{1}{x-y}$, e $\left(\frac{du'}{dx}\right)+\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{2}{x-y}\right)u'=0$. Questa integrata (1396) dà $lu'=2l(x-y)-l\varphi(x)+lF(y)$, cioè $u'=\frac{(x-y)^2F(y)}{\varphi(x)}$. Dunque $6=\int^y\frac{dy(x-y)^2F(y)}{\varphi(x)}+f(x)=(1256)\frac{1}{\varphi(x)}(\int^y dy\times(x-y)^2F(y)+f(x))$, e $z=\frac{1}{x-y}(\int^y dy(x-y)^2F(y)+f(x))$. Se si fa $F(y)=0$, avremo l'integrale particolare $z=\frac{f(x)}{x-y}$.

1401. Quando non sussista alcuno dei due rapporti, si riduca la data alla forma $\left\{\frac{d\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az\right)}{dx}\right\}+B\left(\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az\right)+\left(C-\left(\frac{dA}{dx}\right)-AB\right)z+V=0$, che fatto $\left(\frac{dz}{dy}\right)+Az=z'$ e $C-\left(\frac{dA}{dx}\right)-AB=M$, diviene $\frac{1}{M}\left(\frac{dz'}{dx}\right)+\frac{B}{M}z'+z+\frac{V}{M}=0$. Da questa differenziata per y, e sommata col suo prodotto per A, risulta una nuova equazione della forma $\left(\frac{d^2z'}{dxdy}\right)+A'\left(\frac{dz'}{dx}\right)+B'\left(\frac{dz'}{dy}\right)+C'z'+V'=0$ simile alla proposta, e di cui si tenterà coll' istesso metodo l' integrazione, la quale, se riesca, farà conoscere z', e per conseguenza anche z. Se poi non possa effettuarsi l' integrazione, la trasformeremo alla maniera medesima in una terza, e così di seguito, finchè non si giunga a qualche equazione, che resista agli stabiliti criterj d' integrabilità, la quale, come ha dimostrato il Sig. *La Place*, deve necessariamente incontrarsi, qualora la proposta sia integrabile.

1402. Ma sia $A=B=C=V=0$, cioè non resti nella proposta (1400) che il solo termine $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$. Sarà dunque $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=0$, e posto 1°. $\left(\frac{dz}{dy}\right)=\nu$, si avrà 2°. $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)=\left(\frac{d\nu}{dx}\right)=0$. Nella 2°. $N=0$ (1397); dunque integrando si avrà $\nu=\varphi(y)$. Nella 1°. $N=\nu$; dunque $z=\int^y\nu dy+f(x)=\int^y dy\varphi(y)+f(x)$. Facendo perciò $\int^y dy\varphi(y)=F(y)$, avremo infine $z=F(y)+f(x)$.

1403. Frattanto basta che si sappiano integrare l' equazioni precedenti, perchè lo stesso possa farsi dell' altra più generale $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+M\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)+N\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+L\left(\frac{dz}{dx}\right)+P\left(\frac{dz}{dy}\right)+Qz+T=0$. Infatti se ω, θ sieno due funzioni di x, y tali, che si abbia 1°. $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)^2+M\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)^2=0$, 2°. $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2+M\times$ ..

$\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+N\left(\frac{d\theta}{dy}\right)^2=0$, e si calcolino e s' introducano nella data i valori dei coefficienti differenziali $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)$, ec. dati per le nuove variabili (1264), avvertendo che $\left(\frac{d^2z}{dxd\omega}\right)=\left\{\frac{d\left(\frac{dz}{dx}\right)}{d\omega}\right\}=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)+\ldots$ $\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$, come del pari $\left(\frac{d^2z}{dxd\theta}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\omega}{dx}\right)$, ... $\left(\frac{d^2z}{dyd\omega}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\omega^2}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2z}{dyd\theta}\right)=\left(\frac{d^2z}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)\times$ $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)$, troveremo $M'\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)+L'\left(\frac{dz}{d\omega}\right)+P'\left(\frac{dz}{d\theta}\right)+Qz+T=0$, ove $M'=$ $2\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dx}\right)+M\left(\left(\frac{d\omega}{dx}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)+\left(\frac{d\theta}{dx}\right)\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\right)+2N\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, ed L', P' eguagliano il primo membro della data toltone $Qz+T$, e cangiata z in ω per L', in θ per P'; ed è chiaro, che per render questa nuova equazione simile alla precedente (1400), basterà dividerla per M', e introdurre nei coefficienti i valori di x, y, dati per ω, θ, dei quali potranno aversene un' infinità dalle equazioni $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=\left(\frac{d\omega}{dy}\right)(-\frac{1}{2}M+\sqrt{(\frac{1}{4}M^2-N)})$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=\left(\frac{d\theta}{dy}\right)(-\frac{1}{2}M-\sqrt{(\frac{1}{4}M^2-N)})$ dedotte dalle due condizioni 1ª. e 2ª.

Esemp. Sia $\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)+y^2\left(\frac{d^2z}{dy^2}\right)+y\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$. Sarà $M=0$, $N=y^2$, $L=0$, $P=y$, $Q=0$, $T=0$: onde primieramente $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=y\left(\frac{d\omega}{dy}\right)\sqrt{-1}$, $\left(\frac{d\theta}{dx}\right)=-y\left(\frac{d\theta}{dy}\right)\sqrt{-1}$; e perciò (1402) $\omega=\varphi(x\sqrt{-1}+ly)$, $\theta=f(x\sqrt{-1}-ly)$. Scelte le più semplici forme di queste funzioni porremo $\omega=x\sqrt{-1}+ly$, $\theta=x\sqrt{-1}-ly$; quindi $\left(\frac{d\omega}{dx}\right)=\sqrt{-1}=\left(\frac{d\theta}{dx}\right)$; $\left(\frac{d\omega}{dy}\right)=\frac{1}{y}=-\left(\frac{d\theta}{dy}\right)$, $\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)=0=\left(\frac{d^2\theta}{dx^2}\right)$, ... $\left(\frac{d^2\omega}{dy^2}\right)=-\frac{1}{y^2}=-\left(\frac{d^2\theta}{dy^2}\right)$, onde $M'=-4$; $L'=P'=0$, e la trasformata diviene $\left(\frac{d^2z}{d\omega d\theta}\right)=0$, che immediatamente dà (1402) $z=\varphi(\omega)+f(\theta)=\varphi(x\sqrt{-1}+ly)$ $+f(x\sqrt{-1}-ly)=(822)\varphi(l(y\cos x+y\sqrt{-1}.\operatorname{sen}x))+f(l(y\cos x-y\sqrt{-1}.\operatorname{sen}x))$.

Soluzione particolare delle equazioni

1404. Sia $\varphi=\varphi(x, y, a)=0$ un' equazione finita tra x, y, a: è chiaro che se si differenzj avremo un medesimo risultamento o vi si riguardi a come costante, o vi si tratti come variabile, purchè in questo secondo caso si prendano infine per nulli i

termini introdotti dalla supposta variabilità di essa costante, cioè si ponga $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)da=0$, o più semplicemente $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$.

1405. Nasce di qui che qualora si abbia un' equazione differenziale di prim' ordine a due variabili, di cui $\varphi=\varphi(x, y, a)=0$ sia l' integrale completo (1255), non solo potremo assegnare ad a qualunque valor costante ci piaccia, senza che per questo cessi la verità dell' integrale, ma quelli ancora che risulteranno dall' equazione $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, che generalmente verranno espressi in funzioni delle variabili x, y. L' integrale proposto oltre al perdere in questo caso la sua qualità di completo neppur caderà tra gl' infiniti integrali particolari, che si hanno dall' eguagliare a ad una qualunque costante (*ivi*); onde ha preso il nome di ***soluzione particolare***. Abbiasi per esempio $\sqrt{(x^2+y^2)}\frac{dy}{dx}-\frac{ydy}{dx}-x=0$, il cui integrale completo, fatto $x^2+y^2=z^2$, si trova esser $\varphi=x^2-2ay-a^2=0$. Dunque $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=-2a-2y=0$, e quindi $a=-y$, valore che posto in φ, dà la soluzione particolare $x^2+y^2=0$, che, senza esser compresa sotto l' integrale completo, soddisfà interamente alla data.

1406. Se l' equazione differenziale sia di second' ordine, ed abbia in conseguenza $\varphi(x, y, a, b)=0$ per integrale completo, potrebbe per avventura supporsi che per dedurne la soluzione particolare, bastasse porre insieme le due equazioni $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)=0$, $\left(\frac{d\varphi}{db}\right)=0$. Ma si deve avvertire, che le costanti a, b, riguardate come variabili, oltre i coefficienti $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)$, $\left(\frac{d\varphi}{db}\right)$ introducono nel differenziale secondo anche $\left(\frac{d^2\varphi}{da^2}\right)$, $\left(\frac{d^2\varphi}{db^2}\right)$ (1276), e converrebbe che tutti fossero nulli, perchè salva restasse l' identità del differenziale, cioè dovrebbero due sole indeterminate soddisfare a quattro equazioni, il che è generalmente impossibile.

1407. Procederemo dunque diversamente, osservando in primo luogo, che da $\varphi(x, y, a, b)=0$ risulta (1266) $b=f(x, y, a)$; onde dal differenziale di $\varphi=0$ per a, b, avremo (1272) 1ª. $\left(\frac{d\varphi}{da}\right)+\left(\frac{d\varphi}{db}\right)\left(\frac{db}{da}\right)=0$. Inoltre l' equazione primitiva $\varphi=0$ dà 2ª. $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)=0=\varphi'(x, y, \left(\frac{dy}{dx}\right), a, b)$, e di qui 3ª. $\left(\frac{d\varphi'}{da}\right)+\left(\frac{d\varphi'}{db}\right)\left(\frac{db}{da}\right)=0$; e col mezzo di queste tre equazioni e della finita $\varphi=0$, eliminate a, b, $\left(\frac{db}{da}\right)$, avremo un' equazione di prim' ordine

spogliata affatto di costanti, e soluzione particolare della proposta.

Esemp. Sia $\varphi = y - \frac{a}{2}x^2 - bx - a^2 - b^2 = 0$, da cui per mezzo di $d\varphi = 0$, $d^2\varphi = 0$ (1269) proviene $y - \frac{xdy}{dx} + \frac{x^2d^2y}{2dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} - \frac{xd^2y}{dx^2}\right)^2 - \frac{d^2y^2}{dx^4} = 0$, che perciò avrà φ per integrale finito. Dunque $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = -\frac{x^2}{2} - 2a$, $\left(\frac{d\varphi}{db}\right) = -x - 2b$; e la 1ª. diverrà $\frac{x^2}{2} + 2a + (x+2b)\left(\frac{db}{da}\right) = 0$. Inoltre $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right) = -ax - b$, $\left(\frac{d\varphi}{dy}\right) = 1$, e la 2ª. darà $\varphi' = -ax - b + \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$. Infine $\left(\frac{d\varphi'}{da}\right) = -x$, $\left(\frac{d\varphi'}{db}\right) = -1$, e dalla 3ª. avremo $x + \left(\frac{db}{da}\right) = 0$. Fatta l'eliminazione proposta, troveremo $(1 + x^2)y - \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right) - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{x^4}{16} = 0$, che sarà la soluzione particolare di prim' ordine della data.

1408. Ed è inutile avvertire che a questo medesimo risultamento avrebbe condotto l' ipotesi di $a = f(x, y, b)$, non potendosi cangiar l' essenza del calcolo, qualunque delle due costanti si prenda per funzione dell'altra. Noteremo piuttosto che la soluzione particolare di prim' ordine, considerata come equazion differenziale, può avere anch' essa delle soluzioni particolari, le quali rispetto alla data si chiamano *soluzioni particolari doppie*. Queste provenendo dal trattarsi non solo come variabili, ma ancora come indipendenti le costanti della prima e della seconda integrazione, coincideranno con ciò che si avrebbe dall' integrale finito, ponendovi i valori di a, b dati dalle due equazioni $\left(\frac{d\varphi}{da}\right) = 0$, $\left(\frac{d\varphi}{db}\right) = 0$ (1406); e perciò sebben soddisfacciano alla soluzione particolare prima, non soddisfanno peraltro alla data differenziale di second' ordine.

Del resto il Sig. *La Grange*, a cui è interamente dovuta quest' importante teoria delle soluzioni particolari dell' equazioni, dà dei mezzi per ritrovarle anche nel caso che l' integrale completo non si conosca. Noi non ci occuperemo di quest' indagine, e passeremo piuttosto a qualche applicazione delle precedenti dottrine.

Quadratura delle superficie

F.255

1409. Sia la curva AM con le coordinate $AP=x$, $PM=y$, e vogliasi l'area S del settore APM. Presa sull'asse AN la porzione $Pp=\delta x$ e condotta l'ordinata $pm=y'$, e da M la Mr parallela ad AN, avremo l'area mistilinea $PMmp=\delta S$ (1213), e l'area rettangolare $PMrp=y\delta x$, differenti fra loro di tutto il triangolo mistilineo Mrm. Ora è chiaro che questo triangolo tanto più impiccolisce quanto più si approssimano l'una all'altra le due ordinate PM, pm, ossia quanto si rende più piccola δx; come è chiaro altresì che quanto più impiccolisce δx tanto più impiccoliscono le due aree. Dunque a misura che le due aree impiccoliscono, tendono ad eguagliarsi l'una con l'altra, e quindi hanno necessariamente limiti eguali (1206). Ma limite di δS è dS, e di $y\delta x$ è visibilmente ydx, dunque $dS=ydx$, e quindi $S=\int ydx$. Ponendo perciò il valor di y dato per x, che deve aversi dall'equazione della curva (896), e poscia integrando, avremo il valor cercato di S.

E qui pure può, come altrove, osservarsi che alla stessa importante relazione $dS=ydx$ ci avrebbe del pari e più fluidamente condotti il principio infinitesimale. Infatti supposte infinitamente vicine le due ordinate PM, pm, l'area $dS=PMmp$ si convertirà in un trapezio che avrà per misura (634) $\frac{1}{2}Pp(PM+pm)$. Dunque $dS=\frac{1}{2}dx(y+y')=\frac{1}{2}dx(y+y+dy)=ydx+\frac{1}{2}dxdy$. Ma $\frac{1}{2}dxdy$ è un infinitesimo di second'ordine (1207), e perciò (1211) deve togliersi in faccia ad ydx infinitesimo d'ordine primo, dunque $dS=ydx$, e come sopra $S=\int ydx$.

1410. Si noti 1°. che se le coordinate facciano un angolo obliquo φ, sarà $S=\operatorname{sen}\varphi\int ydx$ (1314); 2°. che lo spazio compreso tra due coordinate y, y' verrà rappresentato dall'integrale definito (1363) $\int y'dx \backsim \int ydx$; 3°. che differenziando con dx costante, si avrebbe $d^2S=dydx$, d'onde $S=\int\int dydx$, purchè s'integri prima per y, poi per x, e si sostituisca il valor di y avanti di integrare per x; 4°. che

361 infine condotte AQ, MQ respettivamente parallele a PM, AP, e riflettendo che

AMP$=\int y dx=$ (1263) $xy-\int x dy$, ed $xy=$APMQ, avremo $\int x dy=$ AQMP $-$AMP$=$AMQ. F.261

1411. Indipendentemente dal principio infinitesimale e da quello dei limiti può giungersi alla importante equazione $S=\int y dx$ col noto principio delle tre serie (808). Si chiamino S, S' i due settori APM, Apm; saranno $S=\varphi(x)$, $S'=\varphi(x+\delta x)=$ (1281) $S+\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{d^2S}{2dx^2}\delta x^2+\frac{d^3S}{2.3dx^3}\delta x^3+$ec., ed $S'-S=$ PM$mp=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{d^2S}{2dx^2}\delta x^2+$ec., e supposta δx tale che in tutta la lunghezza Pp dell'asse Ap non cada alcuna ordinata massima o minima, l'area PMmp risulterà visibilmente maggiore dell'uno e minore dell'altro dei due rettangoli P$p\times$PM$=y\delta x$, P$p\times pm=y'\delta x=\delta x\left(y+\frac{dy}{dx}\delta x+\frac{d^2y}{2dx^2}\delta x^2+\text{ec.}\right)$. Or poichè queste due espressioni cominciano con lo stesso termine $y\delta x$, dovrà altresì cominciare col termine stesso anche il valore dell'area PMmp (808), e sarà quindi $\frac{dS}{dx}\delta x=y\delta x$, d'onde $S=\int y dx$.

1412. Passando agli esempj, nel circolo $\int y dx=$AQMP$=$ (910) $\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}$, cioè riducendo in serie il radicale (216), moltiplicando per dx, e quindi integrando ciascun termine del prodotto (1257), AQMP$=C+ax-\frac{x^3}{2.3a}-\frac{x^5}{2.4.5a^3}-\frac{3x^7}{2.4.6.7a^5}-\frac{3.5x^9}{2.4.6.8.9a^7}-$ec. Fatto $x=0$, sarà AQMP$=0$, e però $C=0$: dunque AQMP$=ax-\frac{x^3}{6a}-\frac{x^5}{40a^3}-$ec. Fatto $x=a$, viene il quadrante BMQA; e poichè AMP$=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}$, si ha il settore AQM$=$AQMP$-AMP=\frac{ax}{2}+\frac{x^3}{12a}+\frac{3x^5}{80a^3}+$ec. 261

1413. Nell'ellisse $\int y dx=$(964)$\int\frac{bdx}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{b}{a}(ax-\frac{x^3}{2.3.a}-\frac{x^5}{2.4.5a^3}-$ec.). Quindi, paragonando il circolo all'ellisse, si trova CB'NP : CBMP :: $a:b$ :: AB'ab' : ABab :: PN : PM :: SPN : SPM :: SAN : SAM; ed essendo AB'$ab'=a^2\pi$: sarà AB$ab=ab\pi$, cioè *l'ellisse eguaglia un circolo del diametro medio proporzionale tra gli assi.* 263

1414. Nella parabola $\int y dx=$ (948) $\int dx\sqrt{px}=\frac{2x}{3}\sqrt{px}=\frac{2}{3}xy$.

F.264 1415. Nell'iperbola tra gli asintoti $xy=(989)a^2$, e $\int y dx = \int \frac{a^2 dx}{x} = a^2 lx + C$. Se $x=AD=a$, allora lo spazio Q'ADBN $=a^2 la + C$; dunque BDPM$=a^2 lx - a^2 la = a^2 l\frac{x}{a}$. Quindi se $a^2 = 1$, sarà BDPM$=lx$, logaritmo naturale dell'ascissa AP$=x$; ed ecco perchè chiamansi iperbolici i logaritmi del modulo 1 (454).

265 1416. Nella cissoide $y=\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{(a-x)}}$ (1003), e $\int y dx$=AKMPA$=\int x^{\frac{3}{2}} dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Ora $\int x^{\frac{1}{2}} dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$=ACONP (1412); e se si riduca $\int x^{\frac{1}{2}} dx(a-x)^{\frac{1}{2}}$ a $\int x^{\frac{3}{2}} dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$, si troverà (1343) $\int x^{\frac{1}{2}} dx(a-x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} (a-x)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\int x^{\frac{3}{2}} dx(a-x)^{-\frac{1}{2}}$. Dunque $\int x^{\frac{3}{2}} dx(a-x)^{-\frac{1}{2}} = 3\int x^{\frac{1}{2}} dx(a-x)^{\frac{1}{2}} - 2x(ax-x^2)^{\frac{1}{2}}$, ovvero APMKA$=$3ACONP$-$4ANP$=$3ACONA$-$ANP. Dunque, poichè quando $x=a$, il triangolo ANP svanisce e il segmento ACONA si cangia nel semicircolo ACNB, lo spazio indefinitamente lungo MKABQ è triplo del semicircolo genitore.

266 1417. Nella cicloide BMA, $xdy=dx\sqrt{(2ax-x^2)}$ (1329): ma xdy=MQ.QQ', onde $\int xdy$=BMQ (1410 4°), e $\int dx\sqrt{(2ax-x^2)}$= BOP; dunque tutto lo spazio BMAD eguaglia il semicircolo BOC, e lo spazio cicloidale è triplo del circolo genitore.

267 1418. Nella logaritmica $x=Aly$ (1023), $dx = Ady$, e $\int y dx$=BAPM$=Ay+C$: ma quando $y=1$=AB, lo spazio ABMP diventa nullo; dunque $C=-A$, e ABMP$=A(y-1)$= al rettangolo OIQM. Se si fa $y=0$, si avrà lo spazio indefinitamente lungo BXYA$=-A$= al rettangolo PQIT.

268 1419. L'espressione $S=\int y dx$ suppone la curva a ordinate parallele. Per le curve polari e spirali, condotti i raggi vettori CM$=y$, C$m=y'$, e chiamati S, S' i settori ACM, ACm, ed x l'angolo ACM, o l'arco o ascissa BM che lo misura, avremo come sopra (1411) MC$m=S-S=\delta S=\frac{dS}{dx}\delta x+\frac{d^2 S}{2dx^2}\delta x^2+$ ec. Or si prolunghi l'arco BM fino in r, e si descriva con l'altro raggio Cm l'arco mr'; avremo due settori circolari MCr= (637) $\frac{1}{2}y^2\delta x$, mC$r'=\frac{1}{2}y'^2\delta x=\frac{1}{2}\delta x(y+\frac{dy}{dx}\times\delta x+\frac{d^2 y}{2dx^2}\delta x^2+\text{ec.})^2=\frac{1}{2}y^2\delta x+y\frac{dy}{dx}\delta x^2+$ec; e poichè il primo è visibilmente minore, l'altro maggiore dell'area MC$m=\delta S$, sarà dunque per il solito principio $\frac{dS}{dx}\delta x=\frac{1}{2}y^2\delta x$, d'onde $dS=\frac{1}{2}y^2 dx$ ed $S=\frac{1}{2}\int y^2 dx$.

1420. Così nella parabola la cui equazione polare è (951) $y=\frac{p}{4\cos^2\frac{1}{2}x}$ sarà $AFM=S=\frac{1}{2}\int y^2 dx=\frac{p^2}{32}\int\frac{dx}{\cos^4\frac{1}{2}x}$, ossia fatto $x=2\varphi$, $AFM=\frac{p^2}{16}\int\frac{d\varphi}{\cos 4\varphi}=$ F.261 (1361) $\frac{p^2}{16}\left(\frac{1}{3}sen\varphi\left(\frac{1}{\cos^3\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}\right)\right)=\frac{p^2}{16}\left(\frac{1}{3}tang\varphi\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}+2\right)\right)=(787.29^2.30)$ $\frac{p^2}{16}(\frac{1}{3}tang^3\varphi+tang\varphi)=\frac{p^2}{16}=(\frac{1}{3}tang^3\frac{1}{2}x+tang\frac{1}{2}x)$, senza costante perchè con $x=0$ deve visibilmente aversi $S=0$.

1421. Nella spirale d'*Archimede*, ove $y=\frac{ax}{2\pi}$ (1027) avremo $S=\frac{1}{2}\int y^2 dx=\frac{a^2}{8\pi^2}\int x^2 dx=\frac{a^2x^3}{3.8\pi^2}$, senza costante, perchè con $x=0$ si ha $S=0$. Fatta $x=2\pi$ avremo $S=\frac{1}{3}a^2\pi$ valore totale dell'area compresa fra l'intera prima spira e il raggio CA. Quest'area è dunque $\frac{1}{3}$ della superficie del circolo GFBA.

1422. Volendo estender la stessa ricerca al caso di una seconda spira, dovremo integrare da $x=2\pi$, valore dell'ascissa al punto ove comincia la seconda rivoluzione del raggio, fino ad $x=4\pi$, valore dell'ascissa al punto ove finisce; poichè siccome il raggio nel secondo ravvolgimento ripercorre di nuovo tutta la superficie già percorsa nel primo, è dunque chiaro che l'integrale qualora si prendesse da $x=0$, conterrebbe due volte l'area abbracciata dalla prima spira. Operando nel suddetto modo troveremo (1363) $S=\frac{7}{3}a^2\pi$, e se da questo valore si toglie $\frac{1}{3}a^2\pi$, area occupata dalla prima spira, rimarrà $2a^2\pi$ per quella interposta tra la prima e la seconda, che sarà dunque doppia del circolo GFBA.

1423. In generale l'area interposta fra le spire consecutive n^{sima} ed $(n+1)^{sima}$ si avrà prendendo l'integrale di $\frac{1}{2}\int y^2 dx$ da $x=2n\pi$ fino ad $x=(n+1)2\pi$, e sottraendone quello da $x=(n-1)2\pi$ fino ad $x=2n\pi$. Ciò darà $S=\frac{a^2\pi}{3}((n+1)^3-n^3)$ $-\frac{a^2\pi}{3}(n^3-(n-1)^3)=2na^2\pi$. L'area richiesta cresce dunque esattamente nel rapporto medesimo del numero delle spire.

Rettificazione delle Curve

1424. Poichè (1310) $ds=\sqrt{(dx^2+dy^2)}$, sarà l'arco AM 269 $=s=\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Posto dunque il valor di dy dato per quello di dx e concluso dall'equazione della curva, e quindi integrando, avremo la lunghezza lineare s dell'arco AM.

F. 262 1425. Esempj. Nel circolo (1308) $dx^2+dy^2=\frac{a^2dx^2}{a^2-x^2}$, e $QM=s=\int\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}=(216)\, x+\frac{x^3}{2.3a^2}+\frac{1.3x^5}{2.4.5a^4}+\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7a^6}+$ ec.

261 1426. Nella parabola, $AM=\int dy\sqrt{\left(1+\frac{4y^2}{p^2}\right)}=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}=(1339)\, C+\frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}+\frac{p}{4}l\left(y+\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}\right)$. Facciamo $y=0$, sarà $C=-\frac{p}{4}l\frac{p}{2}$; dunque $AM=\frac{y}{p}\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}+\frac{p}{4}l2\left(\frac{y+\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}}{p}\right)$.

269 1427. Che se col centro A e col semiasse maggiore $BA=\frac{1}{2}p$ si descriva un' iperbola equilatera BN', lo spazio ABN'Q sarà $\int xdy$ (1410.4°) $=\int dy\sqrt{(y^2+\frac{1}{4}p^2)}$ (980); dunque $AM=\frac{2}{p}\int dy\sqrt{\left(y^2+\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{2}{p}\times$ABN'Q, e però AM$\times\frac{1}{2}p=$ ABN'Q, onde *la rettificazione della parabola dipende dalla quadratura dell' iperbola, e reciprocamente.*

270 1428. Nell'ellisse, supposto il semiasse maggiore $=1$, sarà $y^2=b^2(1-x^2)$, e fatto $1-b^2=e^2$ (946), si ha $BM=\int dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}\times\ldots$ $\left(1-\frac{e^2x^2}{2}-\frac{e^4x^4}{2.4}-\frac{1.3e^6x^6}{2.4.6}-\text{ec.}\right)=\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{e^2}{2}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{e^4}{2.4}\times\ldots$ $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-x^2)}}-\frac{1.3e^6}{2.4.6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$ ec.; e riducendo gl'integrali di ciascun termine a $\int dx(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ (1334) $=$DN, si avrà $BM=\left(1-\frac{e^2}{2^2}-\frac{3e^4}{2^2.4^2}-\frac{3^2.5e^6}{2^2.4^2.6^2}-\frac{3^2.5^2.7e^8}{2^2.4^2.6^2.8^2}-\text{ec.}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}+e^2x(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{3e^2}{2^2.4^2}+\frac{3^2.5e^4}{2^2.4^2.6^2}+\text{ec.}\right)$ $+e^4x^3(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2.4^2}+\frac{3.5e^2}{2.4^2.6^2}+\frac{3.5^2.7e^4}{2.4^2.6^2.8^2}+\text{ec.}\right)+$ec.

La rettificazione dell' iperbola si ha quasi collo stesso metodo, e può vedersi nelle Memorie di Berlino an. 1746 e seg. la maniera di ridurre alla rettificazione di queste due curve gli integrali d' un gran numero d' altri differenziali.

1429. Nella seconda parabola cubica, $y^3=px^2$ (1011); dunque $s=\int dy\times\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{8}{27}p\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}+C$ (1260.2°), perchè qui $n=0$ ed $m=1$; fatto $y=0$, si ha $C=-\frac{8}{27}p$, e l' arco, preso dall' origine, $=\frac{8}{27}p\left(\left(1+\frac{9y}{4p}\right)^{\frac{3}{2}}-1\right)$. In generale le parabole $y^k=px^{k-1}$, che (preso per k un numero impari comminciando da 3) danno $s=\int dy\left(1+\frac{k^2}{(k-1)^2}\left(\frac{y}{p}\right)^{\frac{2}{k-1}}\right)^{\frac{1}{2}}$, son tutte rettificabili, avendosi in ciascuna (1260.2°) $n=0$, $m=\frac{2}{k-1}$ e $c=\frac{k-3}{2}$.

1430. Nella cicloide, $dy = dx\sqrt{\left(\frac{2a-x}{x}\right)}$ (1329); dunque $s = \int dx \sqrt{\frac{2a}{x}}$ F. 260 $= \text{BM} = 2\sqrt{2ax} = 2\text{BO}$; e fatto $x = 2a$, $s = \text{BMA} = 2\text{BD}$; onde l'intera curva cicloidale è quadrupla del diametro BD (1333).

1431. Nella logaritmica $x = aly$ (1023), $ydx = ady$, $s = \int \frac{dy}{y} \sqrt{(y^2 + a^2)}$: posto $\sqrt{(y^2+a^2)} = z$, si avrà $\frac{dy}{y} = \frac{zdz}{z^2 - a^2}$, ed $s = \int \frac{z^2 dz}{z^2 - a^2} = z + \frac{a}{2} l \frac{z-a}{z+a}$, (1346) $= z + al\sqrt{\frac{z-a}{z+a}} = z + al\left(\frac{\sqrt{(z^2-a^2)}}{z+a}\right) = \sqrt{(y^2+a^2)} + al \times \ldots\ldots$ $\left(\frac{y}{a+\sqrt{(y^2+a^2)}}\right) = \sqrt{(y^2+a^2)} - al\left(\frac{a+\sqrt{(a^2+y^2)}}{y}\right) + C$, espressione di un arco di logaritmica, in cui C è facile a determinarsi (1418).

1432. Nella spirale d'Archimede $ds = \sqrt{(dy^2 + y^2 dx^2)}$ (1314); ma $x = \frac{2\pi y}{a}$ 271 (1027), dunque $s = \text{COM} = \frac{2\pi}{a} \int dy \sqrt{\left(y^2 + \frac{a^2}{4\pi^2}\right)}$. Descritta una parabola CN' con $p = \frac{a}{\pi}$. Fatto $\text{CQ} = \text{CM} = y$, e condotta l' ordinata QN', sarà $\text{CN}' = \frac{2\pi}{a} \int dy \times \sqrt{\left(\frac{a^2}{4\pi^2} + y^2\right)}$ (1426); dunque $\text{CN}' = \text{COM}$: onde regna dell' analogia tra questa spirale e la parabola.

1433. Nella spirale logaritmica, ove $y = Ae^{x:c}$ (1047), e quindi fatto $A = 1$, 202 $ydx = cdy$, sarà $ds = dy\sqrt{(1+c^2)}$, ovvero, per esser $c = tang\,\text{CMT}$ (*ivi*), $ds = \frac{dy}{cos\,\text{CMT}}$ (787.14°); dunque $s = \frac{y}{cos\,\text{CMT}} = \text{MT}$ atteso il triangolo MCT rettangolo in C (1026). Non si è aggiunta la costante perchè $y = 0$ dà evidentemente $s = 0$. Apparisce frattanto di quì che questa spirale quantunque faccia un' infinità di giri intorno al centro (1047.1°), pure ha una lunghezza finita, la quale nel caso di $cos\,\text{CMT} = \frac{1}{2}$, ossia $\text{CMT} = 60°$ (781.2°), equivale al doppio del raggio vettore.

Misura delle Solidità

1434. Un solido S da misurarsi s'immagini decomposto in un'infinità di piccoli strati paralleli: chiamando t la base d'uno di essi, dz l'altezza, o una parte infinitesima della sua distanza z dal vertice, tdz ne sarà il volume (740), che essendo il differenziale del solido dà dunque $S = \int tdz$. E si noti 1°. che se il solido è di rivoluzione, t potrà esser circolo, di cui chiamato y il raggio, avremo $t = y^2\pi$ (637), e quindi $S = \pi \int y^2 dz$; 2°. se

sia piramidale dell' altezza a e base b, onde (716) $b:t::a^2:z^2$, avremo $S=\frac{b}{a^2}\int z^2dz=\frac{bz^3}{3a^2}+C$, ove $z=0$ dà $S=0$ e $C=0$, e $z=a$ dà per l' intera piramide $S=\frac{ab}{3}$ (744).

3°. Poichè (1409) $t=\int ydx=\int\int dydx$, sarà dunque $S=\int tdz=\int\int ydxdz$ $=\int\int\int dxdydz$, purchè rapporto alle integrazioni si osservino le avvertenze date altrove (1410.3°).

1435. Nella sfera $y^2=2ax-x^2$; dunque per la solidità di un segmento sferico in cui $z=x$, si avrà $S=\pi\int(2ax-x^2)dx$ $=\pi x^2(a-\frac{1}{3}x)$ (776). La costante non ha luogo, perchè con $x=0$ si ha $S=0$. Fatto $x=2a$, si ha per la solidità della sfera $S=\frac{4}{3}a^3\pi$ (773).

1436. Nell' ellisse $y^2=\frac{b^2}{a^2}(2ax-x^2)$; d'onde, operando come per la sfera, $S=\frac{b^2\pi x^2}{a^2}(a-\frac{1}{3}x)$. Fatto $x=2a$ avremo per l'*ellissoide* intera $S=\frac{4}{3}ab^2\pi$; dunque il solido generato dalla rivoluzione dell' ellisse intorno all' asse maggiore sta alla sfera circoscritta :: $b^2:a^2$, ed è inoltre $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto.

1437. Si chiama *ellissoide allungata* quella che abbiamo considerata, ed *ellissoide compressa* quella che è formata dalla rivoluzione dell' ellisse intorno al suo asse minore. È facile il trovare, che anche quest' ultimo solido è $\frac{2}{3}$ del cilindro circoscritto. Dunque l' ellissoide allungata sta all' ellissoide compressa $::ab^2:a^2b::b:a$.

1438. Nella parabola $y^2=px$; e fatto $z=x$ si avrà per un segmento paraboloidale $S=\pi\int pxdx=\frac{\pi px^2}{2}=\frac{\pi y^2x}{2}$, metà del cilindro circoscritto.

In tutte le parabole $y^m=x^na^{m-n}$ (1011), e $\int\pi y^2dx=$ . . . .
$\frac{m\pi\sqrt[m]{a^{2m-2n}x^{2n+m}}}{2n+m}=\frac{m\pi x\sqrt[m]{a^{2m-2n}x^{2n}}}{2n+m}=\frac{m\pi xy^2}{2n+m}$, e perciò il solido starà al cilindro circoscritto $::m:m+2n$.

1439. Similmente se l' iperbola, la cui equazione è $y^mx^n=a^{m+n}$, gira intorno all' asintoto CP, prendendo CD $=$ AD $=a$, il solido descritto dal trapezio ADPM avrà per espressione $\frac{m}{2n-m}\pi(a^3-xy^2)$, e perciò supposto $2n>m$, il solido descritto dallo spazio indefinitamente lungo OADX sta al cilindro descritto da AECD $::m:2n-m$, e nell' iperbola ordinaria è eguale a questo cilindro.

F. 272

Superficie dei Solidi

1440. Se la superficie da misurarsi si divida in un' infinità di piccole zone prima parallelamente al piano delle xz, poi parallelamente al piano delle yz, si troverà decomposta in infiniti rettangoli coi lati diretti nel senso delle coordinate y, x, ciascun dei quali potrà considerarsi come piano, e sarà l' elemento della superficie cercata.

Per determinarne l'espressione rammenteremo primieramente che l'area d'una figura comunque inclinata sopra di un piano eguaglia quella della sua projezione divisa per il coseno della sua inclinazione θ (1125). Frattanto se dal punto A, che prendo per origine delle coordinate, si conduca AG normalmente al piano della figura, e da G la GT perpendicolare a quello di projezione, che suppongo essere il piano delle xy, fatta AG$=r$, e supposte x, y, z le coordinate di G, avremo GT$=z$, e $sen\text{TAG}=\frac{z}{r}=cos\theta$. Ma in primo luogo (1074) $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$, e perciò $x^2+y^2+z^2-r^2=0$, (1272) $x+z\left(\frac{dz}{dx}\right)=0$, $y+z\left(\frac{dz}{dy}\right)=0$; dunque $\frac{z}{r}=\frac{1}{\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}}$. Inoltre se S rappresenti il nostro rettangolo elementare che, come osservammo, ha i lati nel senso delle x e delle y, S' sua projezione sul piano delle xy dovrà eguagliare il prodotto $dxdy$ dei differenziali di queste variabili: dunque sostituito l' uno e l' altro valore avremo infine $S=dxdy\sqrt{\left(1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right)}$, differenziale di second' ordine, che integrato due volte darà la superficie cercata.

F. 273

1441. Se il solido è di rivoluzione, generato dal poligono AMBC, in cui AM $=s$, MP$=y$, può aversene più speditamente la superficie. Poichè immaginandola divisa in infinite zone Mm' con sezioni normali all' asse del solido, ciascuna di queste rappresenterà un cono troncato, la cui superficie (761) $2\pi(2y+dy)\times\frac{ds}{2}=2\pi y ds$ sarà l' elemento della cercata, onde avremo $S=2\pi\int y ds=$ (1310) $2\pi\int u dx$. Dunque nella sfera (1308) $S=2a\pi x$, e fatto $x=2a$, sarà $S=4a^2\pi$ superficie totale (764).

274

1442. Nella parabola $S=$ (952) $2\pi\int dx\sqrt{\left(px+\frac{p^2}{4}\right)}=\frac{4\pi}{3p}\sqrt{\left(px+\frac{1}{4}p^2\right)^3}+C$ (1260.2°). Sia $x=0$, sarà $C=-\frac{\pi p^2}{6}$.

1443. Nell' ellisse, fatto a il semiasse di rivoluzione, che sarà il trasverso nell' ellissoide allungata e il coniugato nella compressa, e posto nei due diversi casi

$\pm a^2 \mp b^2 = e^2$, si avrà (968.2°) $n = \frac{be}{a^2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} \mp x^2\right)}$; e però se la curva giri o

F. 275 intorno ad AA o intorno ad EE, si avrà $\frac{2be\pi}{a^2} \int dx \sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} \mp x^2\right)}$. Nel primo caso, descritto col raggio $CD = \frac{a^2}{e}$ un arco DBN, la superficie fatta da AM intorno ad AA sarà (1442) $\frac{2be\pi}{a^2}$ ABNP; ma nel secondo, determinata C col porre $x=0$, sarà (1339) $\frac{be\pi x}{a^2} \sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} + x^2\right)} + \frac{a^2 b\pi}{e} l \frac{e}{a^2} \left(x + \sqrt{\left(\frac{a^4}{e^2} + x^2\right)}\right)$.

1444. Nell' iperbola fatto a il semiasse di rivoluzione che può essere o il trasverso o il coniugato, e posto $a^2 + b^2 = e^2$, si avrà (986) $n = \frac{be}{a^2} \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{e^2}\right)}$,

276 e però se la curva giri o intorno a CA o intorno a CQ, si avrà $\frac{2be\pi}{a^2} \int dx \times \sqrt{\left(x^2 \mp \frac{a^4}{e^2}\right)}$. Nel primo caso, determinata C col fare $x=a$, la superficie cercata sarà (1339) $\frac{be\pi x}{a^2} \sqrt{\left(x^2 - \frac{a^4}{e^2}\right)} - b^2\pi - \frac{a^2 b\pi}{e} l \frac{ex + \sqrt{(e^2 x^2 - a^4)}}{a(e+b)}$, ma nel secondo, determinata C con fare $x=0$, sarà $\frac{be\pi x}{a^2} \sqrt{\left(x^2 + \frac{a^4}{e^2}\right)} + \frac{a^2 b\pi}{e} l \left(\frac{ex}{a^2} + \ldots . \sqrt{\left(1 + \frac{e^2 x^2}{a^4}\right)}\right)$.

Cenni sul Calcolo delle Variazioni

1445. Oltre quel genere di *Massimi* e *Minimi*, di cui parlammo (1304), un altro ve ne è più elevato, che ha data origine al *Calcolo delle Variazioni*. In quello si cerca il massimo o minimo valore di una funzione, che è data; in questo si vuol la funzione, che fra tutte quelle di un genere determinato è massima o minima. Così il problema di determinare nel circolo la massima ordinata, riguarda il primo genere; ma quello di trovar tra tutte l' isoperimetre la curva della massima area, appartiene al secondo. È vero che ambedue i generi dipendono dagli stessi principj, e che alcuni problemi spettanti al secondo posson trattarsi anche coi metodi del primo; ma tali soluzioni son per lo più assai complicate e poco naturali.

277 1446. Sia BD una curva, che abbia per asse la retta $AE = a$, fatta $AP = x$, $PM = z = \varphi(x)$, se si prenda $PT = dx$, e si conduca l' ordinata TV, sarà PMVT $= z dx$ (1409), $ABMP = \int z dx$, che va a zero se $x = 0$, e diviene ABDE se $x = a$. Chiamisi H l' area ABDE; dunque se, stando ferma l' ascissa, z varj in più o in meno di una quantità infinitesima Mf, e sia δ la *caratteristica della variazione*, come d lo è della differenziazione, avremo $Mf = \delta z$ *variazione* di z,

MfiV$=\delta z dx$ *variazione* di $zdx=$PMVT, BCfM$=\int\delta z dx$ somma degli elementi MfiV e *variazione* dell'area ABMP, e BCKD$=\delta H$ *variazione* dell'area ABDE$=H$. Quindi se H debba essere un massimo o un minimo, bisognerà che l'area BCKD si annulli, e sarà $\delta H=\delta$ABDE$=\delta\int zdx=0$ (1304), preso l' integrale da $x=0$ fino ad $x=a$. Di qui si avrà la relazione tra x e z, o l'equazione alla curva, che ha la proprietà del massimo o del minimo.

1447. Il calcolo delle variazioni deve dunque insegnarci a trovar la variazione di H o il valor di δH, che andando poi a zero determina il cercato massimo o minimo; ed eccone intanto i principj.

1.° Poichè z, z' divengono $z+\delta z$, $z'+\delta z'$, e $z'=z+dz$ (1214), dunque $\delta z'=\delta z+\delta dz$, e $\delta dz=\delta z'-\delta z=d\delta z$ (*ivi*), cioè *la variazione della differenza d'una variabile eguaglia la differenza della sua variazione*. Perciò scrivendo dz invece di z, sarà $\delta d^2 z=d\delta dz=d^2\delta z$, e di nuovo scritto qui dz in luogo di z, verrà $\delta d^3 z=d\delta d^2 z=d^2\delta dz=d^3\delta z$; e in generale $\delta d^n z=d^n\delta z$, o preso $m<n$, $\delta d^n z=d^m\delta d^{n-m} z$.

2.° Supposto $u=\int zdx$, sarà, variando, $\delta u=\delta\int zdx$, e differenziando $du=zdx$; dunque $\delta du=d\delta u=\delta zdx$, e integrando, $\delta u=\int\delta zdx=\delta\int zdx$, cioè *la variazione dell'integrale* $\int$zdx *eguaglia l'integrale della variazione di* zdx. Perciò scrivendo $\int z$ invece di z, avremo $\int\delta\int zdx=\delta\int\int zdx=\int\int\delta zdx$, ec.

3.° Cangiandosi z in $z\pm dz$ nella differenziazione, ed in $z\pm\delta z$ nella variazione, non ostante la diversità tra le differenze e le variazioni, *si ha la variazione di* z *come se ne ha la differenza*, purchè in luogo di dz, dy si scriva δz, δy, e si faccia x costante; così la variazione di $z=ax^2y+bxy^2$ sarà $\delta z=ax^2\delta y+2bxy\delta y$, ec.

1448. Dunque $\delta(zdx)=dx\delta z+z\delta dx$: ma $\delta dx=d\delta x=0$; dunque $\delta(zdx)=dx\delta z$, e $\int\delta(zdx)=\int dx\delta z=\delta\int(zdx)$(1447.2.°). Parimente se $z=\varphi(x,y,p,q,\text{ec})$, e $p=\frac{dy}{dx}$, $q=\frac{d^2y}{dx^2}$, $r=\frac{d^3y}{dx^3}$, ec., sarà 1.° $\delta p=\frac{\delta dy}{dx}$ (1447. 3.°)$=\frac{d\delta y}{dx}$ (1447. 1.°), $\delta q=\frac{\delta d^2y}{dx^2}=\frac{d^2\delta y}{dx^2}$, $\delta r=\frac{\delta d^3y}{dx^3}=\frac{d^3\delta y}{dx^3}$, ec.; 2.° $\delta(zdx)=dx\delta z=dxQ\delta y+dxR\delta p+dxS\delta q+\text{ec.}=Qdx\delta y+Rd\delta y+\frac{Sd^2\delta y}{dx}+\text{ec.}$; 3.° $\int\delta zdx=\delta\int zdx$ (1447. 2.°)$=\int Qdx\delta y+\int Rd\delta y+\int\frac{Sd^2\delta y}{dx}+\text{ec.}$: ma $\int Rd\delta y=R\delta y-\int dR\delta y$ (1263)$=R\delta y-\int\frac{dxdR\delta y}{dx}$, e parimente $\int\frac{Sd^2\delta y}{dx}=\frac{Sd\delta y}{dx}-\int\frac{dSd\delta y}{dx}=\frac{Sd\delta y}{dx}-\frac{dS\delta y}{dx}+\int\frac{d^2S\delta y}{dx}=\frac{Sd\delta y}{dx}-\frac{dS\delta y}{dx}+\int\frac{d^2Sdx\delta y}{dx^2}$, ec.; dunque $\delta\int zdx=\int dx\delta y\left(Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-\text{ec.}\right)+\delta y\left(R-\frac{dS}{dx}+\text{ec.}\right)+\frac{d\delta y}{dx}(S-\text{ec.})+\text{ec.}$, ed

avremo il massimo o minimo richiesto se porremo $Q-\frac{dR}{dx}+\frac{d^2S}{dx^2}-\text{ec.}=0$, e se, dopo aver integrata quest'equazione fra i limiti $x=0$, $x=a$ (1446), e dopo aver soddisfatte le altre condizioni del problema, giungeremo a determinar le costanti rimaste disponibili in modo che si abbia $R-\frac{dS}{dx}+\text{ec.}=0$, $S-\text{ec.}=0$, ec. L' integrale di $Q-\frac{dR}{dx}+\text{ec.}=0$ preso indefinitamente ci darà frattanto, siccome è chiaro, il rapporto finito fra x ed y, o l'equazione della curva cercata; le costanti determinate nel modo prescritto ce ne faranno conoscere i parametri. Quindi la sola equazione $Q-\frac{dR}{dx}+\text{ec.}=0$ somministrerà quanto bisogna all' intento, qualora non altro si abbia in mira che di conoscer la qualità della curva la quale gode della voluta proprietà del massimo o minimo, ricerca alla quale unicamente ci limiteremo negli esempj seguenti. Avanti però osserveremo: 1.° che le quantità Q, R, S ec. equivalgono precisamente ai coefficienti dei differenziali parziali di z per y, p, q ec.; 2.° che se z non contenga differenziali oltre il primo ordine, l'equazione si ridurrà a $Q-\frac{dR}{dx}=0$, che moltiplicata per $dy=pdx$ darà $Qdy=pdR$: e poichè si ha $dz=Pdx+Qdy+Rdp$, posto il valore di Qdy verrà $dz=Pdx+d(Rp)$, e $z=Rp+\int Pdx+C$. Eguagliato questo valore a quello dell'equazione per la quale vien proposta la ricerca del massimo o minimo, si otterrà un' equazione differenziale fra le sole variabili x ed y, che integrata darà quella della curva richiesta.

I.° Qual' è la curva, in cui $\int zdx=\int\sqrt{\frac{dx^2+dy^2}{y}}$ è un massimo o un minimo? Poichè $\frac{dy}{dx}=p$, verrà $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, onde $z=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$, e $\delta z=\frac{p\delta p}{\sqrt{y(1+p^2)}}-\frac{\delta y\sqrt{(1+p^2)}}{2y\sqrt{y}}$; dunque $P=0$, $R=\frac{p}{\sqrt{y(1+p^2)}}$, e $z=\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}+C$, valore che confrontato coll'altro già trovato $z=\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}$, darà luogo all'equazione $\sqrt{\frac{1+p^2}{y}}=\frac{p^2}{\sqrt{y(1+p^2)}}+C$, d'onde $\sqrt{y(1+p^2)}=\frac{1}{C}=C$. Di qui, restituito il valor di $p=\frac{dy}{dx}$, facilmente trarremo $dx=dy\sqrt{\frac{y}{C^2-y}}$, ovvero posto $x=m-u$, $y=C^2-\omega$, avremo $du=d\omega\sqrt{\frac{C^2-\omega}{\omega}}$, equazione alla Cicloide (1333) curva cercata.

II.° Fra tutte le curve isoperimetre trovar quella in cui l'area $\int ydx$ (1409) è un massimo o un minimo. Giacchè l'espressione della lunghezza di un arco

è (1310) $\int\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ (I.°), e questa per la natura degli isoperimetri non varia, avremo $\delta\int dx\sqrt{(1+p^2)}=0$: ma anche $\delta\int y dx=0$ (1446), convien dunque combinare insieme l'annullamento delle due variazioni, il che si otterrà sommandole, e quindi eguagliando a zero la somma. Dunque il problema si ridurrà a trovar quella curva, nella quale $\int z dx=\int y dx+\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ è un massimo o un minimo. Si avrà pertanto $z=y+\sqrt{(1+p^2)}$, $\delta z=\delta y+\frac{p\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $P=0$, $R=\frac{p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $z=y+\sqrt{(1+p^2)}=\frac{p^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $(C-y)\sqrt{(1+p^2)}=1$, $p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{(1-(C-y)^2)}}{C-y}$, e $dx=\frac{dy(C-y)}{\sqrt{(1-(C-y)^2)}}$; dunque integrando, $x=\sqrt{(1-(C-y)^2)}+C'$, cioè $(C-y)^2=1-(x-C')^2$ equazione al circolo (911), curva richiesta.

III.° Fra tutte le curve isoperimetre trovar quella il cui solido di rivoluzione ha la massima o minima superficie $2\pi\int y\sqrt{(dx^2+dy^2)}$ (1441). Trascurato 2π che è un numero costante, e fatta $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=dx\sqrt{(1+p^2)}$, dovrà essere, come nell'antecedente problema, $\int z dx=\int y dx\sqrt{(1+p^2)}+\int dx\sqrt{(1+p^2)}$ un massimo o un minimo; dunque $z=(y+1)\sqrt{(1+p^2)}$, $\delta z=\delta y\sqrt{(1+p^2)}+\frac{(y+1)p\delta p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, onde $P=0$, $R=\frac{(y+1)p}{\sqrt{(1+p^2)}}$, e $z=(y+1)\sqrt{(1+p^2)}=\frac{(y+1)p^2}{\sqrt{(1+p^2)}}+C$, $C=\frac{y+1}{\sqrt{(1+p^2)}}$, $p=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{C}\sqrt{((y+1)^2-C^2)}$, e $dx=\frac{C dy}{\sqrt{((y+1)^2-C^2)}}$, equazione alla curva volgarmente detta la *Catenaria*, perchè una catena flessibilissima se sia sospesa per le sue estremità, si conforma in questa curva.

Del resto come nel metodo ordinario dei massimi e dei minimi (1304), così nel calcolo delle variazioni è necessario aver qualche regola per distinguere quando ha luogo il massimo e quando il minimo. Ma per questa ricerca, che troppo a lungo ci porterebbe, rimetteremo i nostri lettori ai corsi più del nostro completi. Avvertiremo solo che nei più dei casi la semplice sostituzione di una nuova curva comunque differente dalla trovata, basterà da se sola a risolvere il dubbio.

1449. Già sappiamo che cangiato l'algoritmo d delle differenze infinitesime (1213) nell'algoritmo δ delle finite può aversi (1220) $\delta\varphi(x)=A\delta x+B\delta x^2+C\delta x^3+$ec., essendo A, B, C, ec. i coefficienti delle successive potenze δx, δx^2, δx^3, ec. nello sviluppo di $\varphi(x\pm\delta x)$, e che posson determinarsi coi metodi già accennati nel Calcolo differenziale (1281).

1450. Dunque $\delta(x^n)=nx^{n-1}\delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\delta x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}x^{n-3}\delta x^3+$ec. All'opposto preso σ per il segno integrale particolarmente riferito a questo genere di differenze, avremo $\sigma(nx^{n-1}\delta x+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\delta x^2+\text{ ec.})=x^n+C$. Sia δx costante, e 1.° $n=1$; dunque $\sigma\delta x=$ (1256) $\delta x\sigma 1=x$, e $\sigma 1=\frac{x}{\delta x}$; 2.° $n=2$; dunque $\sigma(2x\delta x+\delta x^2)=2\delta x\sigma x+\delta x^2\sigma 1=x^2$, e $\sigma x=\frac{x^2}{2\delta x}-\frac{x}{2}$; 3.° $n=3$; dunque $\sigma(3x^2\delta x+3x\delta x^2+\delta x^3)=3\delta x\sigma x^2+3\delta x^2\sigma x+\delta x^3\sigma 1=x^3$, e $\sigma x^2=\frac{x^3}{3\delta x}-\frac{x^2}{2}+\frac{x\delta x}{6}$, ec.; onde se $\delta x=1$, verrà $\sigma 1=x$, $\sigma x=\frac{1}{2}(x^2-x)$, $\sigma x^2=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$; e parimente troveremo $\sigma x^3=\frac{x^2(x-1)^2}{4}$, $\sigma x^4=\frac{x}{30}\times(6x^4-15x^3+10x^2-1)$, $\sigma x^5=\frac{x^2}{12}(2x^4-6x^3+5x^2-1)$, ec. aggiunta a quest'integrali la debita costante.

1451. Ma debba differenziarsi il prodotto $y=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)$, supposta $\delta x=1$. Avremo (1215) $\delta y=(x+1)x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)-x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)(x+1-x+n)=x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\times(n+1)$. Dunque $\sigma\left\{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)\right\}=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{n+1}+C$; e se si cangi n in $n+1$, avremo egualmente $\sigma\left\{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n)\right\}=\frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-n-1)}{n+2}+C$.

1452. Si trova nel modo stesso $\delta\left\{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)\right\}=(x+1)\times(x+2)(x+3)\ldots(x+n)(n+1)$; e $\sigma\left\{x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)\right\}=\ldots\ldots\ldots\frac{(x-1)x(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}{n+2}+C$.

1453. Sia da differenziarsi $y=2x(2x-1)(2x-2)\ldots(2x-n)$, supposta $\delta x=1$: avremo $\delta y=(2x+2)(2x+1)2x(2x-1)\ldots(2x-n+2)-2x(2x-1)(2x-2)\ldots$

$(2x-n+2)(2x-n+1)(2x-n)=2x(2x-1)(2x-2)...(2x-n+2)((2x+2)(2x+1)$ $-(2x-n+1)(2x-n))=2x(2x-1)(2x-2)...(2x-n+2)(4x+4nx-n^2+n+2)$ $=2x(2x-1)(2x-2)....(2x-n+2)(n+1)(4x-n+2)$; e quindi $\sigma(2x(2x-1)\times$ $(2x-2)...(2x-n+2)(4x-n+2))=\frac{2x(2x-1)(2x-2)...(2x-n)}{n+1}$. Quindi cangiando n in $n-2$, $\sigma(2x(2x-1)(2x-2)....(2x-n+4)(4x-n+4))=$ . . . . . . $\frac{2x(2x-1)(2x-2)...(2x-n+2)}{n-1}$. Avremo egualmente . . . .

$$\sigma\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m)(mx+a+2m)...(mx+a+nm)}=-\frac{1}{mn}\times \dots\dots$$
$$\frac{1}{(mx+a)(mx+a+m).....(mx+a+(n-1)m)}.$$

1454. Abbiasi $y=a^x$: sarà $\delta y=\delta a^x=a^{x+\delta x}-a^x=a^{x+1}-a^x=a^x(a-1)$, e quindi $\sigma a^x=\frac{a^x}{a-1}+C$. Sarà pure $\delta(a^x x)=a^{x+1}(x+1)-a^x x=a^x x(a-1)+a^{x+1}$; d' onde $\sigma a^x x=\frac{a^x x-\sigma a^{x+1}}{a-1}=\frac{(a-1)a^x x-a^{x+1}}{(a-1)^2}=\frac{a^x(ax-x-a)}{(a-1)^2}+C$. Così si troverebbe la differenza e la somma di $a^x x^2$, $a^x x^3$, ec.

1455. Parimente se sia $y=\frac{1}{a^x}$, sarà $\delta y=\frac{1}{a^{x+1}}-\frac{1}{a^x}=\frac{1-a}{a^{x+1}}$. Di quì $\sigma\frac{1}{a^{x+1}}=C-\frac{1}{a^x(a-1)}=\frac{Ca^x-1}{a^x(a-1)}$, e $\sigma\frac{1}{a^x}=\frac{Ca^{x-1}-1}{a^{x-1}(a-1)}$.

1456. Abbiasi $y=lCa^x$. Poichè $lCa^x=lC+xla$, sarà $\delta y=lC+(x+1)la-lC-xla=la$. Di quì $\sigma la=lCa^x$.

1457. Sia $y=lC(x-1)(x-2)(x-3)...3.2.1$; avremo $\delta y=lCx(x-1)(x-2)\times$ $...4.3.2-lC(x-1)(x-2)(x-3)...3.2.1=lx$. Dunque $\sigma lx=lC(x-1)(x-2)(x-3)\times$ $...3.2.1$. Cangiato x in $x+a$, tutti i fattori del secondo membro, ad eccezione della costante C, cresceranno di a, ed avremo $\sigma l(x+a)=lC(x+a-1)(x+a-2)\times$ $(x+a-3)...(a+3)(a+2)(a+1)$.

1458. Abbiasi frattanto $p=\frac{x+a}{x+b}$, e vogliasi σlp. Poichè $lp=l(x+a)-$... $l(x+b)$, sarà $\sigma lp=\sigma l(x+a)-\sigma l(x+b)=lC(x+a-1)(x+a-2)(x+a-3).......$ $(a+3)(a+2)(a+1)-l(x+b-1)(x+b-2)(x+b-3).........(b+3)(b+2)(b+1)=$ $lC\frac{x+a-1}{x+b-1}\times\frac{x+a-2}{x+b-2}\times\frac{x+a-3}{x+b-3}\times...\times\frac{a+3}{b+3}\times\frac{a+2}{b+2}\times\frac{a+1}{b+1}=lC\pi p$, inteso per πp il prodotto degli $x-1$ fattori che si formano ponendo $x-1$, $x-2$, $x-3$, ec. in luogo di x in p. Che se p è un prodotto di due o più fattori p', p'', ec. di primo grado e della forma $\frac{a+x}{b+x}$, $\frac{a'+x}{b'+x}$, ec. sarà $\sigma lp=\sigma lp'p''$ ec. $=\sigma lp'+\sigma lp''+$

ec. $=lC\pi p' + l\pi p'' + \text{ec.} = lC\pi p' \times \pi p'' \times \text{ec.}$, avremo cioè σlp moltiplicando fra loro i prodotti parziali $C\pi p'$, $\pi p''$, ec., e prendendo il logaritmo del prodotto totale.

1459. Vogliasi la differenza e la somma di $sen x$, e di $cos x$. Avremo $\delta sen x = sen(x+\delta x) - sen x = (796.80^a) 2 sen \frac{1}{2}\delta x cos(x+\frac{1}{2}\delta x)$, $\delta cos x = cos(x+\delta x) - cos x = -2 sen \frac{1}{2}\delta x sen(x+\frac{1}{2}\delta x)$. In altra guisa, $\delta sen x = sen(x+\delta x) - sen x = sen x \times cos\delta x + cos x sen \delta x - sen x = sen x(cos\delta x - 1) + cos x sen\delta x$; $\delta cos x = cos(x+\delta x) - cos x = cos x cos\delta x - sen x sen\delta x - cos x = cos x(cos\delta x - 1) - sen x sen\delta x$. Di quì $sen x = (cos\delta x - 1)\sigma sen x + sen\delta x \sigma cos x$, e $cos x = (cos\delta x - 1)\sigma cos x - sen\delta x \times \sigma sen x$; d' onde facilmente $\sigma sen x = -\frac{(1-cos\delta x) sen x + sen\delta x cos x}{2(1-cos\delta x)} + C$, $\sigma cos x = \frac{sen\delta x sen x - (1-cos\delta x) cos x}{2(1-cos\delta x)} + C$.

1460. Sia infine $y=\varphi x$ funzione qualunque di x. Sarà $\delta y = \varphi(x+1) - \varphi x$; e quindi integrando per parti (1349) $\sigma\varphi(x+1) = \varphi x + \sigma\varphi x$. Dunque $\sigma\varphi x = \varphi(x-1) + \sigma\varphi(x-1)$, $\sigma\varphi(x-1) = \varphi(x-2) + \sigma\varphi(x-2)$; $\sigma\varphi(x-2) = \varphi(x-3) + \sigma\varphi(x-3)$; ec; valori che introdotti gli uni negli altri daranno $\sigma\varphi x = \varphi(x-1) + \varphi(x-2) + \varphi(x-3) + \text{ec.} + \varphi(x-n) + \sigma\varphi(x-n)$, o semplicemente $\sigma\varphi x = \varphi(x-1) + \varphi(x-2) + \varphi(x-3) + \varphi(x-4) + \text{ec.} + \varphi(x-n)$, qualora non voglia estendersi l' integrale che fino ad $x=n$, nel qual caso $\sigma\varphi(x-n)$, che contiene la parte indefinita residua, non ha più luogo. Che se n rappresenti tutto intero il valore di x, in modo che x non possa esser $>n$, sarà $x-n=0$, $\varphi(x-n)$ diverrà costante, e l' ultimo dei due valori di $\sigma\varphi x$ darà l' integrale completo. Così avremo $\sigma a^x = a^{x-1} + a^{x-2} + \ldots\ldots a^{x-3} + \text{ec.} + a^2 + a + a^0 = (372) \frac{a^x - 1}{a-1}$, il che, ponendo $C = -\frac{1}{a-1}$, coincide con quanto trovammo sopra (1454).

1461. Passiamo dopo tutto questo a integrare l' equazione lineare di prim' ordine $y' - py - X = 0$, ove $y' = y + \delta y$, e p ed X son funzioni di x. Fatto $y = rz$, onde $\delta y = r\delta z + z\delta r + \delta r\delta z$, l' equazione si cangerà in $rz(p-1) - r\delta z - z\delta r - \delta r\delta z + X = 0$; e se sia $rz(p-1) - z\delta r = 0$, ovvero I^a. $pr = r + \delta r$, verrà $r\delta z + \delta r\delta z = X$, ovvero II^a. $\delta z = \frac{X}{pr}$. La I^a. s' integra riducendola a $lp = l(r+\delta r) - lr = (1215)\, \delta(lr)$, onde $lr = \sigma lp$, ed $r = e^{\sigma lp} = (1458) e^{lC\pi p} = (444\ 3^o) C\pi p$. Quindi la II^a. darà $\delta z = \frac{X}{p \times C\pi p}$, $z = \frac{y}{r} = \sigma \frac{X}{p \times C\pi p} + C'$, ed $y = \pi p\left(\sigma \frac{X}{p \times \pi p} + C\right)$. Così data $y + (x+1)\delta y + b(2x+1) = 0$ che, introdotto il valor di $\delta y = y' - y$, si cangia in $y' - \frac{x}{x+1} y + \frac{b(2x+1)}{x+1} = 0$, sarà $p = \frac{x}{x+1}$, $\pi p = \frac{x-1}{x} \cdot \frac{x-2}{x-1} \cdot \frac{x-3}{x-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{x}$, $p \times \pi p = \frac{1}{x+1}$, $X = -\frac{b(2x+1)}{x+1}$, ed $y = \frac{1}{x}(C - b\sigma(2x+1)) = (1450) \frac{C}{x} - bx$.

1462. Se $p=a$ costante, sarà $\sigma lp = \sigma la = (1456) lCa^x = (1458)\, lC\pi p$; dunque

$\pi p = Ca^x$, $p \times \pi p = Ca^{x+1}$, ed $y = Ca^x\left(\sigma\frac{X}{Ca^{x+1}}+C\right) = a^x\left(\sigma\frac{X}{a^{x+1}}+C\right)$.
E se sia costante anche $X=g$, avremo $\sigma\frac{X}{a^{x+1}} = g\sigma\frac{1}{a^{x+1}} = (1455) C - \ldots$ $\frac{g}{a^x(a-1)}$, ed $y = a^x\left(C - \frac{g}{a^x(a-1)}\right) = Ca^x - \frac{g}{a-1}$.

1463. Sciogliesi con quest' ultima formula il bel problema già proposto altrove (487). Chiamata c la sorte, m il frutto semplice ed annuo di una lira, t gli anni in cui vuol consumarsi e sorte e frutti, ed s la somma costante da spendersi annualmente, supporrò che nell' anno x la sorte sia ridotta ad y, onde tra sorte e frutti si abbia $y(1+m)$; e giacchè in quest' anno si spende s, la sorte nel seguente anno $x+1$ sarà $y' = (m+1)y - s$, equazione da cui si ha $p = a = m+1$, $X = g = -s$, ed $y = C(m+1)^x + \frac{s}{m}$. Ma quando gli anni sono $x=1$ si ha la sorte $y=c$, dunque $c = C(m+1) + \frac{s}{m}$; d' onde $C = \frac{mc-s}{m(m+1)}$, ed $y = \frac{1}{m}\left\{(mc-s)(m+1)^{x-1} + s\right\}$. Or tutto questo vuol consumarsi negli anni $x=t$, e perciò nell' anno $x=t+1$ deve aversi $y=0$, sarà dunque $0 = (mc-s)(m+1)^t + s$, e di qui $s = \frac{mc(m+1)^t}{(m+1)^t - 1}$, somma cercata.

1464. Del resto la formula $y = \pi p\left(\sigma\frac{X}{p \times \pi p} + C\right)$ benchè fondata sull'ipotesi di $\partial x = 1$, può anche applicarsi al caso di $\partial x = m$, purchè prima d' integrare si ponga $x = mu$. Infatti è manifesto, che allora si avrà $\partial x = m = m\partial u$; e per conseguenza $\partial u = 1$.

1465. Sia anche l' equazione lineare del second' ordine $y + a\partial y + b\partial^2 y = X$, in cui a, b sono costanti, e $\partial x = 1$. Applicando il metodo dei coefficienti indeterminati (1389), giungeremo primieramente all' equazione $u - m\partial u = X$, e in seguito all' altra $y = \frac{(a+m')u'' - (a+m'')u'}{m' - m''}$, essendo m', m'' i due valori di m dati dall' equazione $m^2 + am + b = 0$, ed u', u'' i due valori di u, che risultano dal porre i valori di m in quello di u. Quanto poi all'integrale di $u - m\partial u = X$, si ponga il valore di $\partial u = u' - u$, con che l' equazione si cangia in $u' - u\left(1 + \frac{1}{m}\right) + \frac{X}{m} = 0$; fatta per comodo la costante $1 + \frac{1}{m} = h$, e però $m = \frac{1}{h-1}$, si avrà (1461) $u = h^x\left(C + \left(h-1\right)\sigma\frac{X}{h^{x+1}}\right)$; e se anche X fosse costante, verrebbe $u = Ch^x - X$ (ivi).

1466. Sia data una serie ricorrente (424) con la scala $q, +r$, e se ne voglia il termine generale yx^n. Supposto y il general coefficiente della serie ec. ${}'yx^{n-1}$, yx^n, $y'x^{n+1}$, $y''x^{n+2}$, ec. ed n il numero dei termini, la cui differenza costante è $\delta n = 1$, si avrà $y'' = qy' + ry$ (424.2°): ma $y' = y + \delta y$, $y'' = y' + \delta y' = y + 2\delta y + \delta^2 y$ (1217); dunque $y + \frac{(2-q)\delta y + \delta^2 y}{1-q-r} = 0$, che paragonata con l'equazione di sopra (1465) ci dà $a = \frac{2-q}{1-q-r}$, $b = \frac{1}{1-q-r}$, $X = 0$, $m' = \frac{q-2+\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}$, $m'' = \frac{q-2-\sqrt{(q^2+4r)}}{2(1-q-r)}$, $h' = 1 + \frac{1}{m'}$, $h'' = 1 + \frac{1}{m''}$, $u' = Ch'^n$, $u'' = C'h''^n$, ed $yx^n = \frac{((a+m')u'' - (a+m'')u')x^n}{m'-m''}$. Così, data la serie $1 + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 +$ ec. $= 1x^0 + 0x + 2x^2 + 2x^3 + 6x^4 +$ ec. con la scala di relazione $1, +2$, sarà $q = 1$, $r = 2$, $a = -\frac{1}{2}$, $m' = -\frac{1}{2}$, $m'' = 1$, $h' = -1$, $h'' = 2$, $u' = C(-1)^n$, $u'' = C'2^n$, $y = \frac{1}{3}C'2^{n+1} + \frac{1}{3}C(-1)^n$; e poichè fatto $n = 0$, si ha dalla serie $y = 1$, e fatto $n = 1$, si ha $y = 0$, le due equazioni $1 = \frac{2}{3}C' + \frac{1}{3}C$, $0 = \frac{4}{3}C' - \frac{1}{3}C$ danno $C' = \frac{1}{2}$, $C = 2$, ed $yx^n = \frac{1}{3}(2^n \pm 2)x^n$, preso il segno $-$ se n è impari.

1467. Ma uno degli usi più belli che far si sogliono delle differenze finite si riferisce al calcolo delle probabilità nei giochi d' azzardo. Eccone qualche esempio.

1°. Sono in un' urna m palle bianche, n nere. B scommette contro C, che sortiranno a palle bianche prima che b palle nere. Manca a B un tiro perchè guadagni, ne mancano x a C. Supponendo che le palle estratte non si ripongano nuovamente nell' urna, si domanda la probabilità dei due giocatori.

Saranno dunque $m-a+1$ le palle bianche, $n-b+x$ le nere residue nell' urna. La lor somma $m-a+1+n-b+x$ darà il numero dei casi possibili, e fatto per comodo $m-a+1 = \alpha$, $n-b = \beta$, $\alpha + \beta = \gamma$, sarà $\Pi = \frac{\alpha}{\gamma + x}$ la probabilità per il caso favorevole a B, e $\Pi' = \frac{\beta + x}{\gamma + x}$ quella per il caso contrario (407). Or la probabilità di guadagnar la scommessa non si ristringe per B a quella unicamente che può avere di vincere il tiro. Perdendolo, siccome anche altrove si osservò (412), egli ha luogo di sperar nei seguenti: onde se sia y la sua totale probabilità prima del tiro, supposto ancora che questo gli sia contrario, rimarrà sempre con la probabilità ${}'y$, che sarà funzione di $x-1$, come y lo è di x, e varrà ${}'y\Pi'$ prima del tiro (*ivi*); quantità che aggiunta a Π formerà il totale della richiesta probabilità y di B. Avremo perciò $y = \Pi + {}'y\Pi' = \frac{\alpha + (\beta + x){}'y}{\gamma + x}$; ossia ${}'y - y\left(\frac{\gamma + x}{\beta + x}\right) + \frac{\alpha}{\beta + x} = 0$, equazione lineare del prim' ordine, che cangiato x in $x+1$, e perciò ${}'y$ in y, ed y in y', diverrà $y - y'\left(\frac{\beta + x + 1}{\gamma + x + 1}\right) - \frac{\alpha}{\gamma + x + 1} = 0$. Per integrarla più facilmente particolarizzo i valori, e faccio $m = 4$, $n = 7$, $a = 3$, $b = 4$, onde $\alpha = 2$, $\beta = 3$,

$y=5$, con che l'equazione diverrà $y^{1}-y\left(\frac{4+x}{6+x}\right)-\frac{2}{6+x}=0$. Dunque (1461) $X=\frac{2}{6+x}$, $p=\frac{4+x}{6+x}$, $\pi p=\frac{2}{(5+x)(4+x)}$, $p\times\pi p=\frac{2}{(6+x)(5+x)}$, $\sigma\frac{X}{p\times\pi p}=\sigma(5+x)=\frac{x}{2}(x+9)$, ed $y=\frac{2}{(5+x)(4+x)}\left(\frac{x}{2}(x+9)+C\right)$. Per determinar la costante osservo che quando $x=0$ non resta a B alcuna speranza di vincere: onde anche $y=0$; dal che infine $y=\frac{x(9+x)}{(5+x)(4+x)}$. Sia $x=2$, sarà allora $y=\frac{11}{21}$.

II°. Determinar le sorti del Banchiere e del Puntatore al giuoco del *Faraone*, nei casi che con $2x$ carte da sfogliarsi, si trovino nel mazzo o una o due o tre carte puntate.

Se sieno $2x$ le carte, si avranno (394) $x(2x-1)$ combinazioni binarie, cioè nel primo caso $2x-1$ con la carta puntata, $(2x-1)(x-1)$ senza di questa. Ora il primo sfoglio o segue con la carta puntata o senza. La probabilità di questo secondo evento è manifestamente (407) $\frac{x-1}{x}$, quella del primo è $\frac{1}{x}$. Succedendo il secondo evento il banchiere nè scapita, nè guadagna, e solo cangia la sua probabilità totale y, funzione di $2x$, in ${}^{1}y$ funzione di $2x-2$, che valutata prima dello sfoglio per le regole della probabilità composta varrà $\frac{x-1}{x}\,{}^{1}y$. Succedendo il primo, egli può vincere o perdere, secondo che la carta puntata viene a destra o a sinistra. Or qui le combinazioni non essendo che due, l'una favorevole e l'altra contraria, la probabilità che possa aver luogo la favorevole sarà dunque $\frac{1}{2}$, e questa moltiplicata al solito per la probabilità dell'evento, varrà prima dello sfoglio $\frac{1}{2x}$. Dunque la probabilità totale del banchiere prima dello sfoglio sarà $y=\frac{x-1}{x}\,{}^{1}y+\frac{1}{2x}$. Ponendo $x+1$ in luogo di x, e quindi y^{1} per y ed y per ${}^{1}y$, si avrà $y^{1}-\frac{x}{x+1}y-\frac{1}{2(x+1)}=0$; onde (1461) $\pi p=\frac{1}{x}$, $p\times\pi p=\frac{1}{x+1}$, $\sigma\frac{X}{p\times\pi p}=\sigma\frac{1}{2}=(1450)\ \frac{x}{2}$, ed $y=\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}+C\right)$. Ma quando $x=0$ non resta altra speranza al banchiere, e si ha $y=0$: dunque $C=0$, e quindi $y=\frac{1}{2}$.

Nel secondo caso le combinazioni totali saranno come nel primo; quelle con una carta puntata $4(x-1)$; con due 1, senza le carte puntate $(x-1)(2x-3)$. Quindi la probabilità che non venga alcuna carta puntata al primo sfoglio sarà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}$; che ne venga una sarà $\frac{4(x-1)}{x(x-1)}$; che ne vengan due sarà $\frac{1}{x(2x-1)}$. Non venendone alcuna, il banchiere guadagna la solita probabilità ${}^{1}y$, che prima

dello sfoglio, varrà $\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}{}'y$. Venendone una, abbiamo già veduto che la probabilità per il caso favorevole è $\frac{1}{2}$, la quale prima dello sfoglio equivarrà a $\frac{2(x-1)}{x(2x-1)}$. Ma in questo caso rimane sempre una carta puntata nel mazzo, e su questa abbiamo veduto, che il banchiere, qualunque sia il numero delle carte, ha la probabilità $\frac{1}{2}$, dunque poichè questa valutata prima dello sfoglio monta a $\frac{2(x-1)}{x(2x-1)}$, sarà perciò la totale probabilità del banchiere fondata sul secondo evento $\frac{4(x-1)}{x(2x-1)}$. Infine venendo due carte puntate o un *doppietto*, il banchiere ha per le condizioni del giuoco la certezza di vincere $\frac{1}{2}$, sulla qual vincita prima dello sfoglio ha la probabilità $\frac{1}{2x(2x-1)}$. Dunque tutta quanta la probabilità del banchiere in questo secondo supposto di due carte puntate sarà $y=\frac{(x-1)(2x-3)}{x(2x-1)}{}'y+\frac{8x-7}{2x(2x-1)}$, cioè, fatti i soliti cangiamenti, $y'- \ldots \frac{x(2x-1)}{(x+1)(2x+1)}y-\frac{8x+1}{2(x+1)(2x+1)}=0$. Avremo dunque $\pi p=\frac{x-1}{x}\cdot\frac{x-2}{x-1}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-3}{2x-1}\cdot\frac{2x-5}{2x-3}\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{x(2x-1)}$, $p\times\pi p=\frac{1}{(x+1)(2x+1)}$, $\sigma\frac{X}{p\times\pi p}\ldots=\sigma\frac{8x+1}{2}=\frac{x}{2}(4x-3)$, ed $y=\frac{4x-3}{2(2x-1)}$. Si troverebbe egualmente per la probabilità del puntatore $\frac{4x-5}{2(2x-1)}$.

Nel terzo caso le combinazioni binarie totali saranno al solito $x(2x-1)$. Quelle senza le carte puntate $(2x-3)(x-2)$; con una carta puntata $3(2x-3)$; con due 3. Dunque la probabilità che non si abbia alcuna carta puntata al primo sfoglio sarà $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}$, che se ne abbia una $\frac{3(2x-3)}{x(2x-1)}$, che se ne abbiano due $\frac{3}{x(2x-1)}$. Seguendo il primo caso il banchiere non guadagna che la probabilità $'y$ di vincere nello sfoglio seguente, che prima dello sfoglio varrà . . $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}{}'y$. Se segue il secondo, egli ha la probabilità, che la carta gli sia favorevole, probabilità che abbiamo già trovata essere $\frac{1}{2}$, e che prima dello sfoglio vale $\frac{3(2x-3)}{2x(2x-1)}$; inoltre guadagna la probabilità sopra le due carte, che rimangono, la quale per un numero $2x$ di carte essendosi già trovata di sopra

$\frac{4x-3}{2(2x-1)}$, qui in un numero $2x-2$ di carte sarà dopo il primo sfoglio $\frac{4x-7}{2(2x-3)}$, e avanti di esso $\frac{3(4x-7)}{2x(2x-1)}$; onde la probabilità intera del banchiere fondata sul secondo evento sarà $\frac{3(3x-5)}{x(2x-1)}$. Seguendo infine il terzo, il banchiere guadagna la solita metà della scommessa, sulla quale ha dunque la probabilità $\frac{3}{2x(2x-1)}$, ed inoltre guadagna la probabilità $\frac{1}{2}$ sull' altra carta rimasta, che prima dello sfoglio vale $\frac{3}{2x(2x-1)}$; cioè in tutto il banchiere può avere sul terzo evento la probabilità $\frac{3}{x(2x-1)}$. Dunque infine la totale speranza del banchiere sarà $y=$ $\frac{(2x-3)(x-2)}{x(2x-1)}{}'y+\frac{3(3x-4)}{x(2x-1)}$. Fatti i soliti cangiamenti si avrà $y'-\ldots\ldots$ $\frac{(2x-1)(x-1)}{(2x+1)(x+1)}y-\frac{3(3x-1)}{(2x+1)(x+1)}=0$, $\pi p=\frac{2x-3}{2x-1}\cdot\frac{2x-5}{2x-3}\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{3}\times\frac{x-2}{x}\cdot\frac{x-3}{x-1}\cdot$ $\frac{x-4}{x-2}\cdots\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{x(x-1)(2x-1)}$, $p\times\pi p=\frac{2}{x(x+1)(2x+1)}$, $\sigma\frac{X}{p\times\pi p}=\frac{3}{2}\times$ $\sigma x(3x-1)=\frac{3}{2}(x^3-2x^2+x)=\frac{3x}{2}(x-1)^2$. Dunque $y=\frac{2}{x(2x-1)(x-1)}\left(\frac{3x}{2}(x-1)^2+C\right)$, cioè $y=\frac{3(x-1)}{2x-1}$, giacchè come sopra $C=0$. La probabilità favorevole al puntatore si troverebbe $=\frac{3(x-2)}{2x-1}$.

III. Sono in un' urna $x+1$ polizze coi numeri naturali 1, 2, 3, ec., e che debbono essere estratte da altrettanti individui, a condizione che chi estrarrà un numero $=$, ovvero $<m$ otterrà un certo premio. Supposto $x>2m$ si domanda se la probabilità di guadagnarlo sia la stessa tanto per i primi estraenti, quanto per gli ultimi. È certo quanto al primo estraente, che in $x+1$ combinazioni possibili, avendone m favorevoli ed $x+1-m$ contrarie, la probabilità per la vincita sarà per lui $\frac{m}{x+1}$, e per la perdita $\frac{x+1-m}{x+1}$.

Quanto al secondo possono aver luogo due casi differenti, cioè 1°. che nell' estrazione precedente sia sortito un numero $>$ di m; 2°. che ne sia sortito uno $=$, ovvero $<m$. Nel primo caso egli non fa che cangiare al solito la sua probabilità y per la vincita in ${}'y$ funzione di x, che al principio dell' estrazione vale $\frac{{}'y(x+1-m)}{x+1}$. Nel secondo caso sopra le residue polizze x ne restano per lui $m-1$ che potranno farlo vincere, onde per questo evento avrà la probabilità $\frac{m-1}{x}$, e questa pure

valutata prima dell' estrazione varrà $\frac{m(m-1)}{x(x+1)}$. Quindi la probabilità totale del secondo estraente per la vincita avanti l' estrazione sarà $y = \frac{'y(x+1-m)}{x+1} + \dots \frac{m(m-1)}{x(x+1)}$, espressione che coi consueti cangiamenti diviene $y' - \frac{y(x+2-m)}{x+2} - \frac{m(m-1)}{(x+1)(x+2)} = 0$. Sarà dunque $X = \frac{m(m-1)}{(x+1)(x+2)}$, $p = \frac{x+2-m}{x+2}$, $\pi p = \dots \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 4.3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\dots(x-m+2)}$, $p \times \pi p = \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1}{(x+2)(x+1)x(x-1(x-2)\dots(x-m+3)}$, $\sigma \frac{X}{p \times \pi p} = \sigma \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-m+3)}{(m-2)(m-3)(m-4)\dots 3.2.1} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-m+2)}{(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1}$ (1451); ed $y = \frac{m(m-1)m-2)(m-3)\dots 3.2.1}{(x+1)x(x-1)(x-2)\dots(x-m+2)} \left\{ \frac{x(x-1)(x-2)\dots(x-m+2)}{(m-1)(m-2)(m-3)\dots 3.2.1} + C \right\}$. La costante si determina con osservare che quando $x+1=m$, non restano che m estratti tutti contrarj alla perdita; onde la probabilità per la vincita si cangia allora in certezza, e diviene $y=1$. Ma la supposizione di $x+1=m$, cangia il secondo membro dell' equazione in $1+C$, avremo dunque $1=1+C$, e quindi $C=0$. Di qui è evidente la conclusione che in generale $y = \frac{m}{x+1}$; onde la probabilità del secondo estraente per la vincita, e in conseguenza anche quella per la perdita, sono eguali alle probabilità del primo estraente; il che manifestamente porta a concludere che anche tutti gli altri avranno in egual modo in favore lo stesso grado di probabilità fin dal principio del gioco.

AGGIUNTE, VARIAZIONI E CORREZIONI

§. 794. *Si aggiunga in ultimo*: E poichè $2n-\frac{1}{2}=2n-1+\frac{1}{2}$, si avrà dunque $cos(2n+\frac{1}{2})\pi=0$, $cos(2n-1+\frac{1}{2})\pi=0$; e in generale, qualunque siasi n o pari o impari, $cos(n+\frac{1}{2})\pi=0$.

§. 842. Il metodo proposto in questo paragrafo per avere il valore di a', sebbene indiretto, ha per altro il vantaggio di guidare ad una formula che assai facilmente si presta al calcolo logaritmico. Ma volendo averne direttamente l'espressione analitica mediante una sua qualche funzione trigonometrica, potrà osservarsi che la proporzione $g' : g'' :: sena' : sena''$ dà $g''sena'=g'sena''=g'sen\Big(180^\circ-(a+a')\Big)=$ (792. 51.ª) $g'sen(a+a')=$ (788 38.ª) $g'senacosa'+g'sena'cosa$: di qui $g''=g'senacota'+g'cosa$, e infine $tanga'=\dfrac{g'sena}{g''-g'cosa}$.

§. 862. *in fine*. « dunque *l'angolo sferico ec.* » S' intenda dell' arco interposto fra quei due poli che cadono dalla stessa parte dei lati, cioè ambedue o dalla parte destra o dalla parte sinistra. La proposizione è poi d'altronde manifesta, in quanto che l' arco interposto fra i poli misura l' angolo degli assi, che come è chiaro, corrisponde all' inclinazione dei piani, e quindi all' angolo sferico (859).

§. 887. La formula finale di questo paragrafo peggiora le condizioni del calcolo; poichè se l'altra $cosh=cosg'cosg''$ non è applicabile quando h risulta troppo piccola, molto meno potrà aversi il valor di h da $cos\frac{1}{2}h=\dfrac{1}{cos g\sqrt{2}}$ ove l'arco incognito è metà del supposto. Invece dovremo perciò procurarci a', come abbiamo praticato di sopra, dalla formula $tangg'=tanga'seng''$ (885), e quindi h dalla formula $seng'=senhsena'$ (*ivi*).

§. 921. *Fra questo e il seguente paragrafo si ponga quanto segue.* Coll'uso di questa scala, per dirlo qui di passaggio, possiamo formare un angolo di un dato numero a di gradi, problema che tanto frequentemente occorre di risolvere in pratica.

Si prenda una linea AD (Fig. 252) equivalente in lunghezza ad un numero qualunque n di parti della scala. Ad una delle sue estremità D si alzi una normale indefinita. Si calcoli quindi col mezzo delle tavole il valor numerico di $ntanga$. Presa sulla scala e riportata sulla normale una lunghezza DC equivalente al valor trovato, si unisca A con C, sarà DAC l'angolo ri-

chiesto. Infatti il triangolo ADC dà (846. 2.°) $tang DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{n tang a}{n} = tang a$, e quindi $DAC = a$.

§. 935. *Terminato il paragrafo si aggiunga:* A questa medesima equazione si perviene, siccome è facile dimostrare, anche se il cono sia obliquo, purchè in questo caso la sezione si supponga non più fatta comunque, ma normalmente al piano triangolare condotto per l'asse perpendicolarmente alla base, il qual piano non potrà esser che uno solo. Qui poi potremo osservare che in questo caso se sia $A = D$, e per conseguenza $A + B = 180° - C$, avremo $y^2 = \frac{cx sen B}{sen C} - x^2$, equazione ad un circolo del diametro $\frac{c sen B}{sen C}$ (910), cioè la sezione, al pari di quelle fatte parallelamente alla base, sarà circolare. I Geometri la chiamano *subcontraria*, ed occorre specialmente nelle dottrine della Prospettiva.

§. 943. 2.° *Dopo le parole* « l'iperbola sarà equilatera » *si aggiunga*: Potrà osservarsi di più che in questo caso l'equazione dovrà mancare del secondo termine, o del termine coll'xy; poichè nelle supposte ipotesi dovendo aversi $p = q'$, $q = p'$ ed essendo $a = b$, risulta $2a^2p'q' - 2b^2pq = 0$. Come del pari se gli assi della trasformata sono ortogonali e manca il secondo termine, sarà $B = -1$ e l'iperbola equilatera. Inoltre, poichè i cinque coefficienti dell'equazione $y^2 + Axy + Bx^2 + Cy + Dx + F = 0$ non danno luogo che a cinque equazioni, colle quali possiamo determinare un egual numero delle sei quantità a, b, α, β, p, q, una di queste rimarrà dunque indeterminata, e potrà quindi darlesi un qualunque valore ad arbitrio. Dal che si ha che infinite potranno essere le ellissi e le iperbole corrispondenti alla data equazione, differenti fra loro o in uno dei parametri, o in una delle coordinate del centro, o nella direzione di uno degli assi delle coordinate.

§. 997. La conclusione di questo paragrafo appella al caso più universale, cioè che l'iperbola non sia equilatera: se lo è, si dimostra all'opposto che ogni diametro è eguale al suo coniugato. Infatti dall'equazione $b^2 = a^2 tang\omega tang\varphi$ (987. 6.°) fatto $a = b$ si ha $tang\omega = cot\varphi$, d'onde $\omega = 90 - \varphi$, valore che posto nella V.ª (996) dà $m = n$.

§. 1012. *Si aggiunga al termine del paragrafo:* Se non che la parte negativa o alla sinistra dell'origine non è eguale alla positiva, eccettochè nel caso di $m = n$, il che assai facilmente apparisce.

§. 1043. L'analisi, colla quale in questo paragrafo si scende a stabilir l'equazione $\varphi_1(x) = \frac{1 + cos u}{sen u}$, per quanto rigorosa ed elegante, ha il difetto di scostarsi dal metodo generale che abbiamo sopra proposto (1041). Volendo attenersi a questo, si riprenda l'equazione (1021) $y = \varphi(x) = arc. cos(1 - x) + \sqrt{(2x - x^2)}$ sarà $\varphi(x + \omega) = arc. cos(1 - x - \omega) + \sqrt{(x + \omega)(2 - x - \omega)}$. Ponendo $arc. cos(1 - x - \omega) = z$,

avremo in primo luogo $1-x-\omega=\cos z$; d' onde $z=(823)\frac{1}{2}\pi-(1-x-\omega)-\frac{1}{2.3}(1-x-\omega)^3-\frac{3}{2.4.5}(1-x-\omega)^5-\frac{3.5}{2.4.6.7}(1-x-\omega)^7-\text{ec.}=(1021)\frac{1}{2}\pi-(\cos u-\omega)-\frac{1}{2.3}(\cos u-\omega)^3-\frac{3}{2.4.5}(\cos u-\omega)^5-\frac{3.5}{2.4.6.7}(\cos u-\omega)^7-\text{ec.}$ Avremo in secondo luogo $\sqrt{(x+\omega)(2-x-\omega)}=(x+\omega)^{\frac{1}{2}}(2-x-\omega)^{\frac{1}{2}}=(216)\left(x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\omega-\frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\omega^2+\text{ec.}\right)\left((2-x)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{1}{2}}\omega-\frac{1}{8}(2-x)^{-\frac{3}{2}}\omega^2-\text{ec.}\right)$.
Ora sviluppando ciascuna delle potenze della prima serie con arrestarci al loro secondo termine, l'unico che contenga ω alla prima dimensione, troveremo per prima porzione del coefficiente di questa quantità, $1+\frac{1}{2}\cos^2 u+\frac{3}{2.4}\cos^4 u+\frac{3.5}{2.4.6}\cos^6 u+\text{ec.}=(ivi)\ \frac{1}{\sqrt{(1-\cos^2 u)}}=\frac{1}{\operatorname{sen} u}$. In seguito moltiplicando tra loro le due serie risultanti dall' altro termine, e limitandoci come sopra alle prime potenze di ω, troveremo pel resto del coefficiente di questa quantità, $\frac{\sqrt{(2-x)}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{(2-x)}}=\frac{1-x}{\sqrt{(2x-x^2)}}=(1021)\frac{\cos u}{\operatorname{sen} u}$. Raccogliendo adesso le due porzioni del coefficiente di ω, avremo $\varphi_1(x)=\frac{1+\cos u}{\operatorname{sen} u}$.

§. 1065. X. Le equazioni fra y e z che qui vengon date per le diverse soluzioni particolari di questo problema, non sono propriamente fra le coordinate della curva richiesta. Perciò in luogo di sostituire il valor di x dato per z sarà meglio sostituire quello di z dato per x.

§. 1146. « Ed altrettanto accade rapporto alle sezioni secondarie. » Che se anche c fosse negativa e si avesse $z^2=ax^2-by^2-c$, è chiaro che siccome questa equazione si trasforma nell'altra $x^2=\frac{z^2}{a}+\frac{b}{a}y^2+\frac{c}{a}$ in tutto analoga alla prima (1138), così avremo similmente da questa una iperboloide ellittica, differente soltanto nella posizione.

§. 1150. « ... si chiama *paraboloide iperbolica.* » Si può concepire come generata dalle due parabole primarie risultanti dalle sezioni fatte dai piani delle xz e delle yz (1149), immaginando che ciascuna si avanzi parallelamente a se stessa, in modo però che la superiore strisci sempre col suo vertice sull'uno o sull'altro ramo dell'inferiore, e l'inferiore sull'un ramo e l'altro della superiore.

§. 1218. « dal che si rileva 5.° ec. » Questo teorema può esporsi diversamente e in modo più opportuno, dicendo: « dal che si rileva che, l'ultimo termine d'una serie formata da differenti valori di y eguaglia la differenza della somma di tutti quelli che precedono, più il primo, se pur questo non sia nullo. »

§. 1227. *in fine.* **Non sarà inutile rammentare che dx rappresenta l' elemento lineare dell'arco che nel circolo del raggio 1 misura l'angolo x, e non** quello dell'angolo x; e ciò in conformità dell'avvertenza fatta al §. 809. 2.°.

§. 1252. Agli esempj riportati in questo paragrafo sarà bene aggiungere i due seguenti:

X. Sia $y=\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{x}$; troveremo $dy=-\frac{dx}{x^2\sqrt{(1-x^2)}}$

XI. Sia $y=l\frac{(1+\sqrt{(1-x^2)})}{x}$; sarà $dy=\frac{-dx}{x\sqrt{(1-x^2)}}$

§. 1294. «Infine poichè ec.» Il valor qui dato per b può ottenersi più facilmente sostituendo quello di $\sqrt{(1-e^2)}=(216)\ 1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}-$ec.

§. 1399. «...purchè nella prima integrazione si ponga ec.» **È chiaro che l'introduzione del nuovo valore di x da farsi dopo la prima integrazione, si** riduce a cambiare a in a' ed m'' in m'.

§. 1419. *Al termine di questo paragrafo si aggiunga*: **Se si cangino le coordinate angolari y ed x l'una in r, l'altra in θ, a seconda delle denominazioni già adottate al paragrafo 901, avremo $S=\frac{1}{2}\int r^2 d\theta$: e se con x,y si** rappresentano invece le coordinate rettangole del punto della curva corrispondente all'estremità di r, avremo (*ivi*) $r^2=x^2+y^2$, $sen\theta=\frac{y}{r}$, $cos\theta=\frac{x}{r}$, e quindi $dsen\theta=d\theta cos\theta=\frac{rdy-ydr}{r^2}$; d'onde $d\theta=\frac{rdy-ydr}{r^2 cos\theta}=\frac{rdy-ydr}{rx}$, ed

$$r^2d\theta=\frac{r^2dy-rydr}{x}=\frac{r^2dy-\frac{1}{2}yd(r^2)}{x}=\frac{(x^2+y^2)dy-y(xdx+ydy)}{x}=xdy-ydx.$$

Sarà perciò $S=\frac{1}{2}\int(xdy-ydx)$, **valore dell'area espressa per le coordinate** rettangole.

FINE

INDICE

DEL TOMO SECONDO

ERRATA

		ERRORI	CORREZIONI
pag. 6	vers. 9 ris.	MP	MB
» 11	» 5	$\frac{tangp+tangq}{tangp+tangq}$	$\frac{tangp\pm tangq}{tangp\mp tangq}$
» 22	» 10 ris.	a'', (566)	a'' (566. 4.°),
» 28	» 14	(842)	(843)
» 29	» 9 ris.	gli archi	i seni e coseni degli archi
» 35	» 15	57,8	37,8
» 52	» 2	(864. 2.°)	(863. 2.°)
» 64	» 9	x, x'	x', y'
» 65	» 9	$\pm\frac{(x'-\alpha')senxx'+(y'-\beta')senxy'}{senxy}$	$\frac{\pm(x'-\alpha')senxx'+(y'-\beta')senxy'}{senxy}$
» 66	» 4	dal punto	del punto
» 69	» 2	$=-b$	$=b$
» ivi	» 18	Fig. 139	Fig. 134
» ivi	» 19	$N'A'=\beta$	$N'A=\beta$
» 72	» 16	$y=a+z$	$x=a+z$
» 77	» 15 ris.	reale, razionale e doppia	reale e doppia
» 88	» 3 ris.	$\sqrt{p'x}$	$\sqrt{p'x'}$
» 89	» 12 e 13 ris.	M''	M'
» 93	» 11 ris.	; fQ	: fQ
» 101	» 9 e 12	$\frac{ba^2}{2x}$	$\frac{ba}{2x}$
» 103	» 13	I.ª $-m^2$, II.ª n^2	I.ª m^2, II.ª $-n^2$
» 104	» 14 ris.	TN'	T'N
» 105	» 23	Fig. 159	Fig. 158
» 106	» 16	Fig. 162	Fig. 160
» 108	» 12 ris.	$Bb\times BE$	$Bb\times bE$
» 109	» 3 ris.	dFa	dfa
» 110	» 8 e 12	(969. 1.°, ...)	(970. 1.°, ...)
» 111	» 12 ris.	P'F	PF
» ivi	» 7 ris.	iperbole	iperbole simili
» 115	» 6 e 7	$sen\varphi$	$tang\varphi$
» ivi	» 8	tra gli asintoti (943)	uno de' cui asintoti sarà parallelo all'asse Y (943. 5.°)
» 118	» 6 ris.	90°	arc.90°
» 127	» 3	$-\frac{1+2cos^2u}{2.3sen^5u}\omega^3$	$+\frac{1+2cos^2u}{2.3.sen^5u}\omega^3$
» ivi	» 14	$pn'<pm'$	$p'n'<p'm'$

pag. 129	vers. 14	concavità .... convessità	convessità .... concavità
» 131	» 9	riducon queste	riducon questa
» 133	» 12	(789. 40.ª)	=(789. 40.ª)
» 134	» 3 e 4	$\varphi_1(x)$	$\varphi_1(x')$
» 137	» 3	Condotta .... normale	Condotte .... normali
» 146	» 7	$y=y'cosx'y,\ z=z'cosx'z$	$y=x'cosx'y,\ z=x'cosx'z$
» ivi	» 15 ris.	$SPYZ$	$XPYX'$
» 151	» 3	(1095. 3.°)	(1095. 4.°)
» 152	» 10 ris.	normale a DN	normale a DE
» 154	» 8 ris.	x', y', z'	x', y'', z'''
» 158	» 12	$-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}$ in luogo di A, B	$-\frac{A}{C}, -\frac{B}{C}, \frac{1}{C}$ in luogo di A, B, C
» 159	» 4	il primo	il secondo
» ivi	» 5	(1220. 1.°)	(1120. 2.°)
» ivi	» 10, 11 ris.	$B \ldots . A$	$-B \ldots . -A$
» 160	» 2	della projezione	ed alla projezione
» ivi	» 4	le coordinate	le ordinate
» ivi	» 10	$cos\theta'^2+cos\theta''^2+cos\theta'''^2$	$cos^2\theta'+cos^2\theta''+cos^2\theta'''$
» 162	» 4	(1092)	(1104)
» 172	» 6 ris.	(1146)	(1147)
» 181	» 25	(701) sarà il cercato	(1185) sarà il cercato (701)
» 182	» 14	di una curva	del piano di una curva
» 185	» 19	(762)	(748)
» 205	» 13	$\frac{m(xdz-zdx)}{x\sqrt{mx(2nz-mx)}}$	$\frac{m(xdz-zdx)}{z\sqrt{mx(2nz-mx)}}$
» 208	» 4	prima per x, poi per y	per x, y e per dx, dy
» ivi	» ult.	$(z^2+3y)y$	$(z^2+3y^2)y$
» 209	» 5	$\sqrt{(a+x^3)^2}$	$\sqrt[3]{(a+x^3)^2}$
» ivi	» ivi	$x\sqrt[3]{(a+x^3)^5}$	$x^2\sqrt[3]{(a+x^3)^5}$
» 217	» 1	$\{dy^2+\ldots$	$\}dy^2+\ldots$
» ivi	» penult.	$\left(\frac{dy}{dz}\right)$	$\left(\frac{dx}{dz}\right)$
» 222	» 2	ψ, ψ', φ'	ψ, ψ'
» 226	» 11	(678)	(677)
» 228	» 10 ris.	$\frac{1}{1.2.2\ldots n\times 1.2.3\ldots n'}$	$\frac{1}{1.2.3\ldots n\times 1.2.3\ldots n'}$
» 229	» 4 ris.	(1264)	(1221. 2.°)
» 232	» 4	$-\frac{e^4}{3}sen4z$	$+\frac{e^4}{3}sen4z$
» ivi	» 13 ris.	$\frac{b-1}{b+1}$	$\frac{1-b}{1+b}$

pag. 233	*vers. ult.*	ω^{m+3m-3}	ω^{n+3m-3}
» 237	» 7	$+ah^3$	$+h^3$
» 237	» 12 *ris.*	$x=0$	$x=a$
» 243	» 8 *ris.*	SM*m*	SM*m* e da M la M*r* parallela ad AP
» 246	» 3	$\frac{d(FX)}{dx}\omega\delta x^2$	$\frac{d(FX)}{dX}\omega\delta x^2$
» 253	» 13	(582)	(1026. 582)
» 254	» 12	(1055)	(1055. 1.°)
» 255	» 15	$\frac{3}{2}\pi-\beta$	$\pi-\beta$ ossia trasportando l'origine in A
» 263	» 9	$\times\sqrt{(x^2-\beta x-\alpha)}$	$\times\sqrt{-(x^2-\beta x-\alpha)}$
» 268	» 9	della formula $\int\frac{dy}{sen^m y}$	delle due formule $\int\frac{dy}{sen^m y}$, $\int dx sen^n x$ (1358)
» 269	» 6 *ris.*	1335	1337
» 270	» 10	i due radicali per $2q$	sopra e sotto per $2q$ il primo membro
» 273	» 1	$\frac{dA}{dy}\ldots\ldots\frac{dB}{dx}$	$\left(\frac{dA}{dy}\right)\ldots\ldots\left(\frac{dB}{dx}\right)$
» 275	» 6	già trovati	già stabiliti (1371)
» *ivi*	» 10 *ris.*	variabile qualunque	variabile qualunque diversa da x
» 278	» 10 *ris.*	(1340)	(1339. 4.° 1342)
» 279	» 13	$x^m y^n=p$	e quindi $x^m y^n=p$
» 287	» 7 *ris.*	$\int\frac{rdr}{r}$	$\int\frac{rdr}{s}$
» 288	» 2	$\int\frac{dq}{\sqrt{2\int rdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$	$\int\frac{dq}{\sqrt{2\int sdq}}\int\frac{qdq}{\sqrt{2\int sdq}}$
» *ivi*	» 12	dell'ordine n	dell'ordine $n-1$
» 289	» 4 *ris.*	$=$N	$=$N, ed N funzione delle sole x, y,
» 291 e 292	§. 1400.	Alla citazione (1396) si sostituisca (1397)	
» 293	» 10 *ris.*	(1402)	(1396)
» 297	§. 1412.	Fig. 261	Fig. 262
» 299	» 3	(787. 29.ª 30.ª)	(787. 14.ª)
» *ivi*	§. 1421.	Si citi in margine la Fig. 271	
» 300	» 4	(1339)	(1340)
» 301	» 11	con $p=\frac{a}{\pi}$. Fatto CQ$=$ec.	con $p=\frac{a}{\pi}$, preso CQ$=$ec.
» 312	» 10	$a=-\frac{1}{2}$	$a=b=-\frac{1}{2}$
» 313	» *penult.*	$\frac{4(x-1)}{x(x-1)}$	$\frac{4(x-1)}{x(2x-1)}$

110
115
116
122
123
136
137

142
152
FIRENZE

200
201
212
223
FIRENZE
Digitized by Google

245
250